EÜFBED - Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt-Sayı: 5-1 Yıl: 2012 *85-102*

BİR SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN GREEN FONKSİYONU, RESOLVENT OPERATÖRÜ VE KENDİNE EŞLENİKLİĞİ

THE GREEN'S FUNCTİON, RESOLVENT OPERATOR AND SELF-ADJOINTNESS OF ONE DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE PROBLEM

F. Ş. MUHTAROV[1], Nihat ALTINIŞIK[2] ve Mahir KADAKAL[3*]

[1] *Bakü Devlet Üniversitesi, Azerbaycan*
[2] *Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Samsun*
[3] *Ahi Evran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırşehir*

Geliş Tarihi: 18 Ocak 2011 **Kabul Tarihi:** 07 Mayıs 2012

ÖZET

Bu makalede, sınır şartlarının her ikisinde özdeğer parametresi bulunduran bir süreksiz Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Problemin Green fonksiyonu ve resolvent operatörü bulunmuş, ayrıca kendine-eşlenikliği ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: *Sturm-Liouville problemi, Green fonksiyonu, Resolvent operatörü*

ABSTRACT

In this study, some spectral properties of one discontinuous Sturm-Liouville problem with eigenvalue parameter in the both boundary conditions are considered. We derive the Green's function and Resolvent operator. In addition, it is proved the self-adjointness of the considered problem.

Keywords: *Sturm-Liouville problem, Green's function, Resolvent operator*

1. GİRİŞ

Sturm-Liouville Teorisinin matematiksel fizikteki birçok problemin çözümünde önemli bir rol oynadığı bilinmektedir. Bu yüzden Sturm-Liouville Teorisi teorik ve uygulamalı matematiğin en güncel ve gelişim gösteren alanlarından biridir. Özellikle son yıllarda

[*] Sorumlu yazar: mkadakal@ahievran.edu.tr

sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin araştırıldığı birçok makale ve kitap yazılmıştır(bakınız, örneğin, Akdoğan, Z., Demirci, M., and Mukhtarov, O. Sh. 2007; Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., 1997; Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., 2002; Boumenir, A. 2005; Fulton, 1977; Hinton, 1979; Mukhtarov, O. Sh., 1994; Mukhtarov, O. S., Kadakal, M. and Altınısık, N., 2003; Mukhtarov O. Sh. and Tunç E., 2004; Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Muhtarov, F. S. 2004; Schneider, 1974; Shkalikov, 1983; Walter, J. 1973; Yakubov, S. ve Yakubov, Y. 2000; Yang, Qiuxia, 2011; Yang Qiuxia and Wanyi Wang, 2010; Wang Guixia, Sun Jiong, 2008; Zayed ve İbrahim, 1992). Bu makalede,

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u, \qquad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{1}$$

Sturm-Liouville denkleminden, özdeğer parametresine bağlı

$$L_1 u := \lambda(\beta_1' u(-1) - \beta_2' u'(-1)) + \beta_1 u(-1) - \beta_2 u'(-1) = 0\,, \tag{2}$$

$$L_2 u := \lambda(\beta_3' u(1) - \beta_4' u'(1)) + \beta_3 u(1) - \beta_4 u'(1) = 0 \tag{3}$$

sınır şartlarından ve

$$L_3 u := u(0-) - \delta u(0+) = 0 \tag{4}$$

$$L_4 u := u'(0-) - \delta u'(0+) = 0\,, \tag{5}$$

geçiş şartlarından meydana gelen sınır-değer-geçiş problemini inceleyeceğiz. Burada λ kompleks özdeğer parametresidir; reel değerli $q(x)$ fonksiyonu $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında süreklidir ve sonlu $q(0\pm) = \lim_{x \to 0^{\pm}} q(x)$ limitlerine sahiptir; δ , $\beta_i, \beta_i', (i = 1,2,3,4)$ reel sayılardır. Ayrıca

$$\delta > 0 \;\; ve \;\; \rho_j := (-1)^j (\beta_{2j-1}' \beta_{2j} - \beta_{2j}' \beta_{2j-1}) > 0, \;\; j = 1,2\,. \tag{6}$$

olduğunu kabul edeceğiz.

2.PROBLEMİN TEMEL ÇÖZÜMLERİNİN TANIMLANMASI VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Tunç ve Mukhtarov (2004) makalesindeki yöntem aynen uygulanarak aşağıdaki Lemma ispatlanabilir.

Lemma. *Reel değerli* $q(x)$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında sürekli olsun ve* $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ *tam fonksiyonları verilsin. Bu durumda her* $\lambda \in \mathbb{C}$ *için*

$$-u'' + q(x)u = \lambda u$$

denklemi

$$u(a) = f(\lambda), \quad u'(a) = g(\lambda) \qquad (\text{veya } u(b) = f(\lambda), \quad u'(b) = g(\lambda))$$

başlangıç şartlarını sağlayan tek bir $u = u(x,\lambda)$ *çözümüne sahiptir. Üstelik, her sabit* $x \in [a,b]$ *için* $u = u(x,\lambda)$, λ *'nın tam fonksiyonudur.*

Bu Lemma gereği $[-1,0]$ aralığı üzerinde (1) denkleminin

$$u(-1) = \lambda\beta_2' + \beta_2\,, \ u'(-1) = \lambda\beta_1' + \beta_1 \tag{7}$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\phi_{1\lambda}(x) := \phi_1(x,\lambda)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her sabit $x \in [-1,0]$ için λ 'nın tam fonksiyonudur. Yine aynı Lemma gereği (1) nolu denklemin [0,1] aralığında

$$u(0) = \delta^{-1}\phi_1(0,\lambda)\,, \ u'(0) = \delta^{-1}\phi_1'(0,\lambda)\,. \tag{8}$$

başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\phi_{2\lambda}(x) := \phi_2(x,\lambda)$ çözümü mevcuttur ve bu çözüm her sabit $x \in [0,1]$ için λ 'nın tam fonksiyonudur. Sonuç olarak,

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}(x), \ x \in [-1,0) \\ \phi_{2\lambda}(x), \ x \in (0,1] \end{cases}$$

eşitliği ile $[-1,0) \cup (0,1]$ üzerinde tanımlanan $\phi_\lambda(x) := \phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1) denkleminin hem (4) ve (5) geçiş şartlarını hem de (2) sınır şartını sağlayan bir çözümü olacaktır. Benzer şekilde, $[0,1]$ üzerinde (1) denkleminin

$$u(1) = \lambda\beta_4' + \beta_4, \quad u'(1) = \lambda\beta_3' + \beta_3. \tag{9}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\chi_{2\lambda}(x) := \chi_2(x,\lambda)$ olsun. Bu çözümü tanımladıktan sonra, $[-1,0]$ üzerinde (1) denkleminin

$$u(0) = \delta\chi_{2\lambda}(0,\lambda), \quad u'(0) = \delta\chi_{2\lambda}'(0,\lambda). \tag{10}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_{1\lambda}(x) := \chi_1(x,\lambda)$ ile göstereceğiz. Sonuç olarak,

$$\chi_\lambda(x) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x), & x \in [-1,0) \\ \chi_{2\lambda}(x), & x \in (0,1] \end{cases}$$

eşitliği ile $[-1,0) \cup (0,1]$ üzerinde tanımlanan $\chi_\lambda(x) := \chi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1)'in hem (4) ve (5) geçiş şartlarını hem de (3) sınır şartını sağlayan çözümü olacaktır. Diğer taraftan lineer diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen bir teorem gereği (bak mesela William E. Boyce, Richard C. DiPrima, 2001) $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının Wronskian'ı x-den bağımsız olduğundan sadece λ parametresine bağlı

$$\omega_j(\lambda) := W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) = \phi_{j\lambda}(x)\chi_{j\lambda}'(x) - \phi_{j\lambda}'(x)\chi_{j\lambda}(x), \; x \in I_j, \; j = 1,2. \tag{11}$$

fonksiyonlarını tanımlayabiliriz; burada $I_1 =: [-1,0]$ ve $I_2 =: [0,1]$ gösterilmiştir.

Lemma. *Her bir* $\lambda \in \mathbb{C}$ *için* $\omega_1(\lambda) = \delta^2\omega_2(\lambda)$ *eşitliği geçerlidir.*

İspat: (11) Wronskian'ları x-den bağımsız oldukları için (8) ve (10) eşitliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} \omega_1(\lambda) &= \phi_{1\lambda}(0)\chi_{1\lambda}'(0) - \phi_{1\lambda}'(0)\chi_{1\lambda}(0) \\ &= [\delta\phi_{2\lambda}(0)][\delta\chi_{2\lambda}'(0)] - [\delta\phi_{2\lambda}'(0)][\delta\chi_{2\lambda}(0)] \\ &= \delta^2[\phi_{2\lambda}(0)\chi_{2\lambda}'(0) - \phi_{2\lambda}'(0)\chi_{2\lambda}(0)] \\ &= \delta^2\omega_2(\lambda) \end{aligned}$$

İspat bitti.

$\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\omega(\lambda) := \omega_1(\lambda) = \delta^2 \omega_2(\lambda). \tag{12}$$

Teorem. *(1)-(5) probleminin özdeğerleri ile $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları çakışır.*

İspat: $\omega(\lambda_0) = 0$ olsun. O zaman $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının her birinde

$$W(\phi_{\lambda_0}, \chi_{\lambda_0}; x) = 0$$

olacaktır. O halde Wronskian'ın iyi bilinen özelliği gereği hem $\phi_{1\lambda_0}(x), \chi_{1\lambda_0}(x)$ fonksiyonlar çifti hem de $\phi_{2\lambda_0}(x), \chi_{2\lambda_0}(x)$ fonksiyonlar çifti lineer bağımlı olacaktır. Bu durumda

$$\chi_{1\lambda_0}(x) = k_1 \phi_{1\lambda_0}(x) \quad ve \quad \chi_{2\lambda_0}(x) = k_2 \phi_{2\lambda_0}(x) \tag{13}$$

olacak biçimde $k_1 \neq 0$ *ve* $k_2 \neq 0$ sabitleri mevcut olacaktır. (13)-deki birinci eşitlik gereği $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonu (2) nolu sınır şartını da sağlayacaktır. Dolayısıyla $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonu (1)-(5) sınır değer probleminin özfonksiyonu olacaktır. Böylece ispat etmiş olduk ki $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun her sıfır yeri aynı zamanda (1)-(5) sınır değer probleminin bir özdeğeridir. Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Bunu aksini kabul etme yöntemi ile ispat edeceğiz. Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğer, $u_0(x)$ ise λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun, fakat $\omega(\lambda_0) \neq 0$ olsun. O zaman $\omega_1(\lambda_0) \neq 0$ ve $\omega_2(\lambda_0) \neq 0$ olacağından $\phi_{1\lambda_0}, \chi_{1\lambda_0}$ ve $\phi_{2\lambda_0}, \chi_{2\lambda_0}$ fonksiyonları sırasıyla $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıkları üzerinde lineer bağımsız olacaktır. Böylece (1) nolu denklemin $u_0(x)$ çözümü c_1, c_2, c_3, c_4 sabitlerinin en azından birisi sıfırdan farklı olmak üzere

$$u_0(x)=\begin{cases} c_1\phi_{1\lambda_0}(x)+c_2\chi_{1\lambda_0}(x), & x\in[-1,0) \\ c_3\phi_{2\lambda_0}(x)+c_4\chi_{2\lambda_0}(x), & x\in(0,1] \end{cases}$$

formunda gösterilebilir. Diğer taraftan, $u_0(x)$ fonksiyonu bir özfonksiyon olduğundan dolayı

$$L_i(u_0(x))=0,\ \ (i=1,2,3,4) \tag{14}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu eşitlikleri c_1,c_2,c_3,c_4 değişkenlerinin homojen lineer denklem sistemi olarak yazarak ve (8), (10) ve (11)'i göz önüne alarak bu sistemin determinantını

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_1(\lambda_0) & 0 & 0 \\ \phi_{1\lambda_0}(0) & \chi_{1\lambda_0}(0) & -\delta\phi_{2\lambda_0}(0) & -\delta\chi_{2\lambda_0}(0) \\ \phi'_{1\lambda_0}(0) & \chi'_{1\lambda_0}(0) & -\delta\phi'_{2\lambda_0}(0) & -\delta\chi'_{2\lambda_0}(0) \\ 0 & 0 & \omega_2(\lambda_{0)} & 0 \end{vmatrix} = -\delta^2\omega_1(\lambda_0)\omega_2^2(\lambda_0)$$

şeklinde buluruz. (14) denklem sisteminin aşikar olmayan çözümü bulunduğundan determinantı sıfıra eşit olur, yani $\omega(\lambda_0)=0$ elde edilir. Bu çelişkiden dolayı ispat bitti.

Lemma. *Eğer $\lambda=\lambda_0$ özdeğer ise o zaman $\phi(x,\lambda_0)$ ve $\chi(x,\lambda_0)$ lineer bağımlıdır.*

İspat: $\lambda=\lambda_0$ özdeğer olsun. O halde önceki teorem gereği $\omega_1(\lambda_0)=0$ ve $\omega_2(\lambda_0)=0$ olacağından (13) eşitliklerini sağlayan $k_1\neq 0$ ve $k_2\neq 0$ vardır. $k_1=k_2$ olduğunu göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki $k_1\neq k_2$ olsun. $\phi_{j\lambda_0}(x)$, $\chi_{j\lambda_0}(x)$ çözümlerinin tanımlarını dikkate alarak (13)'den

$$L_3(\chi_{\lambda_0})=\delta(k_1-k_2)\phi_{2\lambda_0}(0)$$

elde ederiz. $L_3(\chi_{\lambda_0})=0$ ve $\delta(k_1-k_2)\neq 0$ olduğundan

$$\phi_{2\lambda_0}(0)=0. \tag{15}$$

elde edilir. Aynı işlemleri $L_4(\chi_{\lambda_0})=0$ eşitliğine uygulayarak

$$\phi'_{2\lambda_0}(0)=0. \tag{16}$$

elde ederiz. $\phi_{2\lambda_0}(x)$, (15) ve (16) şartlarını sağlayan ve $[0,1]$ üzerinde (1)'in bir çözümü olmasından dolayı çözümün tekliği özelliği gereği aynı aralık üzerinde $\phi_{2\lambda_0}(x)=0$ olur. (10), (15) ve (16)'yı kullanarak

$$\phi_{1\lambda_0}(0)=\phi'_{1\lambda_0}(0)=0$$

elde ederiz. $\phi_{2\lambda_0}(x)$ için uygulanan yöntemin aynısı ile $[-1,0]$ üzerinde $\phi_{1\lambda_0}(x)=0$ elde edilir. Yani $[-1,0)\cup(0,1]$ üzerinde $\phi(x,\lambda_0)=0$ olur. Fakat bu (7) ile çelişir. İspat bitti.

Sonuç. *Eğer $\lambda=\lambda_0$ bir özdeğer ise o zaman hem $\phi_{\lambda_0}(x)$ hem de $\chi_{\lambda_0}(x)$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olacaktır.*

Lemma. *Her λ_0 özdeğeri $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun basit sıfırıdır.*

İspat: İyi bilinen Lagrange formülü (Naimark, 1967) kullanılarak, herhangi λ için

$$(\lambda-\lambda_0)\left(\int_{-1}^{0}\phi_\lambda(x)\phi_{\lambda_0}(x)dx+\delta^2\int_{0}^{1}\phi_\lambda(x)\phi_{\lambda_0}(x)dx\right)=-W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_0};-1)+\delta^2W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_0};1) \tag{17}$$

olduğu gösterilebilir. (7)'den dolayı

$$W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_0};-1)=(\lambda-\lambda_n)\rho_1$$

yazabiliriz. Ayrıca öyle $k_0\neq 0$ vardır ki

$$\chi_{\lambda_0}(x)=k_0\phi_{\lambda_0}(x),\ \ x\in[-1,0)\cup(0,1]$$

eşitliği sağlanır. Burada $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ fonksiyonları λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır. Direkt hesaplamayla

$$W(\phi_\lambda,\phi_{\lambda_0};1)=\frac{1}{k_0}\big(\omega(\lambda)-(\lambda-\lambda_0)R_2'(\phi_\lambda)\big). \tag{18}$$

buluruz. (18)′i (17)′de yerine koyarak $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçersek

$$\left(\int_{-1}^{0}(\phi_{\lambda_0}x))^2dx+\delta^2\int_{0}^{1}(\phi_{\lambda_0}(x))^2dx\right)=-\rho_1+\frac{\delta^2}{k_0}\omega'(\lambda_0)-\frac{\delta^2}{k_0}R_2'(\phi_{\lambda_0}). \tag{19}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer (19)′da $R_2'(\phi_{\lambda_n})=\dfrac{\rho_2}{k_0}$ koyarsak $\omega'(\lambda_0)\neq 0$ elde ederiz. İspat bitti.

3. PROBLEMİN OPERATÖR-DENKLEM ŞEKLİNDE İFADESİ

Bu kesimde $L_2[-1,1]\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında araştırdığımız probleme özgü olan bir iç çarpım ve bir lineer simetrik A operatörünü tanımlayacağız. $L_2[-1,1]\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında

$$F=\left(f(x),F_1,F_2\right),\qquad G=\left(g(x),G_1,G_2\right)$$

elemanları için alışılmış

$$\langle F,G\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+F_1\overline{G_1}+F_2\overline{G_2}$$

iç çarpımından farklı olarak

$$\langle F,G\rangle_{\delta,\rho}=\int_{-1}^{0}f(x)\overline{g(x)}dx+\delta^2\int_{0}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\rho_1}F_1\overline{G_1}+\frac{\delta^2}{\rho_2}F_2\overline{G_2} \tag{20}$$

eşitliği ile (1)-(5) problemine özgü olan yeni bir iç çarpım tanımlayalım. Kolayca gösterebiliriz ki alışılmış iç çarpımla yeni tanımladığımız iç çarpım denk normlar üretiyor. Bu nedenle $L_2[-1,1]\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ lineer uzayı (20) nolu iç çarpıma göre de bir Hilbert uzayı olacaktır. Bu Hilbert uzayını $H_{\delta,\rho}$ ile göstereceğiz. Kısalık için

$$R_1(u)=\beta_1u(-1)-\beta_2u'(-1),\ R_1'(u)=\beta_1'u(-1)-\beta_2'u'(-1) \tag{21}$$

$$R_2(u)=\beta_3 u(1)-\beta_4 u'(1), R_2'(u)=\beta_3' u(1)-\beta_4' u'(1). \tag{22}$$

notasyonlarını kullanacağız. Ayrıca

$$R_1(f)R_1'(g)-R_1'(f)R_1(g)=-\rho_1 W(f,g;-1) \tag{23}$$
$$R_2(f)R_2'(g)-R_2'(f)R_2(g)=\rho_2 W(f,g;1), \tag{24}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Burada ρ_1 ve ρ_2 değerleri (6)′da tanımlanmıştır. Verilmiş $[-1,0)\cup(0,1]$ üzerinde tanımlı ve sonlu $f(0\pm):=\lim_{x\to\pm 0} f(x)$ limitlerine sahip olan $f(x)$ fonksiyonları için I_1 ve I_2 üzerinde tanımlanan $f_{(1)}(x)$ ve $f_{(2)}(x)$ fonksiyonlarını

$$f_{(1)}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-1,0) \\ f(0-), & x=0 \end{cases}, \quad f_{(2)}(x)=\begin{cases} f(0+), & x=0 \\ f(x), & x\in(0,1] \end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlayacağız. $H_{\delta,\rho}$ Hilbert uzayında

$$D(A)=\Big\{ \big(f(x),\, R_1'(f),\, R_2'(f)\big)\in H_{\delta,\rho} \;\Big|\; f_{(j)}(x) \textit{ ve } f_{(j)}'(x) \textit{ fonksiyonları}$$
$$I_j,\ j=(1,2)\, \textit{aralıklarının her birinde mutlak süreklidir ve}$$
$$\tau f\in L_2[-1,1],\quad L_3(f)=0,\quad L_4(f)=0\Big\} \tag{25}$$

$$AF=\big(\tau f, -R_1(f), -R_2(f)\big), \tag{26}$$

eşitlikleri ile $A: H_{\delta,\rho}\longrightarrow H_{\delta,\rho}$ operatörünü tanımlayarak (1)-(5) problemini

$$AU=\lambda U\ ,\quad U=\big(u(x), R_1'(u), R_2'(u)\big)\in D(A)$$

operatör-denklem formunda yazabiliriz.

Teorem. A *lineer operatörü simetriktir.*

İspat: $F, G\in D(A)$ olsun. (25)-(26) ifadelerini kullanarak

$$\langle AF,G\rangle_{\delta,\rho}=\int_{-1}^{0}\tau f\overline{g}dx+\delta^2\int_{0}^{1}\tau f\overline{g}dx-\frac{1}{\rho_1}R_1(f)\overline{R_1'(g)}-\frac{\delta^2}{\rho_2}R_2(f)\overline{R_2'(g)}.$$

elde ederiz. İki kere kısmi integrasyon uygulayarak (25)-den yararlanırsak

$$\langle AF,G\rangle_{\delta,\rho}-\langle F,AG\rangle_{\delta,\rho}=W(f,\overline{g};0-)-\delta^2W(f,\overline{g};0+). \tag{27}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterebiliriz. (25)-den $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının (4) ve (5) geçiş şartlarını sağladığını biliyoruz. Bu yüzden (27)-nin sağ tarafı sıfırdır, yani her $F,G\in D(A)$ için

$$\langle AF,G\rangle_{\delta,\rho}=\langle F,AG\rangle_{\delta,\rho}$$

eşitliği sağlanır. İspat bitti.

Sonuç. *(1)-(5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir.*

Not: (1)-(5) probleminin tüm katsayıları reel olduğu için yukarıdaki sonucu da dikkate alarak bütün özfonksiyonların reel değerli olduğunu kabul edebiliriz.

Sonuç. *λ_1 ve λ_2 (1)-(5) probleminin iki farklı özdeğeri olsun. O zaman bu özdeğerlere karşılık gelen $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki eşitliği sağlar.*

$$\int_{-1}^{0}u_1(x)u_2(x)dx+\delta^2\int_{0}^{1}u_1(x)u_2(x)dx=-\frac{1}{\rho_1}R_1'(u_1)R_1'(u_2)-\frac{\delta^2}{\rho_2}R_2'(u_1)R_2'(u_2).$$

İspat: *λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ özfonksiyonları için*

$$U_1=(u_1(x),R_1'(u_1),R_2'(u_1)),\quad U_2=(u_2(x),R_1'(u_2),R_2'(u_2))\in D(A)$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle ispat U_1 ve U_2 özfonksiyonlarının $H_{\delta,\rho}$ Hilbert uzayındaki ortogonalliğinden açıktır. İspat bitti.

4. GREEN FONKSİYONU

Bu kesimde probleme uygun Green fonksiyonunu tanımlamak ve analitik ifadesini bulmak için $H_{\delta,\rho}$ Hilbert uzayında

$$(\lambda I - A)U = F \tag{28}$$

operatör denklemini inceleyeceğiz; burada $F \in H_{\delta,\rho}$ keyfi elemandır. Bu operatör denklem

$$F = (f(x), F_1, F_2), \quad U = (u(x), R_1'(u), R_2'(u))$$

olmak üzere aşağıdaki homojen olmayan sınır-değer-geçiş problemi ile eşdeğerdir:

$$u'' + (\lambda - q(x))u = f(x), \qquad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{29}$$

$$L_1 u := \lambda(\beta_1' u(-1) - \beta_2' u'(-1)) + \beta_1 u(-1) - \beta_2 u'(-1) = F_1, \tag{30}$$

$$L_2 u := \lambda(\beta_3' u(1) - \beta_4' u'(1)) + \beta_3 u(1) - \beta_4 u'(1) = F_2 \tag{31}$$

$$L_3 u := u(0-) - \delta u(0+) = 0 \tag{32}$$

$$L_4 u := u'(0-) - \delta u'(0+) = 0, \tag{33}$$

$\omega(\lambda) \neq 0$ şartı altında bu problemdeki (29) diferansiyel denkleminin genel çözümünü $\phi_{i\lambda}(x)$ ve $\chi_{i\lambda}(x)$ fonksiyonları ile aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz:

$$u(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\chi_{1\lambda}(x)}{\omega_1(\lambda)} \displaystyle\int_{-1}^{x} \phi_{1\lambda}(y) f(y)dy + \dfrac{\phi_{1\lambda}(x)}{\omega_1(\lambda)} \displaystyle\int_{x}^{0} \chi_{1\lambda}(y) f(y)dy + C_1\phi_{1\lambda}(x) + D_1\chi_{1\lambda}(x), x \in [-1,0) \\ \dfrac{\chi_{2\lambda}(x)}{\omega_2(\lambda)} \displaystyle\int_{0}^{x} \phi_{2\lambda}(y) f(y)dy + \dfrac{\phi_{2\lambda}(x)}{\omega_2(\lambda)} \displaystyle\int_{x}^{1} \chi_{2\lambda}(y) f(y)dy + C_2\phi_{2\lambda}(x) + D_2\chi_{2\lambda}(x), x \in (0,1] \end{cases} \tag{34}$$

Burada C_1, C_2, D_1, D_2 keyfi sabitlerdirler. (34)-den x değişkenine göre türev alırsak

$$u'(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\chi'_{1\lambda}(x)}{\omega_1(\lambda)}\displaystyle\int_{-1}^{x}\phi_{1\lambda}(y)f(y)dy+\dfrac{\phi'_{1\lambda}(x)}{\omega_1(\lambda)}\displaystyle\int_{x}^{0}\chi_{1\lambda}(y)f(y)dy+C_1\phi'_{1\lambda}(x)+D_1\chi'_{1\lambda}(x), x\in[-1,0)\\ \dfrac{\chi'_{2\lambda}(x)}{\omega_2(\lambda)}\displaystyle\int_{0}^{x}\phi_{2\lambda}(y)f(y)dy+\dfrac{\phi'_{2\lambda}(x)}{\omega_2(\lambda)}\displaystyle\int_{x}^{1}\chi_{2\lambda}(y)f(y)dy+C_2\phi'_{2\lambda}(x)+D_2\chi'_{2\lambda}(x), x\in(0,1]\end{cases} \tag{35}$$

elde ederiz. (34) ve (35) ifadelerini (30) ve (31)-de yerine yazarsak, (7) ve (9) eşitliklerinden de yararlanırsak

$$D_1\{(\lambda\beta'_1+\beta_1)\chi_{1\lambda}(-1)-(\lambda\beta'_2+\beta_2)\chi'_{1\lambda}(-1)\}=F_1 \tag{36}$$

$$C_1\{(\lambda\beta'_3+\beta_3)\phi_{2\lambda}(1)-(\lambda\beta'_4+\beta_4)\phi'_{2\lambda}(1)\}=F_2 \tag{37}$$

eşitlikleri elde edilir. Yine (7) ve (9) başlangıç şartlarından ve (11) eşitliğinden yararlanarak sonuncu eşitliklerden

$$D_1=-\frac{F_1}{\omega_1(\lambda)},\quad C_2=\frac{F_2}{\omega_2} \tag{38}$$

bulunur. C_1 ve D_2 katsayılarını bulmak için (7) ve (8) ifadelerini (32) ve (33)-de yerine yazarsak bu katsayılar için

$$\begin{aligned}C_1\phi_{1\lambda}(0-)-D_2\chi_{1\lambda}(0-)=&-\frac{\chi_{1\lambda}(0-)}{\omega_1(\lambda)}\left(\int_{-1}^{0}\phi_{1\lambda}(y)f(y)dy+F_1\right)\\&+\frac{\delta\phi_{2\lambda}(0+)}{\omega_2(\lambda)}\left(\int_{0}^{1}\chi_{2\lambda}(y)f(y)dy+F_2\right)\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}C_1\phi'_{1\lambda}(0-)-D_2\chi'_{1\lambda}(0-)=&-\frac{\chi'_{1\lambda}(0-)}{\omega_1(\lambda)}\left(\int_{-1}^{0}\phi_{1\lambda}(y)f(y)dy+F_1\right)\\&+\frac{\delta\phi'_{2\lambda}(0+)}{\omega_2(\lambda)}\left(\int_{0}^{1}\chi_{2\lambda}(y)f(y)dy+F_2\right)\end{aligned} \tag{40}$$

bulmuş oluruz. Böylece C_1 ve D_2 değişkenlerine göre homojen olmayan lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin determinantı $-\omega_1(\lambda) \neq 0$ olduğu için bir tek çözümü bulunur. Bu çözümü

$$C_1 = \frac{1}{\omega_2(\lambda)} \left(\int_0^1 \chi_{2\lambda}(y) f(y)dy + F_2 \right) \tag{41}$$

$$D_2 = \frac{1}{\omega_1(\lambda)} \left(\int_{-1}^0 \phi_{1\lambda}(y) f(y)dy + F_1 \right) \tag{42}$$

biçiminde ifade edebiliriz. C_1, C_2, D_1, D_2 katsayıları için bulduğumuz değerleri (7)-de yerine yazarsak $u(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$u(x,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x) \left\{ \int_{-1}^{x} \phi_{1\lambda}(y) f(y)dy - F_1 \right\} \\ + \phi_{1\lambda}(x) \left\{ \int_{x}^{0} \chi_{1\lambda}(y) f(y)dy + \delta^2 \int_0^1 \chi_{2\lambda}(y) f(y)dy + \delta^2 F_2 \right\}, & x \in [-1,0) \\ \chi_{2\lambda}(x) \left\{ \delta^2 \int_0^x \phi_{2\lambda}(y) f(y)dy + \int_{-1}^{0} \phi_{1\lambda}(y) f(y)dy + F_1 \right\} \\ + \phi_{2\lambda}(x) \left\{ \delta^2 \int_x^1 \chi_{2\lambda}(y) f(y)dy + \delta^2 F_2 \right\}, & x \in (0,1] \end{cases} \tag{43}$$

Şimdi

$$G_1(x,y;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\chi(x,\lambda)\phi(y,\lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq y \leq x \leq 1, \quad x \neq 0, \ y \neq 0 \\ \dfrac{\phi(x,\lambda)\chi(y,\lambda)}{\omega(\lambda)}, & -1 \leq x \leq y \leq 1, \quad x \neq 0, \ y \neq 0 \end{cases} \tag{44}$$

gösteriminden yararlanarak (43) formülünü

$$u(x,\lambda) = \int_{-1}^{x} G_1(x,y;\lambda) f(y)dy + \delta^2 \int_x^1 G_1(x,y;\lambda) f(y)dy + \frac{F_1}{\omega(\lambda)} \chi(x,\lambda) + \frac{\delta^2 F_2}{\omega(\lambda)} \phi(x,\lambda) \tag{45}$$

biçiminde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$R_1'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)=\beta_1'G_1(x,-1;\lambda)-\beta_2'\frac{\partial G_1(x,-1;\lambda)}{\partial y}=\rho_1\frac{\chi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)} \tag{46}$$

$$R_2'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)=\beta_3'G_1(x,1;\lambda)-\beta_4'\frac{\partial G_1(x,1;\lambda)}{\partial y}=\rho_2\frac{\phi(x,\lambda)}{\omega(\lambda)} \tag{47}$$

ifadelerinden yararlanılarak (45) formülünü aşağıdaki biçimde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}u(x,\lambda)&=\int_{-1}^{x}G_1(x,y;\lambda)f(y)dy+\delta^2\int_{x}^{1}G_1(x,y;\lambda)f(y)dy\\&+\frac{1}{\rho_1}R_1'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)F_1+\frac{\delta^2}{\rho_2}R_2'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)F_2\end{aligned} \tag{48}$$

Şimdi $G_{x,\lambda}$ elemanını

$$G_{x,\lambda}=\begin{pmatrix}G_1(x,\bullet;\lambda)\\R_1'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)\\R_2'\big(G_1(x,\bullet;\lambda)\big)\end{pmatrix} \tag{49}$$

eşitliği ile tanımlayarak (28) operatör denkleminin

$$U(F,\lambda)=\begin{pmatrix}u(x,\lambda)\\R_1'\big(u(x,\lambda)\big)\\R_2'\big(u(x,\lambda)\big)\end{pmatrix} \tag{50}$$

çözümü için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$U(F,\lambda)=\begin{pmatrix}<G_{x,\lambda},\overline{F}>\\R_1'\big(<G_{x,\lambda},\overline{F}>\big)\\R_2'\big(<G_{x,\lambda},\overline{F}>\big)\end{pmatrix} \tag{51}$$

Not: (44) ile tanımlı $G_1(x,y;\lambda)$ fonksiyonuna (1)-(5) probleminin Green fonksiyonu, (49) ile tanımlı $G_{x,\lambda}$-ya (1)-(5) probleminin Green elemanı, (51) ile tanımlı $U(F,\lambda)$ -ya ise (1)-(5) probleminin Resolvent'i diyeceğiz.

5. RESOLVENT OPERATÖRÜ VE PROBLEMİN KENDİNE EŞLENİKLİĞİ

Şimdi (44), (48)-(51) formüllerinden yararlanarak kolayca görürüz ki eğer λ parametresi A operatörünün özdeğeri değilse, o halde her $F \in H_{\delta,\rho}$ için

$$U(F,\lambda) \in D(A) \tag{52}$$

olacak ve her $F \in D(A)$ için

$$U((\lambda I - A)F,\lambda) = F \tag{53}$$

eşitliği sağlanacaktır. Ayrıca $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ olacak biçimde her λ için

$$\|U(F,\lambda)\| \leq |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\|F\|, \quad F \in H_{\delta,\rho} \tag{54}$$

eşitsizliği de sağlanacaktır. O halde $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ olacak biçimde her $\lambda \in \mathbb{C}$ değeri A operatörünün regüler değeridir ve $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ resolvent operatörü için

$$R(\lambda, A)F = U(F,\lambda), \quad F \in H_{\delta,\rho} \tag{55}$$

sağlanacaktır.

Lemma: *A operatörünün $D(A)$ tanım bölgesi $H_{\delta,\rho}$ uzayında her yerde yoğundur.*

İspat: Kabul edelim ki $F_0 = (f_0(x),\ F_{10}, F_{20}) \in H_{\delta,\rho}$ elemanı $D(A)$ -ya ortogonal olsun, yani

$$< F, F_0 >= 0\ , \quad her\ F \in D(A)\ için \tag{56}$$

olduğunu kabul edelim. $C_0^\infty([-1,0) \cup (0,1])$ ile $[-1,0) \cup (0,1]$ üzerinde sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir olan öyle fonksiyonlar uzayını gösterelim ki bu uzayda her bir fonksiyon $-1,0,1$ noktalarının her birinin en az bir komşuluğunda sıfır olsun. Eğer $\forall f \in C_0^\infty([-1,0) \cup (0,1])$ için $(f(x),0,0) \in D(A)$ olduğunu dikkate alarak (56)-dan $\forall f \in C_0^\infty([-1,0) \cup (0,1])$ için

$$\int_{-1}^{0} f(x)\overline{f_0(x)}dx + \delta^2 \int_{0}^{1} f(x)\overline{f_0(x)}dx = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $f_0(x)$ fonksiyonu $L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ uzayından $C_0^\infty([-1,0) \cup (0,1])$ kümesine ortogonaldır. $C_0^\infty([-1,0) \cup (0,1])$ kümesi $L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ uzayında her yerde yoğun olduğu için $f_0(x)$ fonksiyonu sıfır olur. Buradan $F_0 = (0,0,0)$ elde edilir. İspat bitti.

Teorem: *A operatörü kendine eşleniktir.*

İspat: (51) ve (55) gereği $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ için

$$(\lambda I - A)D(A) = (\overline{\lambda} I - A)D(A) = H$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten ve bir önceki Lemmadan literatürden iyi bilinen simetrik operatörlerin genişletilmesi hakkındaki teorem gereği (bak mesela Lang (1983) Teorem2.2 sayfa 198) $D(A^*) = D(A)$ elde edilir. İspat bitti.

TEŞEKKÜR

Bu makale FBA–10–01 proje numarası ile Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri destekleme fonu tarafından desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

Akdoğan, Z., Demirci, M., and Mukhtarov, O. Sh. (2007). *Green function of discontinuous boundary-value problem with transmission conditions*, Mathematical methods in the applied Sciences, *Math. Meth. Appl. Sci.* 30, 1719–1738.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., (1997). *Oscillation theory for indefinite Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationallay dependent on the eigenparameter*, II, J. Comput. Appl. Math. 148, 147-168.

Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., (2002). *Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions*, Proc. Royal Soc. Edinburg, 127A, 1123-1136. Appl. Math. 148, 147-168.

Boumenir, A. (2005). Sampling the miss-distance and transmission function. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 310 (1), 197-208.

Fulton, C. T. (1977). Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions. *Proc. Soc. Edinburg*, 77A, p.293–308.

Hinton,D. (1979). An Expansion Theorem for in Eigenvalue problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxf. (2), 30, 33–42.

Lang, S. (1983). Real Analysis (Second edition), Addision-Wesley, Reading, Mass.

Mukhtarov, O. Sh., (1994). *Discontinuous boundary-value problem with spectral parameter in boundary conditions.* Turkish Journal of Mathematics, 18, pp. 183-192.

Mukhtarov, O. S., Kadakal, M. and Altinisik, N., (2003). *Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 34(3) 501–516.

Mukhtarov O. Sh. and Tunç E., (2004). *Eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with transmission conditions,* Israel Journal of Mathematics, 144, 367-380.

Mukhtarov, O. Sh., Kadakal, M. and Muhtarov, F. S. (2004). *On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions*, J. Math. Kyoto Univ., 44(4), 779-798.

Naimark, M.A. (1967). *Linear Differential Operators*, Ungar, New York.

Schneider, A. (1974). A note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. *Mathematische Zeitschrift*, Z.136, 163–167.

Shkalikov, A.A. (1983). Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Condition. *Trudy. Sem., Imeny*, I.G. Petrosgo, 9, 190-229.

Titchmarsh, E.C. (1939). *Eigenfunction Expansion Associated with Second Order Differential Equations I.*, (2nd end). Oxford University Press, London.

Tunç E., and Muhtarov, O.SH., (2004). *Fundamental Solutions And Eigenvalues of One Boundary-Value Problem with Transmission Conditions*, Applied Mathematics and Computation, 157, 347–355

Walter, J. (1973). Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. *Mathematische Zeitschrift* Z. 133, 301–312.

Wang Guixia, Sun Jiong, (2008). *Properties of Eigenvalues of A Class of Discontinuous Sturm-Liouville Problems*, Journal of Inner Mongolia Normal Univ., Vol: 37, No: 3.

Boyce, W. E. and DiPrima, R.C.(2001).*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,* 7th ed. John Wiley & Sons, Inc.

Yakubov, S. & Yakubov, Y. (2000). *Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations*, Chapman and Hall//CRC (Boca Raton).

Yang Q. and Wanyi W. (2010). *A Discontinuous Sturm-Liouville Operator With Indefinite Weight,* Journal of Mathematics Research, 2(3), 161-168.

Yang, Qiuxia, (2011). *Asymptotic behavior of a differential operator with discontinuities at two points*. Mathematical methods in the Applied Sciences, 34,4, 373-383 Mar 15.

Zayed, E.M.E. & Ibrahim, S.F.M. (1992). Regular Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Conditions. *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 84. 379–393.

****