EÜFBED - Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt-Sayı: 3-2 Yıl: 2010 199-206

İKİNCİ MERTEBEDEN BİR DİFERENSİYEL DENKLEM SINIFI İÇİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİNİN DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE TAM ÇÖZÜMLERİ

THE EXACT SOLUTIONS OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD

Vedat Suat ERTÜRK[1*]

[1]*Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55139, Samsun*

Geliş Tarihi: 08 Ekim 2010 **Kabul Tarihi:** 29 Kasım 2010

ÖZET

Bu çalışmada ikinci mertebeden bir lineer adi diferensiyel denklem sınıfı için başlangıç değer probleminin diferensiyel dönüşüm yöntemi olarak bilinen nispeten yeni bir seri çözüm yöntemi ile çözümlerinin bulunması ele alındı.Yöntem matematiksel fiziğin üç farklı denklemine uygulandı ve tam çözümler elde edildi.

Anahtar kelimeler: Diferensiyel dönüşüm, Taylor serisi, Analitik çözüm, Başlangıç değer problemi

ABSTRACT

In this paper, the solutions of the initial value problem for a class of second-order differential equations are obtained via a recently new series solution method, the so-called differential transform method. The method is applied to three different problems of Mathematical Physics .The exact solutions are obtained.

Keywords: Differential transform, Taylor series, Analytical solution, Initial value problem

1. GİRİŞ

Bilim ve mühendislik alanında karşılaşılan bir çok fiziksel problem ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemi olarak karşımıza çıkar (Davis, 1962; Groswald, 1978). Son yıllarda bu tür başlangıç değer problemlerinin çözümleri ile ilgili olarak bazı çalışmalarda özel ikinci mertebeden

*Sorumlu yazar: vserturk@yahoo.com

adi diferensiyel denklemlerin bir çok çözümleri elde edilmiştir (Hosseini and Nasabzadeh, 2007; Wazwaz, 2009).

Bu çalışmada

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=f(x),\ x>x_0 \tag{1}$$

$$y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta \tag{2}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınacaktır (Bougoffa, 2009). Burada, $p(x)\in C^1([x_0,L])$ $q(x),r(x)$ ve $f(x)$ sürekli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların sürekli olduğu aralıkdaki bütün x değerleri için $p(x)\neq 0$ dır.

Diferensiyel dönüşüm metodu sırasıyla Lane-Emden tip başlangıç-değer problemlerine ve 10. mertebeden sınır-değer problemlerine uygulandı (Ertürk, 2007; Ertürk and Momani, 2007). Bu çalışmada (1)-(2) probleminin ortaya çıkardığı diğer bir tip denklem sınıfı ve bu sınıfa ait bilim ve mühendislikte önemli yer teşkil eden Hipergeometrik Denklem, Euler Denklemi ve Legendre Denklemlerinin bazı tam çözümleri alternatif bir yöntem olarak diferensiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak elde edildi.

Diferensiyel dönüşüm yöntemi ilk defa elektrik devre analizinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanıldı (Pukhov, 1978; Zhou, 1986). Bu yöntem polinom formda çözümler sunar ve Taylor seri yönteminde olduğu gibi türevlerin sembolik olarak hesaplanmasını içermez. Bilindiği gibi mertebe büyüdükçe Taylor seri yönteminde veri fonksiyonuna bağlı olarak türev alma işlemi hesaplama açısından oldukça işlem fazlalığı ortaya çıkarır.Oysa diferensiyel dönüşüm yöntemi sadece kuvvet serisindeki katsayıların ardışık olarak hesaplanmasını içerir. Bu yöntem ile başlangıç ve sınır değer problemlerinin yüksek kesinlikte yaklaşık veya tam çözümlerini bulmak mümkündür.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Diferensiyel Dönüşüm:

$f(x)$ bir D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve $x_0 \in D$ olsun. T diferensiyel dönüşüm işlemini göstermek üzere $f(x)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü $F(k)$,

$$F(k) = T[f(x)] = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} \tag{3}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Ters diferensiyel dönüşüm:

$F(k)$ fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşümü ise

$$f(x) = T^{-1}[F(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} F(k)(x-x_0)^k \tag{4}$$

şeklinde tanımlanır.

(3), (4) de yerine konursa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} .(x-x_0)^k + R_N \tag{5}$$

yazılabilir. Burada R_N,

$$R_N = \left(\frac{d^{N+1} f(x)}{dx^{N+1}}\right)_{x=\xi} . \frac{(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!} \tag{6}$$

ile tanımlı olup, N, $f(x)$ in Taylor seri açılımında göz önüne alınacak terim sayısı ve $x < \xi < x_0$ dır. Diferensiyel dönüşümün bazı özellikleri Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1. Diferensiyel dönüşümün bazı özellikleri

Esas fonksiyon	Dönüşmüş fonksiyon
$f(x)=u(x)\pm v(x)$	$F(k)=U(k)+V(k)$
$f(x)=\alpha u(x)$	$F(k)=\alpha U(k)$
$f(x)=u(x)v(x)$	$F(k)=\sum_{l=0}^{k}U(l)V(k-l)$
$f(x)=\dfrac{d^m u(x)}{dx^m}$	$F(k)=(k+1)(k+2)\ldots(k+m)U(k+m)$
$f(x)=x^m$	$F(k)=\delta(k-n)\,,\delta(k-n)=\begin{cases}1, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$

3. BULGULAR

Örnek 1. Dejenere Hipergeometrik Denklem(Bougoffa, 2009)

İlk olarak

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b-x}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0,\ \ x>0 \qquad (7)$$

$$y(0)=1,\ \ y'(0)=-\frac{1}{b} \qquad (8)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. (7) eşitliği x ile çarpılırsa

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(b-x)\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (9)$$

bulunur. Diferensiyel dönüşümün Tablo 1 de verilen özellikleri kullanılarak (9) eşitliğinin diferensiyel dönüşümü alınırsa

$$\sum_{l=0}^{k}\delta(l-1)(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)+\sum_{l=0}^{k}[b\delta(l)-\delta(l-1)](k-l+1)Y(k-l+1)+Y(k)=0 \quad (10)$$

yada

$$\sum_{l=0}^{k}[\delta(l-1)(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)+[b\delta(l)-\delta(l-1)](k-l+1)Y(k-l+1)]+Y(k)=0 \quad (11)$$

olacağından

$$Y(k+1)=\frac{(k-1)Y(k)}{(k+1)(k+b)} \quad (12)$$

tekrar bağıntısı elde edilir. (3) eşitliği kullanılarak (8) başlangıç şartlarının dönüşümü

$$Y(0)=1, Y(1)=-\frac{1}{b} \quad (13)$$

olarak bulunur. (12) eşitliğinde $k=1$ alınırsa $Y(2)=0$ bulunur. Yine (12) eşitliğinde $k=2$ alınırsa $Y(2)=0$ olduğundan $Y(3)=0$ bulunur. Aynı işlem takip edilirse $k\geq 2$ için $Y(k)=0$ olduğu görülür. Şu halde (4) eşitliğinden

$$y(x)=1-\frac{1}{b}x \quad (14)$$

yada

$$y(x)=\frac{b-x}{b} \quad (15)$$

elde edilir. Bougoffa(2009) da elde edilen çözüm (15) ile aynıdır.

***Örnek* 2.** Euler Denklemi (Bougoffa, 2009)

İkinci olarak

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y=3x^2,\ x>1 \quad (16)$$

$$y(1)=1,\ y'(1)=2 \quad (17)$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım.(16) eşitliğinin diferensiyel dönüşümü alınırsa

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{2}{l}(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)+\sum_{l=0}^{k}\binom{1}{l}(k-l+1)Y(k-l+1)-Y(k)=3\binom{2}{k} \quad (18)$$

yada

$$\sum_{l=0}^{k}\left[\binom{2}{l}(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)+\binom{1}{l}(k-l+1)Y(k-l+1)\right]-Y(k)=3\binom{2}{k} \quad (19)$$

olacağından

$$Y(k+2)=\frac{3\binom{2}{k}-Y(k+1)(2k+1)(k+1)-(k-1)(k+1)Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad (20)$$

bulunur. (3) eşitliği kulllanılırsa (17) şartlarının dönüşümü

$$Y(0)=1, Y(1)=2 \quad (21)$$

şeklinde olur. (20) eşitliğinde $k=0$ alınırsa $Y(2)=1$ bulunur. Yine (20) eşitliğinde $k=1$ alınırsa $Y(3)=0$ bulunur. Aynı işlem takip edilirse $k\geq 3$ için $Y(k)=0$ olduğu görülür. Şu halde (4) eşitliğinden

$$y(x)=1+2(x-1)+(x-1)^2 \quad (22)$$

yada

$$y(x)=x^2 \quad (23)$$

elde edilir. Bougoffa(2009) da elde edilen çözüm (23) ile aynıdır.

Örnek 3. Legendre Denklemi (Bougoffa, 2009)

Son olarak

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1-x^2}y=\frac{2}{1-x^2},\ x>-1 \quad (24)$$

$$y(-1)=2,\ y'(-1)=-1 \quad (25)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. (24) eşitliği $1-x^2$ ile çarpılırsa

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=2 \tag{26}$$

bulunur. (26) eşitliğinin diferensiyel dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}&(k+1)(k+2)Y(k+2)-\sum_{l=0}^{k}\binom{2}{l}(-1)^{2-l}(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)\\&-2\sum_{l=0}^{k}\binom{1}{l}(-1)^{1-l}(k-l+1)Y(k-l+1)+2Y(k)=2\binom{0}{k}(-1)^{-k}\end{aligned} \tag{27}$$

yada

$$\begin{aligned}&(k+1)(k+2)Y(k+2)\\&-\sum_{l=0}^{k}\left[\binom{2}{l}(-1)^{2-l}(k-l+1)(k-l+2)Y(k-l+2)-2\binom{1}{l}(-1)^{1-l}(k-l+1)Y(k-l+1)\right]\\&+2Y(k)=2\binom{0}{k}(-1)^{-k}\end{aligned} \tag{28}$$

olacağından

$$Y(k+1)=\frac{(k-1)(k+2)Y(k)+2\binom{0}{k}(-1)^{-k}}{2(k+1)^2} \tag{29}$$

bulunur. (3) eşitliği kulllanılırsa (25) şartlarının dönüşümü

$$Y(0)=2, Y(1)=-1 \tag{30}$$

şeklinde olur. (29) eşitliğinde $k=1$ alınırsa $Y(2)=0$ bulunur. Yine (29) eşitliğinde $k=2$ alınırsa $Y(3)=0$ bulunur. Aynı işlem takip edilirse $k\geq 2$ için $Y(k)=0$ olduğu görülür. Şu halde (4) eşitliğinden

$$y(x)=2-1(x+1) \tag{31}$$

yada

$$y(x)=1-x \tag{32}$$

elde edilir. Bougoffa(2009) da elde edilen çözüm (32) ile aynıdır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Diferensiyel dönüşüm yöntemi ile ikinci mertebeden bir adi diferensiyel denklem sınıfı için bazı tam çözümler başarılı bir şekilde elde edildi. Yöntemin bu türden problemlerin çözümü için kuvvetli bir yöntem olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

Bougoffa, L. (2009). On the exact solutions for initial value problems of second-order differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 22(8), 1248-1251.

Davis, H.T. (1962). *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, New York.

Ertürk, V.S. (2007). Differential transformation method for solving differential equations of Lane-Emden type, *Mathematical and Computational Applications*, 12(3), 135-139.

Ertürk, V.S., Momani, S. (2007). A reliable algorithm for solving tenth-order boundary value problems, *Numerical Algorithms*, 44(2), 147-158.

Groswald, E. (1978). *Bessel Polynomials*, Springer, Berlin.

Hosseini, M.M., Nasabzadeh, H. (2007). Modified Adomian decomposition method for specific second order ordinary differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 186(1) ,117-123.

Pukhov, G.E.(1978). Computational structure for solving differential equations by Taylor transformations, *Cybernetics and Systems Analysis*, 14(3), 383-390.

Wazwaz, A.M. (2009)The variational iteration method for analytic treatment for linear and nonlinear ODEs, *Applied Mathematics and Computation*, 212(1), 120-134.

Zhou, J.K. (1986). *Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits*, Huazhong University Press, Wuhan, China.