



Derivation of energetic properties of the waveguide fields in time-domain

Ahmet Arda Çoşan^{1*} , Fatih Erden² , Oleg A. Tretyakov¹ 

¹Department of Electronics Engineering, Gebze Technical University, Kocaeli, 41400, Turkey

²Department of Electronics Engineering, Turkish Naval Academy, National Defense University, Istanbul, 34942, Turkey

Highlights:

- Modeling of Evolutionary Approach to Electromagnetics
- Maxwell's equations in symmetrical form
- Energetic properties of the waveguide modes

Keywords:

- Evolutionary approach to electromagnetics
- Evolutionary equations
- Klein-Gordon equation
- Waveguide
- Time-domain

Article Info:

Research Article

Received: 23.06.2017

Accepted: 12.02.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416495

Acknowledgement:

Correspondence:

Author: Ahmet Arda Çoşan

e-mail: acosan@gtu.edu.tr

phone: +90 537 504 1747

Graphical/Tabular Abstract

The waveguide problem is one of the most studied problems of the electromagnetic theory. In this research study, time-domain waveguide problem is solved in time-domain as real-valued functions of time with making usage of the Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE), instead of classical time-harmonic electromagnetics solution. With an novel scaling procedure Maxwell's equations are rearranged to the symmetrical form in the SI unit system. Solutions for the Klein-Gordon equation (KGE) is required for the modal amplitudes of the waveguide field. Energetic properties, which are power flow density, energy density, and velocity of transportation of energy in the waveguide are studied in the SI unit system with the new scaling procedure, and time dependence of these properties are displayed graphically.

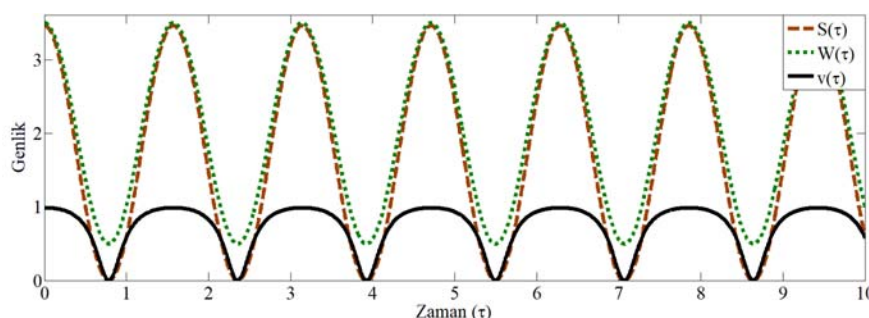


Figure A. Time dependence of the power flow density, energy density and velocity of transportation of the modal field energy in lossless waveguide

Purpose: Purpose of this research study is to obtain time-domain solutions for the energetic properties of the waveguide fields using Evolutionary Approach to Electrodynamics (EAE) and factorization of the physical dimensions of field vectors.

Theory and Methods:

Analytical solution for the time-domain waveguide problem is expressed within the framework of the Evolutionary Approach to Electrodynamics (EAE), which is acknowledged as an alternative method to solve various time-domain cavity and waveguide problems. Factorization procedure for the physical dimensions of electric and magnetic field vectors enable us to reorganize Maxwell's equations in an novel symmetrical format. This novel format of Maxwell's equations is more advantageous for future research in the field of energetic and mechanical characteristics of the waveguide problem.

Results:

Energetic properties of the waveguide modes are displayed graphically. These graphical results include the time dependence of power flow density, energy density and velocity of transportation of modal field energy in the waveguide. Time dependence of the modal amplitudes of the modal fields is also presented graphically.

Conclusion:

Analytical solution for the time-domain waveguide problem is expressed within the framework of Evolutionary Approach to Electrodynamics (EAE). Factorization of the physical dimensions allows us to reorganize Maxwell's equations in an novel symmetrical format within the SI unit system.



Dalga kılavuzu alanlarının zaman-uzayı enerji özelliklerinin türetilmesi

Ahmet Arda Çoşan^{1*}, Fatih Erden², Oleg A. Tretyakov¹

¹Gebze Teknik Üniversitesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Kocaeli, 41400, Türkiye

²Milli Savunma Üniversitesi, Deniz Harp Okulu, Elektronik Mühendisliği Bölümü, İstanbul, 34942, Türkiye

Ö N E Ç İ K A N L A R

- Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım Yöntemi
- Simetrik formdaki Maxwell denklemleri
- Dalga kılavuzu alanlarının enerji özellikleri

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 23.06.2017

Kabul: 12.02.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416495

Anahtar Kelimeler:

Elektromanyetik teoriye evrimsel yaklaşım, evrim denklemleri, klein-gordon denklemi, dalga kılavuzu, zaman domeni.

ÖZET

Dalga kılavuzu problemi elektromanyetik teoride önemli yere sahip olan ve sıkça araştırılan bir konudur. Bu çalışmada zaman-domeni dalga kılavuzu problemi için klasik zaman-harmonik çözüm yönteminin aksine Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY) yöntemi kullanılarak zamana bağımlı gerçek değerli fonksiyonlar cinsinden çözüm elde edilmiştir. Maxwell denklemleri için yeni bir ölçeklendirme prosedürü kullanılarak Maxwell denklemlerinin SI birim sistemi çerçevesinde simetrik formata getirilmesi sağlanmıştır. ETEY yönteminde dalga kılavuzu probleminde Klein-Gordon denklemi (KGD) çözüm için büyük önem taşımaktadır. KGD denkleminin çözümüyle dalga kılavuzlarında modal genlikler elde edilmiş ve uygulanmış olan ölçeklendirme prosedürü ile elektromanyetik dalgaların enerji özellikleri SI birim sistemi içerisinde incelenmiştir.

Derivation of energetic properties of the waveguide fields in time-domain

H I G H L I G H T S

- Modeling of Evolutionary Approach to Electromagnetics
- Maxwell's equations in symmetrical form
- Energetic properties of the waveguide modes

Article Info

Research Article

Received: 23.06.2017

Accepted: 12.02.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.416495

Keywords:

Evolutionary approach to electromagnetics, evolutionary equations, klein-Gordon equation, waveguide, time-domain.

ABSTRACT

The waveguide problem is one of the most studied problems of the electromagnetic theory. In this study, instead of classical time-harmonic electromagnetics, time-domain waveguide problem is solved in time-domain as real-valued functions of time with making usage of the Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE). With an novel scaling procedure Maxwell's equations are rearranged to the symmetrical form in the SI unit system. Klein-Gordon equation (KGE) plays an important role in the EAE for waveguide problem. Solving KGE results in the modal amplitudes for the waveguide, and the energetic properties of the electromagnetic fields are studied in SI unit system with our new scaling procedure.

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: acosan@gtu.edu.tr, erden@icee.org, o.tretyakov@gmail.com / Tel: +90 537 504 1747

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

1.1. Konu ve Yöntem (Subject and Method)

Elektromanyetik teorinin önemli araştırma konularından bir tanesi olan dalga kılavuzu problemi diğer elektromanyetik problemleri gibi klasik zaman-harmonik yöntemi kullanılarak $t=-\infty$ 'da başlayıp $t=+\infty$ 'a kadar devam eden olayları inceleyerek çözüme ulaştırılabilir. Gerçek durumdan bakılacak olursa, problemlerin çözümünde belirli bir t_0 zamanında başlayan “zorlanmış osilasyonlar” kullanılmak durumundadır.

Bu bakış açısıyla, elektromanyetik teorideki çözüm yöntemlerini iki ana kategoride incelemek mümkündür. İlk kategoriye; modern bilgisayarların hesaplama limitleriyle kısıtlı olan nümerik yöntemler alınabilir. İkinci kategoride ise; genellikle Laplace veya Fourier integral dönüşümlerinin bulunduğu analitik yöntemler bulunur.

Analitik zaman uzayı çözüm yöntemleri kategorisinde olan bu çalışma, dalga kılavuzu alanlarını green fonksiyonu ile kaynak fonksiyonunun zaman konvolüsyonu olarak sunan, ancak t ve z büyüdükçe doğruluk kaybına uğrayan zaman uzayı çalışmalarından [1] farklı olarak, *Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETEY)* yöntemi çerçevesindedir [2]. Matematikçiler tarafından zaman türevli bütün diferansiyel denklemler “evrimsel denklemler” olarak adlandırılır [3]. Bu denklemlerin çözümleri uygun başlangıç koşulları altında, olayların zaman içerisindeki gelişimini t_0 başlangıç zamanından gözlem anına kadar ortaya koymaktadırlar. Çözümün evrim denklemleri formunda elde edilmesinden dolayı bu yöntem “Evrimsel Yaklaşım” olarak isimlendirilmiştir. ETEY yöntemi, yakın zaman içerisinde klasik zaman-harmonik yöntemine alternatif bir yöntem olarak tanınmıştır [4]. Zaman-uzayında elektromanyetik çalışmalarının geçmişi önceki çalışmalarda farklı ortamlarla doldurulmuş kavite ve dalga kılavuzu problemleri için tartışılmıştır [5-9].

2. SI BİRİM SİSTEMİNDE MAXWELL DENKLEMLERİNİN İNCELENMESİ (INVESTIGATING MAXWELL'S EQUATIONS IN SI UNITS)

Temel olarak birbirinden bağımsız yedi elemandan oluşmakta olan SI birim sisteminde (International System of Units - SI), N (*Newton*) [$N=kgms^{-2}$] kuvvet birimi simgesi olmak üzere, \mathcal{E} elektrik alan ve \mathcal{H} manyetik alan vektörlerinin boyutları sırasıyla Eş. 1’de gösterildiği gibi *volt / metre* ve *amper / metre* olarak belirlenmiştir:

$$\left[\mathcal{E}(\mathbf{R}, t) \right] = \left[\frac{V}{m} \equiv \frac{N}{As} \right], \quad \left[\mathcal{H}(\mathbf{R}, t) \right] = \left[\frac{A}{m} \right] \quad (1)$$

R gözlem noktasının pozisyon vektörü, t gözlem zamanı, σ ise sistemdeki kayıpları modelleyen iletkenlik sabiti olmak

üzere SI birim sistemi çerçevesinde Maxwell denklemleri Eş.2’de olduğu gibi yazılmaktadır:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{R}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{R}, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Eş. 2’deki denklemlerin orijinal formu, SI birim sisteminde çok daha önce ortaya konulmuş olduğundan SI sistemine geçildiğinde birim sistemine uydurulmak üzere düzenlemeye tabi olmuştur. Maxwell denklemlerinde fiziksel boyut analizi yapıldığında, operatör nabla ∇ ’nın boyutunun [m^{-1}] ve $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ ’nin boyutunun [s^{-1}] olduğu görülebilir. SI birim sistemindeki fiziksel boyutlarıyla düşünüldüğünde, sistemin boyutsal olarak eşitlik durumunun korunması için Maxwell denklemlerine elektrik ve manyetik geçirgenlik katsayılarının Eş.3’te belirtilen fiziksel boyutları ile birlikte eklenmesi gerekli olmuştur:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \equiv \frac{N}{A^2} \right] \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{c_0 4\pi \times 10^{-7}} \left[\frac{F}{m} \equiv \frac{A^2 s^2}{N m^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$c=1/(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}=c_0 [ms^{-1}]$ ışık hızı olmak üzere; c_0 ışık hızının sayısal değerini sembolize eden sabittir; $c_0=2.99792458 \times 10^8$ [10]. Elektrik kapasitansın birimi *farad* [$F=s^4 A^2 kg^{-1} m^{-2}$] olarak yazılabilir.

2.1. SI Birim Sisteminde Maxwell Denklemlerinin Simetrikleştirilmesi

(Symmetrization of Maxwell's Equations in SI Units)

Maxwell denklemlerindeki elektromanyetik ifadelerin fiziksel boyutlarını SI birim sisteminde ölçeklendirmek üzere; elektrik alan vektörü, $\mathcal{E}(\mathbf{R}, t) [V/m] = \varepsilon_0^V [V] \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) [I/m]$, için yeni ölçeklendirme faktörünün fiziksel boyutunun *volt* [V] olması $\varepsilon_0^V = (N/\varepsilon_0)^{1/2}$ şeklinde ve manyetik alan vektörü, $\mathcal{H}(\mathbf{R}, t) [A/m] = \mu_0^A [A] \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) [I/m]$, için yeni ölçeklendirme faktörünün fiziksel boyutunun *amper* [A] olması $\mu_0^A = (N/\mu_0)^{1/2}$ şeklinde yeni fiziksel sabitler belirlenerek Eş. 4’te de görüldüğü gibi sağlanabilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^V &= \sqrt{N / \varepsilon_0} = 3.3607 \times 10^5 \left[\frac{N m}{A s} \equiv V \right] \\ \mu_0^A &= \sqrt{N / \mu_0} = 8.9206 \times 10^2 [A] \end{aligned} \quad (4)$$

Eş. 4’te yeni tanımlanan katsayıların çarpımının, SI birim sisteminde ışık hızını verdiği Eş. 5’te olduğu gibi gösterilerek doğrulama yapılabilir;

$$\mu_0^A \varepsilon_0^V = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2.9979 \times 10^8 [AVN^{-1}] \equiv c [ms^{-1}]. \quad (5)$$

Yeni tanımlanan katsayılar yardımıyla elektrik alan ve manyetik alan vektörleri ölçeklendirme faktörlerinin sayısal değerleri ile birlikte Eş. 6'daki haliyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{R}, t) &= \varepsilon_0^V \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) \cong 3.3607 \times 10^5 \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) \\ \mathcal{H}(\mathbf{R}, t) &= \mu_0^A \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) \cong 8.9206 \times 10^3 \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Tretyakov tarafından önerilen [11] bu ölçeklendirmeye elde edilen yeni $\mathbb{E}(\mathbf{R}, t)$ ve $\mathbb{H}(\mathbf{R}, t)$ vektörel büyüklüklerinin aynı $[m^{-1}]$ fiziksel boyutuna sahip olması Maxwell denklemlerinin simetrik formda yazılabilmesini sağlar. $\mathbb{E}(\mathbf{R}, t)$ ve $\mathbb{H}(\mathbf{R}, t)$ alan vektörleri, ε_0^V ve μ_0^A katsayıları ile birlikte Eş. 2'de ilgili yerlerine yerleştirildiğinde Maxwell denklemleri Eş. 7'deki şekliyle yeni formda elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \\ \nabla \times \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) \end{aligned} \quad (7)$$

Yeni formdaki denklemler için kayıp parametresi olan γ ile σ arasında $\gamma[s^{-1}] = \sigma/(2\varepsilon_0)[m^{-1}]$ ilişkisi vardır.

Eş. 7 ile Maxwell denklemleri Heaviside-Lorentz denklemlerinin sahip olduğu simetrik formda yazılmıştır [12, 13]. SI birim sistemi içerisinde elde edilen Eş. 7, Eş. 2 ile karşılaştırıldığında, Eş. 2'deki ε_0 ve μ_0 evrensel sabitlerinin yerine Eş. 7'de sadece c sabitinin bulunduğu görülür.

3. PROBLEMİN AÇIKLANMASI (STATEMENT OF THE PROBLEM)

3.1. Dalga Kılavuzu Probleminin Açıklanması (Statement of the Waveguide Problem)

Bu çalışmada, S kesit alanı Oz eksenini boyunca regüler ve tek parçalı L sınırı ile kapatılmış mükemmel elektriksel iletkenliğe sahip bir dikdörtgen dalga kılavuzu ele alınmıştır. Oz eksenini boyunca z , L sınırına teğet olarak l ve dalga kılavuzu yüzeyinin normalini doğrultusunda n vektörleri; $z \times l = n$ şeklinde tanımlansın. r vektörü S dalga kılavuzu kesit yüzeyi üzerinde tanımlı ve z ise R vektörünün Oz eksenine izdüşümü olmak üzere dalga kılavuzu içerisindeki bir gözlem noktası $R = r + z z$ şeklinde tanımlanmıştır.

3.2. Problemin Formülasyonu (Formulation of the Problem)

Dalga kılavuzu probleminin çözümü için Eş. 7'deki Maxwell denklemleri ile Eş. 8'de görülen diverjans denklemlerini sağlayan çözüm elde edilmelidir:

$$\nabla \cdot \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) = 0 \text{ ve } \nabla \cdot \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) = \hat{\rho} \quad (8)$$

Burada $\hat{\rho} = \rho/(N/\varepsilon_0)^{1/2}$ yeni formdaki denklemler için elektriksel yük yoğunluğudur.

Probleminin çözümü için ihtiyaç duyulan sınır koşulları da mükemmel elektriksel iletken sınır koşulları olarak formülasyona Eş. 9'daki haliyle ilave edilsin:

$$n \cdot \mathbb{H}|_{r \in L} = 0, \quad l \cdot \mathbb{E}|_{r \in L} = 0, \quad z \cdot \mathbb{E}|_{r \in L} = 0 \quad (9)$$

4. ENİNE – BOYUNA AYRISIMLAR (TRANSVERSE – LONGITUDINAL DECOMPOSITIONS)

Yukarıda R konum vektörünün enine-boyuna ayrışımıyla tanımlanması gibi ∇ operatörü de Eş. 10'daki şekliyle tanımlansın;

$$\nabla = \nabla_{\perp} + z \partial_z \quad (10)$$

Elektrik ve manyetik alan vektörleri de Eş. 10'daki formda, enine-boyuna ayrışım ile Eş. 11'deki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) &= \mathbb{E}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + z \mathbb{E}_z(\mathbf{R}, t) \\ \mathbb{H}(\mathbf{R}, t) &= \mathbb{H}_{\perp}(\mathbf{R}, t) + z \mathbb{H}_z(\mathbf{R}, t) \end{aligned} \quad (11)$$

4.1. Rotasyonel Denklemlerin İzdüşümleri (Projecting of the Curl Equations)

\mathbb{E} ve \mathbb{H} vektörel ifadeleri Eş. 11'deki formda (r, z, t) 'ye bağımlı üç elemanlı $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\perp} + z \mathbb{F}_z$ formunda gösterildiğinde $\nabla \times \mathbb{F}$ rotasyonel ifadesi açık olarak Eş. 12'de görülebilir;

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbb{F}] &= (\nabla_{\perp} + z \partial_z) \times (\mathbb{F}_{\perp} + z \mathbb{F}_z) \\ &= [\nabla_{\perp} \times \mathbb{F}_{\perp}] + [\nabla_{\perp} \times z \mathbb{F}_z] + \partial_z [z \times \mathbb{F}_{\perp}] \end{aligned} \quad (12)$$

Enine ve boyuna rotasyoneller, $[\nabla \times \mathbb{F}]_{\perp}$ ve $[\nabla \times \mathbb{F}]_z$, birbirinden ayrı olarak Eş. 13'teki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbb{F}]_{\perp} &= [\nabla_{\perp} \times z \mathbb{F}_z] + \partial_z [z \times \mathbb{F}_{\perp}] \\ [\nabla \times \mathbb{F}]_z &= \nabla_{\perp} \cdot [\mathbb{F}_{\perp} \times z] \end{aligned} \quad (13)$$

Eş. 12'ye uygun şekilde Eş. 7'deki yeni formdaki Maxwell denklemlerindeki rotasyonel ifadeleri yeniden yazıldığında ilk denklem önce Eş. 14;

$$(\nabla_{\perp} + z \partial_z) \times (\mathbb{H}_{\perp} + z \mathbb{H}_z) = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \quad (14)$$

ardından Eş. 15 şeklinde yazılabilir:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbb{H}_{\perp}) + (\nabla_{\perp} \times z \mathbb{H}_z) + \partial_z (z \times \mathbb{H}_{\perp}) \\ = \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}(\mathbf{R}, t) + 2\gamma \mathbb{E}(\mathbf{R}, t)] \end{aligned} \quad (15)$$

Bu denklem, Eş. 13'te gösterilen şekilde enine ve boyuna denklemlere ayrıldığında Eş. 16'da gösterilen şekilde iki ayrı denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{H}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_{\perp} + 2\gamma \mathbb{E}_{\perp}] \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= -\frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \mathbb{E}_z] \end{aligned} \quad (16)$$

Eş. 7’de görülen ikinci denklem de benzer şekilde enine ve boyuna denklemlere ayrıldığında Eş. 17 denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{E}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{E}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z \end{aligned} \quad (17)$$

4.2. Enine Elektrik Modal Alan Problemi (Transverse Electric (TE) Modal Field Problem)

Enine Elektrik (TE) modal alan probleminin incelenmesi için öncelikle simetrikleştirilmiş Eş. 7’den Maxwell denklemlerinden elde edilmiş olan Eş. 16 ve Eş. 17 denklemleri, Eş. 9’daki mükemmel elektrik iletken sınır koşulları ve Eş. 8’deki diverjans denklemlerinin enine-boyuna ayrışımı bir arada kullanılarak problem bütün hale getirilmelidir. TE-modları için $E_z=0$ olduğundan, H_z elemanını barındıran denklemler kullanılarak Eş. 18’de görülen şekilde bir arada yazılabilirler;

$$\begin{aligned} (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{H}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_{\perp} + 2\gamma \mathbb{E}_{\perp}] \\ \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{E}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbb{H} + \partial_z \mathbb{H}_z &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Burada ilk denklem, Eş. 16’daki ilk denklem, ikinci denklem Eş. 17’deki skaler ikinci denklem, üçüncü denklem enine-boyuna ayrışımı yapılmış diverjans denkleminin \mathbb{H}_z elemanını içeren kısmı, dördüncü ve beşinci denklemler sınır koşullarıdır.

Kolay anlaşılır hale getirmek amacıyla \mathbb{H}_z elemanı sol yanda toplanarak Eş. 18 yeniden düzenlenerek Eş. 19 yazılabilir;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mathbb{H}_z &= \partial_z \mathbb{H}_{\perp} + \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}] + 2\gamma \frac{1}{c} [\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}] \\ \frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_z &= \nabla_{\perp} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) \\ \partial_z \mathbb{H}_z &= -\nabla_{\perp} \cdot \mathbb{H} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

4.3. Enine Manyetik Modal Alan Problemi (Transverse Magnetic (TM) Modal Field Problem)

Enine Manyetik (TM) modal alan problemi için de; Eş. 16 ve Eş. 17 denklemleri, Eş. 8’deki diverjans denklemleri ve Eş. 9’da verilen sınır koşulları kullanılarak problem TM-modu denklem seti elde edilebilir. E_z elemanını barındıran denklemlerin kullanılmasıyla TM-modları için Eş. 20’de görülen denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) &= \frac{1}{c} [\partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \mathbb{E}_z] \\ (\nabla_{\perp} \times \mathbf{z} \mathbb{E}_z) + \partial_z (\mathbf{z} \times \mathbb{E}_{\perp}) &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbb{H}_{\perp} \\ \nabla_{\perp} \cdot \mathbb{E} + \partial_z \mathbb{E}_z &= \hat{\rho}_{\perp} + \mathbf{z} \hat{\rho}_{\perp} \\ \mathbb{E}_z|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

E_z elemanı sol yanda toplanarak Eş. 20 yeniden düzenlenecek olursa Eş. 21’de ifade edilen denklem seti elde edilir;

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \partial_t \mathbb{E}_z + 2\gamma \frac{1}{c} \mathbb{E}_z &= \nabla_{\perp} \cdot (\mathbb{H}_{\perp} \times \mathbf{z}) \\ \nabla_{\perp} \mathbb{E}_z &= \partial_z \mathbb{E}_{\perp} - \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{H}_{\perp}] \\ \partial_z \mathbb{E}_z - \mathbf{z} \hat{\rho}_{\perp} &= -\nabla_{\perp} \cdot \mathbb{E} + \hat{\rho}_{\perp} \\ \mathbb{E}_z|_L &= 0 \\ \mathbf{l} \cdot \mathbb{E}|_L &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{H}|_L &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

5. ZAMAN DOMENİ TE-MODLARI (TIME-DOMAIN TE-MODES)

5.1. Vektörel Modal Baz (Vectorial Modal Basis)

Eş. 19’daki sınır koşulları, enine elemanı Eş. 22’deki gibi kullanmamız gerektiğini söylemektedir;

$$\mathbb{H}_{\perp}^i(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{I}^i(z, t) [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})] \quad (22)$$

Buradaki, potansiyel $\Psi(\mathbf{r})$ ve genlik faktörü $\mathcal{I}^i(z, t)$ bulunması gereken bilinmeyen elemanlardır. $[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})]$ ifadesinin sınır koşullarını sağladığı Eş. 22’nin sınır koşulunda yerine yerleştirilmesi sonucunda Eş. 23’teki gibi gösterilebilir;

$$\mathbf{n} [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r})]|_L \equiv \partial_{\mathbf{n}} \Psi(\mathbf{r})|_L = 0 \quad (23)$$

Elektrik alan elemanın enine ifadesi $\mathbb{E}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t)$ de manyetik ifadeye benzer bir şekilde Eş. 24'de görülebileceği üzere yazılabilir:

$$\mathbb{E}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{V}'(z, t) [\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}]. \quad (24)$$

Buradaki, $\mathcal{V}'(z, t)$ büyüklüğü bulunması gereken bir diğer büyüklüktür. $[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot \mathbf{1}$ ifadesi incelenirse Eş. 25 ifadesinin elde edileceği ve bu ifadenin Eş. 23 ile aynı olduğu görülebilir;

$$[\nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \cdot \mathbf{1} = [\mathbf{z} \times \mathbf{1}] \cdot \nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \quad (25)$$

$\mathbb{H}'_z(\mathbf{r}, z, t)$ elemanı da enine ifadelerle benzer bir şekilde Eş. 26 olarak yazıldığında bir diğer bilinmeyen olarak $A(z, t)$ elemanı görülmektedir,

$$\mathbb{H}'_z(\mathbf{r}, z, t) = A(z, t) [\Psi(\mathbf{r})] \quad (26)$$

Problemin çözümü için, elde edilen bu bilinmeyen elemanların hesaplanması gerekmektedir.

Bilinmeyen genlik faktörleriyle; Eş. 22, Eş. 24 ve Eş. 26'da ifade edilmiş olan \mathbb{H}'_{\perp} , \mathbb{E}'_{\perp} ve \mathbb{H}'_z alan bileşenleri, Maxwell denklemlerinin TE-Modlarında kullanılmak için düzenlenen Eş. 19'daki ikinci ve üçüncü denklemlerde ilgili yerlerine yazılabilir. Bu yerleştirme sonucunda Eş. 27 denklemleri elde edilir,

$$\begin{aligned} \partial_{ct} A(z, t) [\Psi(\mathbf{r})] &= -\mathcal{V}'(z, t) [-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})] \\ \partial_z A(z, t) [\Psi(\mathbf{r})] &= \mathcal{I}'(z, t) [-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (27)$$

Burada $\partial_{ct} = (1/c) \partial_t$ ve $[\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \Psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] = \nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})$ özdeşlikleri kullanılmıştır.

Eş. 23'teki sınır koşulu ve Eş. 27'deki $[-\nabla_{\perp}^2 \Psi(\mathbf{r})]$ ifadesi Eş. 28'de görülen Neumann sınır değer probleminin çözülmesi gerektiğini göstermektedir:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Psi_n(\mathbf{r}) + v_n^2 \Psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \Psi_n(\mathbf{r}) \Big|_{r \in L} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Burada v_n^2 özdeğer, $\Psi_n(\mathbf{r})$ ilgili öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonları belirtir, $n=1, 2, \dots$. Burada \mathcal{N}'_n , ölçeklendirme katsayısı olmak üzere $\Psi_n(\mathbf{r})$ elemanı Eş. 29'daki gibi ölçeklendirilir;

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \mathcal{N}'_n \psi_n(\mathbf{r}) \quad (29)$$

\mathcal{N}'_n ölçeklendirme katsayısının bütün fiziksel boyut özelliklerini üzerinde taşıdığı belirtilecek olursa, ölçeklendirilmiş ψ elemanı boyutsuz bir eleman olur.

Ölçeklendirilmiş Neumann sınır değer problemi Eş. 30'daki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \psi_n(\mathbf{r}) + v_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \Big|_{r \in L} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Buradan; normalizasyon koşulu Eş. 31'de belirtilmektedir,

$$\frac{\mathcal{N}'_n}{S} \int_S |\psi_n(\mathbf{r})|^2 ds = N \rightarrow \mathcal{N}'_n = \sqrt{N / \frac{1}{S} \int_S |\psi_n(\mathbf{r})|^2 ds} \quad (31)$$

Burada S dalga kılavuzunun enine kesit domenidir. Eş. 31'de görülebileceği gibi, normalizasyon koşulunda sağ yan $1/N$, yani 1 *Newton*'a eşittir. Eş. 31 için boyut analizi yapılırsa \mathcal{N}'_n , $v^{-1} N^{1/2}$ fiziksel boyutuna sahiptir.

Eş. 30'daki normalize çözümler $\{\psi_n(\mathbf{r})\}_{n=0}^{\infty}$, Hilbert uzayını tanımlayıp ortonormal olduklarından daha önceden potansiyel olarak ifade edilmiş olan $\Psi(\mathbf{r})$ yerine kullanılabilir. Eş. 27'de $\psi_n(\mathbf{r})$ ifadesi $\Psi(\mathbf{r})$ yerine, $-\nabla_{\perp}^2 \psi_n(\mathbf{r})$ ifadesi de $v_n^2 \psi_n(\mathbf{r})$ yerine kullanıldığında Eş. 32'de görülen genlikler elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_n(z, t) &= -\partial_{ct} h_n(z, t) \\ \mathcal{I}'_n(z, t) &= \partial_z h_n(z, t) \end{aligned} \quad (32)$$

$v_n \neq 0$ durumunda, genlik faktörü $A(z, t)$ Eş. 33'de görülen şekilde ölçeklendirilebilir:

$$A_n(z, t) = v_n h_n(z, t). \quad (33)$$

Eş. 22, Eş. 24 ve Eş. 26'da $\psi_n(\mathbf{r})$ ifadesi $\Psi(\mathbf{r})$ yerine, $v_n h_n(z, t)$ ifadesi de A yerine yerleştirildiğinde, Eş. 34 denklemleri elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}'_{\perp n}(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}'_n(z, t) \mathcal{N}'_n [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r})] \\ \mathbb{E}'_{\perp n}(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}'_n(z, t) \mathcal{N}'_n [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \\ \mathbb{H}'_{zn}(\mathbf{r}, z, t) &= h_n(z, t) \mathcal{N}'_n [v_n \psi_n(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (34)$$

5.2. TE Modal Alanlar (TE Modal Fields)

Eş. 34'te tanımlanan denklemlerden yola çıkarak, \mathbf{r} değişkenine bağlı yeni bir vektör fonksiyon grubu Eş. 35'de tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}'_n(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n \nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbb{E}}'_n(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n [\nabla_{\perp} \psi_n(\mathbf{r}) \times \mathbf{z}] \\ \hat{\mathbb{H}}'_{zn}(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_n v_n \psi_n(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (35)$$

Burada $\hat{\mathbb{H}}'_n(\mathbf{r})$ ve $\hat{\mathbb{E}}'_n(\mathbf{r})$ iki bileşenli enine vektörler, $\hat{\mathbb{H}}'_{zn}(\mathbf{r})$ ise tek bileşenli Oz eksenine doğrultusunda bir vektördür. Eş. 35 ile birlikte oluşturulan bu yeni denklem grubu, dalga

kılavuzu enine kesit domeni S içerisinde bir modal baz oluşturur. TE modal alanları Eş. 35 ile birlikte, Eş. 36’da ifade edilen şekilde tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} \mathbb{H}'_n(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}'_n(z, t) h'_n(\mathbf{r}) + \mathbf{z} h'_n(z, t) \hat{\mathbb{H}}'_{zn}(\mathbf{r}) \\ \mathbb{E}'_n(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}'_n(z, t) \mathbf{e}'_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (36)$$

Eş. 32’de $\mathcal{I}'(z, t)$ ve $\mathcal{V}'(z, t)$ ifadelerinin $h_n(z, t)$ türünden yazılmasının ardından, Eş. 36 denklemlerinde bilinmeyen olarak sadece $h_n(z, t)$ modal genlik elemanı kalmıştır.

5.3. $h_n(z, t)$ Denklemi (The Equation for $h_n(z, t)$)

Eş. 36 ile tanımlanan TE modal alanlarını bulmak için $h_n(z, t)$ modal genlik elemanını tanımlayacak bir denklem elde edilmesi gereklidir. Bu maksatla Eş. 36’da tanımlanan modal alan ifadelerinin, Eş. 19’da TE-modları denklem grubundaki ilk denkleme ilgili yerine koyulması yeterlidir. Böylece Eş. 37 eşitliği elde edilir;

$$\nabla_{\perp} \mathbb{H}'_{nz} = \partial_z \mathbb{H}'_{\perp n} + \frac{1}{c} \partial_t [\mathbf{z} \times \mathbb{E}'_{\perp n}] + 2\gamma \frac{1}{c} [\mathbf{z} \times \mathbb{E}'_{\perp n}] \quad (37)$$

Eş. 35’te ortaya konan modal baz elemanları da kullanılarak elde edilen Eş. 37’de gerekli değişiklikler yapıldığında, h_n modal genlik elemanının genel olarak tanımı Eş. 38’deki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} h_n(z, t) &= \frac{\partial}{v_n \partial z} \frac{\partial}{v_n \partial z} h_n - \frac{\partial}{v_n c \partial t} \frac{\partial}{v_n c \partial t} h_n \\ &- 2 \frac{\gamma}{v_n c} \frac{\partial}{v_n c \partial t} h_n \end{aligned} \quad (38)$$

Burada, boyutsuz zaman; $\tau = v_n c t$, ve boyutsuz z ; $\xi = v_n z$ olarak iki yeni değişken tanımlanabilir. Ayrıca boyutsuz kayıp parametresi $\tilde{\rho} = \gamma / v_n c$ olarak tanımlanır ve $\partial_t = \partial / \partial \tau$, $\partial_z = \partial / \partial \xi$ gösterimi benimsenirse, Eş. 38 yeniden düzenlenerek Eş. 39’daki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned} \partial_{\tau}^2 h_n(\xi, \tau) - \partial_{\xi}^2 h_n(\xi, \tau) + 2\tilde{\rho} \partial_{\tau} h_n(\xi, \tau) \\ + h_n(\xi, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Eş. 39’da elde edilmiş olan konum ve zaman türevli denklem Klein-Gordon denklemi (KGD) [14], telegraf denklemi ya da genelleştirilmiş dalga denklemi olarak bilinmektedir.

$h_n(\xi, \tau) = e^{\tilde{\rho} \tau} \tilde{h}_n(\xi, \tau)$ eşitliği ilgili yerde kullanılarak birinci dereceden zaman türevi denklemden kaldırılabilir. Öncelikle $\partial_{\tau}^2 h_n(\xi, \tau)$ $\partial_{\tau}^2 \tilde{h}_n(\xi, \tau)$ ifadesi, Eş. 40’da görüldüğü şekliyle elde edilir;

$$\partial_{\tau}^2 h_n = e^{-\tilde{\rho} \tau} \partial_{\tau}^2 \tilde{h}_n - 2\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho} \tau} \partial_{\tau} \tilde{h}_n + \tilde{\rho}^2 e^{-\tilde{\rho} \tau} \tilde{h}_n \quad (40)$$

$h_n(\xi, \tau) = e^{\tilde{\rho} \tau} \tilde{h}_n(\xi, \tau)$ eşitliği ve Eş. 40 kullanılarak düzenlemeler yapıldığında $\tilde{h}_n(\xi, \tau)$ için KGD yeni formda Eş. 41 olarak yazılır;

$$\partial_{\tau}^2 \tilde{h}_n(\xi, \tau) - \partial_{\xi}^2 \tilde{h}_n(\xi, \tau) + (1 - \tilde{\rho}^2) \tilde{h}_n(\xi, \tau) = 0 \quad (41)$$

5.4. Evrimsel Denklemlerin TE-Modları İçin Çözümü (Solution of the Evolutionary Equations for the TE Modes)

Eş. 41’in çözülmesiyle $h_n(z, t)$ modal genliklerinin bulunmasının ardından bilinmeyen diğer $\mathcal{I}'(z, t)$ ve $\mathcal{V}'(z, t)$ modal genlikleri Eş. 32’de de görülebileceği gibi, h_n modal genliklerinden faydalanarak Eş. 42’de de görülebileceği üzere bulunabilirler;

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_n(z, t) &= -\frac{\partial}{v_n c \partial t} h_n(z, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial \tau} h_n(\xi, \tau) \\ \mathcal{I}'_n(z, t) &= \frac{\partial}{v_n \partial z} h_n(z, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} h_n(\xi, \tau) \end{aligned} \quad (42)$$

5.5. Yörünge 1’de Gerçek Değerli Çözümler (Real-valued Solutions on Orbit 1)

KGD’nin simetri özellikleri, W.Jr. Miller tarafından grup teorisi kapsamında incelenmiştir [15]. Miller değişkenlerin ayrıştırılması yöntemini kullanarak çeşitli yollarla KGD’ne çözüm sağlayan on bir adet “simetri yörüngesi” bulmuştur. Bu çalışma kapsamında, KGD zaman-harmonik çözümüne denk gelen “yörünge 1” çerçevesinde çözülmektedir. Yörünge 1 için elde edilen çözüm; kompleks değerli eksponansiyel ifadelerin olduğu klasik zaman-harmonik yönteminin aksine gerçek değerli olarak Eş. 43 şeklinde elde edilmektedir [15, 16];

$$h_n(z, t) = \sin(\omega t - \beta z + \mathcal{G}) \exp(-\alpha t) \quad (43)$$

Burada ω değişkeni frekans, $\beta = \pm[(\omega/c)^2 - v_n^2]^{1/2}$ ve \mathcal{G} ise gerçek değerli sayısal bir parametrelerdir. $\mathcal{G} = 0$ geçerlidir. $\beta = 0$ kesim frekansını vermektedir. Eş. 43’teki ifadenin gerçek değerli olarak elde edilmesi ile bu yöntemde enerji özelliklerinin anlık değişimini incelemek mümkün olmuştur.

Miller’in “simetri yörüngeleri” çerçevesinde literatürde, yörünge 1 dışındaki diğer yörüngelere ilişkin sonuçlar da yer almaktadır [17-22].

6. ZAMAN DOMENİ TM-MODLARI (TIME-DOMAIN TM-MODES)

6.1. Vektörel Modal Baz (Vectorial Modal Basis)

Eş. 21’deki sınır koşulları enine elemanı Eş. 44’de görülen şekilde kullanmamızı önerir,

$$\mathbb{E}'_{\perp}(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{V}'(z, t) [\nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})] \quad (44)$$

Buradaki $\Phi(\mathbf{r})$ potansiyeli ve $\mathcal{V}''(z,t)$ genlik faktörü bulunması gereken bilinmeyen elemanlardır. Manyetik alan elemanının enine ifadesi Eş. 45 şeklinde yazılabilir;

$$\mathbb{H}_{\perp}''(\mathbf{r}, z, t) = \mathcal{I}''(z, t) [\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})] \quad (45)$$

Eş. 45'deki $\mathcal{I}''(z,t)$ büyüklüğü bulunması gereken bir diğer büyüklüktür. Boyuna eleman \mathbb{E}_z , Eş. 46'daki gibi ifade edilebilir;

$$\mathbb{E}_z = E(z, t) [\Phi(\mathbf{r})] \quad (46)$$

Buradaki $E(z,t)$, diğer bilinmeyen elemanlar gibi daha sonra bulunacaktır. Eş. 44 ve Eş. 45, Maxwell denklemlerinin TM-Modlarında kullanılmak üzere düzenlenen Eş. 21'deki ilk denklemde ilgili yerlerine yazılırsa Eş. 47 elde edilir;

$$\mathcal{I}''(z, t) \nabla_{\perp}^2 \Phi(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{c} \partial_t E(z, t) + 2\gamma \frac{1}{c} E(z, t) \right] \Phi(\mathbf{r}) \quad (47)$$

Burada, $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})] \times \mathbf{z}] = \nabla_{\perp} \Phi(\mathbf{r})$ eşitliği kullanılmıştır.

$\mathbb{E}_z|_L=0$ sınır koşulu, $\Phi|_L=0$ sonucunu verir. Eş. 47'deki $\nabla_{\perp}^2 \Phi(\mathbf{r})$ ifadesi ile birlikte düşünüldüğünde; κ_n^2 özdeğer ve $\Phi_m(\mathbf{r})$ ilgili öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olmak üzere, Eş. 48'de görülen Dirichlet sınır değer probleminin çözülmesi gerektiği görülebilir;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \Phi_m(\mathbf{r}) + \kappa_m^2 \Phi_m(\mathbf{r}) &= 0, \\ \Phi_m(\mathbf{r})|_L &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

Burada \mathcal{N}'_m ölçeklendirme katsayısı olmak üzere $\Phi_m(\mathbf{r})$ elemanı Eş. 49 şeklinde ölçeklendirilsin,

$$\Phi_m = \mathcal{N}'_m \phi_m \quad (49)$$

Eş. 49'daki ölçeklendirme katsayısının bütün fiziksel boyut özelliklerini üzerinde taşıdığı belirtilecek olursa, ölçeklendirilmiş sonuç olan ϕ elemanı boyutsuz bir eleman olur. Ölçeklendirilmiş Dirichlet sınır değer problemi Eş. 50'deki şekliyle yazılabilir,

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \phi_m(\mathbf{r}) + \kappa_m^2 \phi_m(\mathbf{r}) &= 0, \\ \phi_m(\mathbf{r})|_L &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Buradan, normalizasyon koşulu Eş. 51 şeklinde belirtilebilir,

$$\frac{\mathcal{N}'_m}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds = N \rightarrow \mathcal{N}'_m = \sqrt{N / \frac{1}{S} \int_S |\phi_m(\mathbf{r})|^2 ds} \quad (51)$$

Eş. 51'deki \mathcal{N}'_m , $\kappa_n^2 N^{1/2}$ fiziksel boyutuna sahiptir.

$E(z,t)$ ile ifade edilen genlik elemanı da κ_n ile birlikte Eş. 52'deki gibi ölçeklendirilebilir,

$$E(z, t) = \kappa_m e_m(z, t) \quad (52)$$

Eş. 52'de görüldüğü gibi $E(z,t)$ ifadesi, şu an için bilinmeyen $e_m(z,t)$ ile ifade edilmektedir. Eş. 49'daki ölçeklendirme ve Eş. 50'deki Dirichlet sınır değer problemi kullanılarak, Eş. 46 ve Eş. 47'deki $\Phi(\mathbf{r})$ potansiyel ifadesi yerine $\phi_m(\mathbf{r})$ öz fonksiyonları yerleştirildiğinde Eş. 53 denklemleri elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t) &= \kappa_m e_m \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r}) \\ \mathcal{I}''_m(z, t) &= (-\kappa_m c)^{-1} [\partial_t e_m + 2\gamma e_m] \end{aligned} \quad (53)$$

Böylece, bilinmeyen $\mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t)$ ve $\mathcal{I}''_m(z, t)$ ifadeleri, $e_m(z, t)$ cinsinden ifade edilmiştir.

TM-modları için kullanılan Eş. 21'deki üçüncü denklem, şu an için bilinmeyen ifadeler olan $\mathcal{V}''(z,t)$ ve $e_m(z,t)$ arasında bir ilişki ortaya koymak için kullanılabilir. Normalizasyon koşulu kullanılarak,

$$\mathcal{V}''_m(z, t) = \kappa_m^{-1} \partial_z e_m(z, t) \quad (54)$$

olarak yazılır.

Böylece $\mathcal{V}''_m(z, t)$, $\mathcal{I}''_m(z, t)$ ve $E(z, t)$ bilinmeyenleri, $e_m(z, t)$ cinsinden yazılmıştır. Eş. 44, Eş. 45 ve Eş. 46 denklemleri yeniden yazılacak olursa Eş. 55 elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\perp m}''(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{V}''_m(z, t) \mathcal{N}'_m [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \\ \mathbb{H}_{\perp m}''(\mathbf{r}, z, t) &= \mathcal{I}''_m(z, t) \mathcal{N}'_m [\mathbf{z} \times \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \\ \mathbb{E}_{zm}(\mathbf{r}, z, t) &= \kappa_m e_m \mathcal{N}'_m \phi_m(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (55)$$

Bu denklem seti; $[\mathbf{z} \times [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \times \mathbf{z}]$ ifadesi yerine $[\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})]$ kullanılarak, Eş. 21'deki denklemlerin ikincisinde ilgili yerlerine yerleştirildiğinde Eş. 56 elde edilir;

$$\begin{aligned} \kappa_m e_m \mathcal{N}'_m \nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r}) &= \partial_z \mathcal{V}''_m(z, t) \mathcal{N}'_m [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \\ &+ \frac{1}{c} \partial_t \mathcal{I}''_m(z, t) \mathcal{N}'_m [\nabla_{\perp} \phi_m(\mathbf{r})] \end{aligned} \quad (56)$$

Basitleştirme işlemlerinden sonra Eş. 57 sonucuna ulaşılır,

$$\partial_z \mathcal{V}''_m(z, t) + c^{-1} \partial_t \mathcal{I}''_m(z, t) - \kappa_m e_m(z, t) = 0 \quad (57)$$

Eş. 53'teki $\mathcal{I}''_m(z, t)$ ve Eş. 54'teki $\mathcal{V}''_m(z, t)$ ifadelerini Eş. 57'de yerlerine yerleştirilip gerekli düzenlemeler yapıldığında TM-modları için Eş. 58'de görülen KGD elde edilir.

$$\kappa_m^{-2} \partial_z^2 e_m - (\kappa_m c)^{-2} \partial_t^2 e_m - 2\gamma (\kappa_m c)^{-2} \partial_t e_m - e_m = 0 \quad (58)$$

Eş. 58 yeniden düzenlenip Eş. 59 şeklinde yazılırsa;

$$\partial_\zeta^2 e_m - \partial_\tau^2 e_m - 2\hat{\gamma} \partial_\tau e_m - e_m = 0 \quad (59)$$

Burada $\tau = \kappa_m c t$ ve $\zeta = \kappa_m z$ ve $\hat{\gamma} = \gamma (\kappa_m c)^{-1}$ kayıp parametresidir.

Eş. 55'te tanımlanan denklemler ve Eş. 7e'deki Dirichlet sınır değer problemi bize, Eş. 60'da görülen şekilde modal bazı oluşturur;

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{H}}_m^*(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_m [\mathbf{z} \times \nabla_\perp \phi_n(\mathbf{r})] \\ \hat{\mathbb{E}}_m^*(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_m \nabla_\perp \phi_n(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbb{E}}_{zm}^*(\mathbf{r}) &= \mathcal{N}'_m \kappa_m \phi_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (60)$$

6.2. TM Modal Alanlar (TM Modal Fields)

Eş. 60 ile tanımlanan modal baz elemanları incelendiğinde, $\hat{\mathbb{H}}_m^*(\mathbf{r})$ ve $\hat{\mathbb{E}}_m^*(\mathbf{r})$ iki bileşenli enine vektörler, $\hat{\mathbb{E}}_{zm}^*(\mathbf{r})$ ise tek bileşenli bir vektördür. TM modal alanları $\tau = \kappa_m c t$ ve $\zeta = \kappa_m z$ ölçeklendirmeleri ile birlikte Eş. 61 şeklinde tanımlanabilir,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_m^* &= \mathcal{I}_m^*(\xi, \tau) h_m^*(\mathbf{r}) \\ \mathbb{E}_m^* &= \mathcal{V}_m^*(\xi, \tau) e_m^*(\mathbf{r}) + e_m(\xi, \tau) \hat{\mathbb{E}}_{zm}^*(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (61)$$

6.3. Yörünge 1'de Gerçek Değerli Çözümler (Real-valued Solutions on Orbit 1)

TM-modları için Miller'in "yörünge 1"i kapsamında gerçek değerli çözüm Eş. 62 olarak elde edilmektedir [15, 16];

$$e_m(z, t) = \sin(\alpha t - \beta z + \vartheta) \exp(-\alpha t) \quad (62)$$

Burada; ω değişkeni frekans, $\beta = \pm [(w/c)^2 - v_n^2]^{1/2}$ ve ϑ ise gerçek değerli sayısal bir parametrelerdir. $\vartheta = 0$ geçerlidir. $\beta = 0$ kesim frekansını vermektedir.

7. ENERJİ ÖZELLİKLERİ (ENERGETICAL PROPERTIES)

7.1. Poynting Vektörü ve Enerji Yoğunluğu (Poynting Vector and Energy Density)

Bir elektromanyetik dalganın enerji akış oranı yönü elektromanyetik dalganın ilerleme yönüyle aynı olan Poynting vektörü, $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$, ile tanımlanır. $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$, "birim alan başına güç" ifadesini açıklar. Eş. 6'da görülen ölçeklendirilme işlemi uygulanmış olan alan vektörleri kullanılarak güç akış yoğunluğunu (Poynting vektörünü) tanımlayan denklem Eş. 63'te yazılmıştır;

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = [\mathcal{E} \times \mathcal{H}] = Nc [\mathbb{E} \times \mathbb{H}] \equiv \mathbb{S}(\mathbf{r}, t) \quad (63)$$

\mathbb{S} güç akış yoğunluğunun fiziksel boyutu [$Nms^{-1}m^{-2}$]’dur. Bu boyutun aynı zamanda standart tanım olan *watt /metrekare*’ye karşılık geldiği gösterilebilir; [$Nms^{-1}m^{-2}$] = [$Js^{-1}m^{-2}$] = [Wm^{-2}].

Enerji yoğunluğunun standart olarak tanımı Eş. 64’teki gibi ifade edilir;

$$\mathcal{W}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}) \quad (64)$$

Poynting vektöründe olduğu gibi ölçeklendirilmiş alan vektörleri kullanılarak enerji yoğunluğu denklemi yeniden yazılırsa Eş. 65 elde edilir;

$$\mathbb{W}(\mathbf{r}, t) = \frac{1N}{2} (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E} + \mathbb{H} \cdot \mathbb{H}) \quad (65)$$

Burada $\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)$ enerji yoğunluğunun boyutunun *joule / metreküp* olduğu görülebilir; [Nm^{-2}] = [Nmm^{-3}] = [Jm^{-3}].

Elektromanyetik alan enerjisinin iletim hızı $\mathbb{V}(\mathbf{r}, t)$, Umov teoremine göre [23] Poynting vektörü ve enerji yoğunluğu ile ilişkilidir ve Eş. 66’da görüldüğü şekliyle gösterilir;

$$\mathbb{V}(\mathbf{r}, t) = c \frac{\mathbb{S}(\mathbf{r}, t)}{\mathbb{W}(\mathbf{r}, t)} \quad (66)$$

7.1. TE-Modları için Enerji Özellikleri (Energetical Properties of the TE-Modes)

Eş. 63 ve Eş. 65’de açıklanmış olan enerji özellikleri, Eş. 36’da modal genlikler yardımıyla ifade edilen elektrik ve manyetik alan vektörlerinden faydalanılarak yeniden yazılacak olursa Eş. 67’de görülen denklemler elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}'_n(\mathbf{r}, t) &= Nc [\mathcal{V}'_n(z, t) \mathcal{I}'_n(z, t)] \\ \mathbb{W}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1N}{2} (\mathcal{V}_n'^2(z, t) + \mathcal{I}_n'^2(z, t) + h_n^2(z, t)) \end{aligned} \quad (67)$$

7.2. TM-Modları için Enerji Özellikleri (Energetical Properties of the TM-Modes)

Aynı şekilde; TM-Modları için enerji özellikleri de Eş. 61’de modal genlikler kullanılarak ifade edilen elektrik ve manyetik alan vektörlerinden faydalanılarak Eş. 68 denklemleri elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}'_m(\mathbf{r}, t) &= Nc [\mathcal{V}'_m(z, t) \mathcal{I}'_m(z, t)] \\ \mathbb{W}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1N}{2} (\mathcal{V}_m'^2(z, t) + \mathcal{I}_m'^2(z, t) + e_m^2(z, t)) \end{aligned} \quad (68)$$

8. ENERJİ ÖZELLİKLERİ İÇİN GRAFİKSEL SONUÇLAR
(GRAPHICAL RESULTS FOR THE ENERGETIC PROPERTIES)

Enerji özelliklerinin zamanla değişimine ilişkin grafiksel sonuçlara geçmeden önce; Eş. 43 kullanılarak $h_n(z,t)$ Eş. 42 kullanılarak $\mathcal{I}'_n(z,t)$ ve $\mathcal{V}'_n(z,t)$, Eş. 62, Eş. 53 ve Eş. 54 kullanılarak sırasıyla $e_m(z,t)$, $\mathcal{I}''_m(z,t)$ ve $\mathcal{V}''_m(z,t)$ modal genliklerinin zamanla değişim grafiklerini incelemek mümkündür. Bu kısımda sunulan grafiksel sonuçlar Maplesoft firmasının matematiksel hesaplama programı Maple ile elde edilmiştir. Öncelikle kayıpsız ortamda elde edilmiş olan TE-modu için Yörünge 1 sonuçları incelenecek olursa Şekil 1'de sergilenen modal genliklerin zamanla değişimi elde edilir.

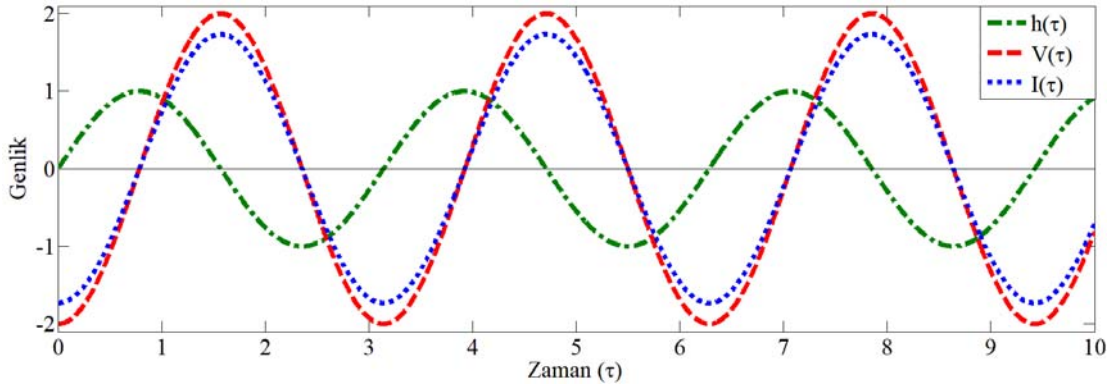
$\mathcal{I}'_n(z,t)$ ve $\mathcal{V}'_n(z,t)$ enine alan genliklerinin maksimum olduğu noktada $h_n(z,t)$ boyuna alan genliğinin minimum olduğu grafikten görülmektedir.

Eş. 68 ve Eş. 66 eşitliklerinden faydalanılarak; $S(r,t)$ güç akış yoğunluğu, $W(r,t)$ enerji yoğunluğu ve $V(r,t)$ enerji iletim hızının zamanla değişimine ilişkin grafikler Şekil 2'de sergilenmiştir. Şekil 2'de büyüklüklerin zamanla değişim gösterdiği görülmektedir. $S(r,t)$ Poynting vektörü, $\mathcal{V}'_n(\tau,\xi)$ ve $\mathcal{I}'_n(\tau,\xi)$ alan vektörlerinin modal genliklerinin çarpımına

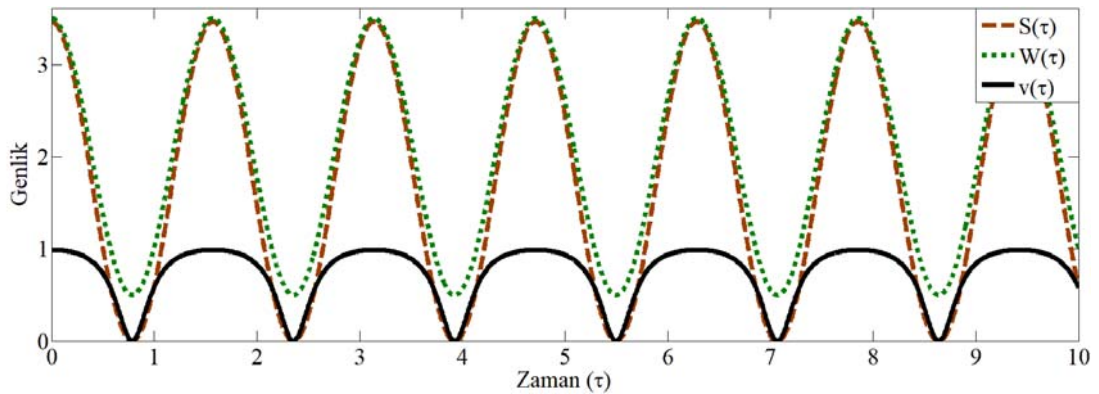
bağlı olduğundan belirli noktalarda sıfır olmaktadır. Şekil 2'de enerji iletim hızının da aynı t anında sıfır olmasının sebebi Eş. 66'dan görülebilir. Ayrıca; enerji iletim hızının c ile normalize edilmiş halinin görüldüğü Şekil 2'den, $V(r,t)$ 'nin hiçbir zaman ışık hızını geçmediği de görülmektedir.

Dalga kılavuzundaki enine ve boyuna alanların enerji yoğunluklarının zamanla değişimini inceleyerek, enerjinin korunumundan istifade ile elde edilen sonuçların doğruluğunu incelemek mümkündür. Bu maksatla enine alanların enerji yoğunluğu farkı için $dW'_n = 1/2[\mathcal{V}'^2_n(\tau,\xi) - \mathcal{I}'^2_n(\tau,\xi)]$ tanımlansın. Boyuna alanların enerji yoğunluğu ise $w'_n = 1/2h^2_n(\tau,\xi)$ ile ifade edilsin. Kayıpsız ortamda genlik maksimum değeri zamanla azalmaksızın, dW'_n enine ve w'_n boyuna alanları arasındaki enerji değişimi Şekil 3'te görülmektedir. Şekil 2'deki enerji iletim hızının sıfır olduğu noktalarda enine alanların enerji yoğunluğunun sıfır olduğu da Şekil 3'te görülmektedir.

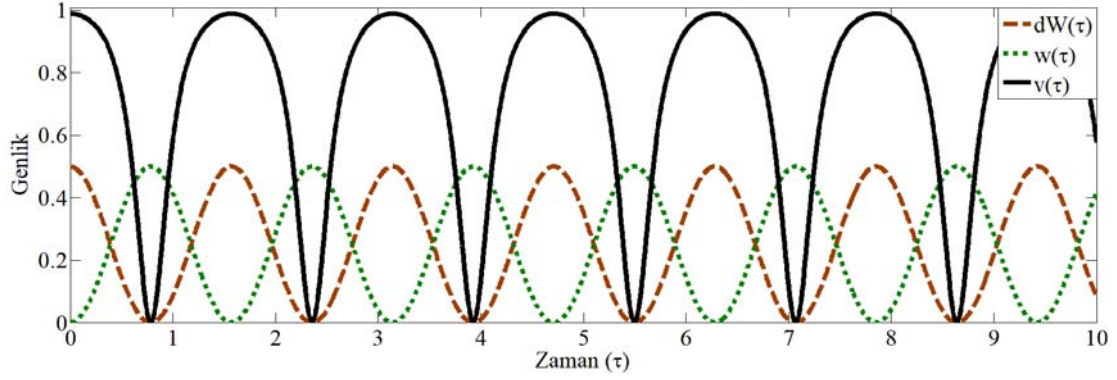
Benzer şekilde, içerisinde kayıplı ortam bulunan dalga kılavuzundaki elektromanyetik alanlara ilişkin genliklerin Eş. 43, Eş. 42, Eş. 68 ve Eş. 66 eşitliklerinden faydalanılarak zamanla değişimleri incelendiğinde; maksimum genlik değerlerinin zamanla azaldıkları Şekil 4 ve Şekil 5'ten, enerji iletim hızının ortamın kayıp parametresinden bağımsız olduğu yine Şekil 5'ten görülmektedir.



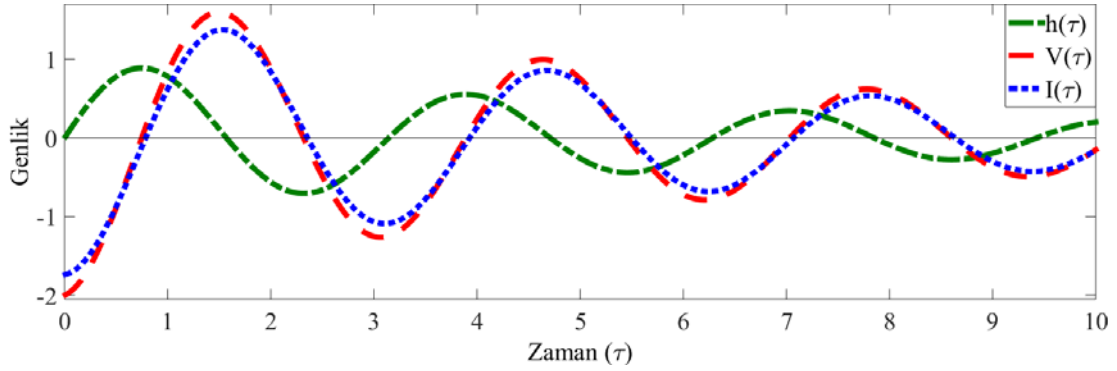
Şekil 1. Kayıpsız dalga kılavuzu için TE-Modu modal genlikler (Modal amplitudes for the TE-modes in lossless waveguide)



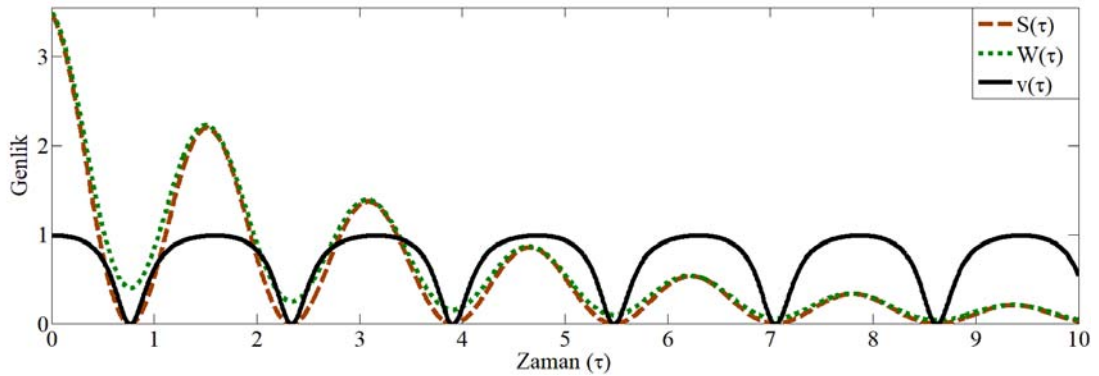
Şekil 2. Kayıpsız dalga kılavuzu için güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerji iletim hızının zamanla değişimi (Time dependence of the power flow density, energy density and velocity of transportation of the modal field energy in lossless waveguide)



Şekil 3. Kayıpsız dalga kılavuzu TE-modları için enine ve boyuna enerji yoğunlukları
(Transverse-longitudinal energy densities for the TE-modes in lossless waveguide)



Şekil 4. TE-modu kayıplı dalga kılavuzu durumu için modal genlikler (Modal amplitudes for the TE-modes in lossy waveguide)



Şekil 5. Kayıplı dalga kılavuzunda güç akış yoğunluğu, enerji yoğunluğu ve enerjinin iletim hızının zamanla değişimi
(Time dependence of the power flow density, energy density and velocity of transportation of the modal field energy in lossy waveguide)

9. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Dalga kılavuzu içerisindeki modların enerji özelliklerine ilişkin önceki çalışmaların büyük kısmı, periyottaki zaman ortalaması cinsinden sonuç elde edilen zaman-harmonik alanlar konseptinde yapılmıştır.

Bu çalışmada, klasik zaman-harmonik çözüm yönteminin aksine dalga kılavuzu problemi için doğrudan zaman domeninde analitik bir çözüm elde edilmiştir. Maxwell denklemleri için kullanılan yeni ölçeklendirme prosedürü ile denklemler Heaviside-Lorentz denklemlerinin simetrik formunda, ancak SI birim sistemi çerçevesinde yazılmıştır.

Dalga kılavuzu içerisindeki modlara ait genlik ve enerji büyüklükleri bu çalışmada önerilen yeni formdaki simetrik denklem çifti kullanılarak elde edilmiştir.

Elektrik ve manyetik alan vektörlerinin fiziksel boyutlarını aynı hale getirerek Maxwell denklemlerinin simetrikleştirilmesi ile elektromanyetik alanların enerji özelliklerinin çalışılmasında kolaylık sağlanmış, bu sayede ileride dalga kılavuzu içerisindeki modların; atalet yoğunluğu, momentum ve açıl momentum gibi mekanik özelliklerinin çalışılabilmesi sırasında $\mathbb{E}(R,t)$ ve $\mathbb{H}(R,t)$ 'ın birbirinden çıkarılabilmesi ve toplanabilmesi için denklemler uygun hale getirilmiştir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Kristensson G., Transient electromagnetic wave propagation in waveguides, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 9 (5-6), 645-671, 1995.
2. Tretyakov O.A., Evolutionary waveguide equations, *Radiotekhnika i Elektronika*, (in Russian), 5 (6), 917-926, 1989; *Soviet Journal on Communication Technology and Electronics*, (English translation), 35 (2), 7-17, 1990.
3. Birkhäuser Mathematics. *Journal of Evolution Equations*. Springer. <http://www.springer.com/birkhauser/mathematics/journal/28>. Erişim tarihi Nisan 8, 2017.
4. Tretyakov O.A., Erden F., Evolutionary Approach to Electromagnetics as an Alternative to the Time Harmonic Field Method, 2012 IEEE AP-S/USNC-URSI, Chicago, IL, USA, July 8-14, 2012.
5. Avcı S.A., Afacan E., Gaussian beam interaction at high frequencies with plasma medium, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 30 (2), 273-280, 2015.
6. Tretyakov O.A., Innovating SI Units in Maxwell's Equations. Evolutionary Approach to Electrodynamics as an Alternative to the Time-Harmonic Field Concept, URSI AT-RASC 2018, Gran Canaria, Spain, 2018.
7. Erden F., Evolutionary Approach to Solve a Novel Time-Domain Cavity Problem, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 65 (11), 5918-5931, 2017.
8. Tretyakov O.A., Erden F., Cosan A.A., Inertial Properties of the TE Waveguide Fields, *PIER M*, 68, 11-19, 2018.
9. Erden F., Study of the Surge Signals in a Plasma-Filled Rectangular Cavity," *Physics of Wave Phenomena*, 26 (2), 139-149, 2018.
10. Thompson A. ve Taylor B.N., Guide for the Use of the International System of Units (SI), NIST Special Publication 811, US National Institute of Standards and Technology, 2008.
11. Tretyakov O.A., Factorizing physical dimensions of the quantities ingressed in Maxwell's equations in SI units, *Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS-2017)*, St Petersburg, Russia, May 2017.
12. Heaviside O., *Electromagnetic Theory*, The Electrician Pub. Co., London, 2, 1899.
13. Lorentz H.A., *The Theory of Electron*, B.G. Teubner, Leipzig, 1916.
14. Kragh H., Equation with the many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926, *Am. J. Phys.*, 52 (11), 1024-1033, 1984.
15. Miller W.Jr., *Symmetry and separation of variables*, Addison-Wesley Publication Co., Massachusetts, USA, 1977.
16. Polyanin A.D., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.
17. Aksoy S., Tretyakov O.A., Evolution equations for analytical study of digital signals in waveguides, *JEMWA*, 17 (12), 1665-1682, 2003.
18. Tretyakov O.A., Akgun O., Derivation of Klein-Gordon equation from Maxwell's equations and study of relativistic time-domain waveguide modes, *PIER*, 105, 171-191, 2010.
19. Tretyakov O.A., Kaya M., The real-valued time-domain TE-modes in lossy waveguides, *PIER*, 127, 405-426, 2012.
20. Tretyakov O.A., Kaya M., Time-domain real-valued TM-modal waves in lossy waveguides, *PIER*, 138, 675-696, 2013.
21. İsik Ö., Koçak Z.F., Eroglu E., The Investigation of surplus of energy and signal propagation at time-domain waveguide modes, *Applications and Applied Mathematics*, 9 (2), 637-645, 2014.
22. Akgun O., Tretyakov O.A., Solution to the Klein-Gordon equation for the study of time-domain waveguide fields and accompanying energetic processes, *IET MAP*, 9 (12), 1337-1344, 2015.
23. Umov N.A., Ein Theorem über die Wechselwirkung in endlichen Entfernungen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 19, 97-114, 1874.