EÜFBED - Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt-Sayı: 6-1 Yıl: 2013 39-68

AYIRMA AKSİYOMLARI
SEPARATION AXIOMS

Süleyman SOYDAŞ[1] ve Fevzi BİLGİN[2]

MKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Antakya, Hatay

Geliş Tarihi: 23 Temmuz 2012 **Kabul Tarihi:** 30 Nisan 2013

ÖZET

Bu makalede iyi bilinen ayırma aksiyomları verilmiş ve bunların birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiştir. Buna ek olarak, bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerindeki bütün topolojik yapılar için elde edilen topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı tablo şeklinde gösterilmiştir. Son olarak, bu tabloda yer alan topolojik uzayların bazılarının çözümlerine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik yapı, topolojik uzay, ayırma aksiyomları, hausdorff uzay.

ABSTRACT

In this article, given the well-known separation axioms and their relationships are examined. In addition, whether topological spaces obtained for all topological structures on one, two and three element sets provide separation axioms or not provide were shown in a table. Finally, some of topological spaces in the table are given solutions.

Keywords: Topological structure, topological space, separation axioms, hausdorff space.

GİRİŞ

Ayırma aksiyomları Almanca'da "Trennungsaxiom" kelimesinin baş harfi kullanılarak T_i $(i = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots)$ ile gösterilmektedir. Ayırma aksiyomu bir kümenin noktalarının veya alt kümelerinin topolojik olarak birbirinden ayrılabilmesi durumudur. Bu doğrultuda ayırma aksiyomları topolojinin ayrılma derecesini ifade eder ki bu da ayırma aksiyomlarına göre topolojik uzayların sınıflandırılması demektir. Yani, bu aksiyomlar yardımıyla topolojik uzaylar farklı özelliklere sahip olacak ve dolayısıyla farklı sınıflar altında incelenebilme imkânına sahip olacaktır. Bu nedenle, ayırma aksiyomları topolojik uzayların sınıflandırılmasında önemli bir yere sahiptir. T_0 aksiyomu 1935 yılında ilk defa Alexandorff ve

***Sorumlu Yazar: soydassuleyman@gmail.com**

Hopf tarafından ortaya atılmış, T_1 aksiyomu 1906 yılında Rietz, T_2 aksiyomu 1914 yılında Hausdorff ve aynı yıl bağımsız olarak Root tarafından tanımlanmış, T_3 aksiyomu 1921 yılında Vietoris, $T_{3\frac{1}{2}}$ aksiyomu 1925 yılında Urysohn formüle etmiş ve $T_{3\frac{1}{2}}$ uzaylar sınıfı üzerindeki önemli çalışmaları 1930 yılında Tychonoff yapmış, T_4 aksiyomu 1923 yılında Tietze tanımlamış ve ayırma aksiyomu terimini ilk defa kullanmıştır (Bilge, 2005). Bunların dışında, topolojik uzaylarda farklı ayırma aksiyomlarını araştıran çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bazı genelleştirilmiş kapalı kümeler kullanılarak $T_{\frac{1}{2}}$, ${}^*T_{\frac{1}{2}}$, $T_{\frac{1}{2}}{}^*$ ayırma aksiyomları elde edilmiştir. Levine (1970), g – kapalı kümeyi ve bu kümenin bir uygulaması olarak $T_{\frac{1}{2}}$ uzayını tanımladı. Dunham (1997), (X,τ) topolojik uzayının $T_{\frac{1}{2}}$ uzayı olabilmesi için gerek ve yeter şartın, her $x \in X$ için, $\{x\}$ tek elemanlı kümesinin ya açık ya da kapalı olması gerektiğini ispatladı. Daha sonra, Kumar (2000), g – açık kümeyi kullanarak yeni bir teknikle g* - kapalı kümeyi ve bu kümenin uygulaması olarak da $T_{\frac{1}{2}}{}^*$ ve ${}^*T_{\frac{1}{2}}$ uzaylarını tanımladı (Erdoğan, 2003). Bu konu üzerinde yapılan bir başka çalışma ise, tamamen normal ve mükemmel normal uzay kullanılarak elde edilen T_5 ve T_6 aksiyomlarıdır. Bu makalede, bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerinde oluşturulabilecek tüm topolojik yapılar ve bu yapılar için elde edilen topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlıyorsa "✓", sağlamıyorsa "×" simgeleriyle ifade edildiği bir tabloya yer verilmiştir. Bu makalede, tabloda yer alan topolojik uzayların bazılarının, ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını gösteren çözümlere yer vermek amaçlanmıştır.

MATERYAL VE METOT

Ayırma aksiyomları çalışmasında materyal olarak verilen kaynakça kullanılmıştır.

2.1 *T_0 Uzayı (Kolmogorov Uzayı)*: (X,τ) topolojik uzayının her farklı x, y noktaları için, bunlardan birini içeren fakat diğerini içermeyen en az bir açık küme varsa, (X,τ) topolojik uzayına $T_0 -$ uzayı denir. Yani,

$(X,\tau),\ T_0 - \text{uzay} \Leftrightarrow$
$$[(\forall x,y \in X)(x \neq y) \Rightarrow (\exists G \in \tau) : \ni [(x \in G)\,(y \notin G) \vee (y \in G)\,(x \notin G)]]$$

şeklindedir (Aslım, 1988).

2.2 $T_{\frac{1}{2}}$, $^*T_{\frac{1}{2}}$, $T_{\frac{1}{2}}{}^*$ *Uzayları*: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $A \subseteq U$ ve U kümesi (X,τ) da bir açık küme olmak üzere $\overline{A} \subseteq U$ oluyorsa, A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme veya kısaca $g-\text{kapalı}$ küme, tümleyeni $g-\text{kapalı}$ olan kümeye de $g-\text{açık}$ küme adı verilir. Eğer, $A \subseteq U$ ve U kümesi (X,τ) da bir $g-\text{açık}$ küme iken $\overline{A} \subseteq U$ oluyorsa A kümesine $g^*-\text{kapalı}$ küme adı verilir. Buna göre, (X,τ) topolojik uzayının her $g-\text{kapalı}$ alt kümesi aynı zamanda kapalı bir küme ise, (X,τ) uzayına $T_{\frac{1}{2}}-\text{uzayı}$ denir. (X,τ) topolojik uzayının her $g-\text{kapalı}$ alt kümesi aynı zamanda $g^*-\text{kapalı}$ bir küme ise, (X,τ) uzayına $^*T_{\frac{1}{2}}-\text{uzayı}$, (X,τ) topolojik uzayının her $g^*-\text{kapalı}$ alt kümesi aynı zamanda kapalı bir küme ise, (X,τ) uzayına $T_{\frac{1}{2}}{}^*-\text{uzayı}$ adı verilir (Erdoğan, 2003).

2.3 T_1 *Uzayı (Frechet Uzayı)*: (X,τ) topolojik uzayının her farklı x,y noktaları için, bunlardan her birinin diğerini içermeyen en az bir açık kümesi varsa, (X,τ) uzayına $T_1-\text{uzayı}$ denir (Aslım, 1988). Bir başka ifadeyle,

$$(X,\tau),\ T_1 - \text{uzay} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\forall x,y \in X)(x \neq y) \Rightarrow \\ (\exists G_1 \in \tau)(\exists G_2 \in \tau) : \ni (x \in G_1)(y \notin G_1) \wedge (y \in G_2)(x \notin G_2) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

2.4 T_2 *Uzayı (Hausdorff Uzayı)*: (X,τ) topolojik uzayının her farklı x,y noktaları için, bunları içeren ayrık açık kümeler varsa, (X,τ) uzayına $T_2-\text{uzayı}$ denir. Yani,

$$(X,\tau), T_2 - \text{uzay} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\forall x,y \in X)(x \neq y) \Rightarrow \\ (\exists G_1, G_2 \in \tau)(x \in G_1)(y \in G_2) : \ni (G_1 \cap G_2 = \emptyset) \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Aslım, 1988).

2.5 ***$T_{2\frac{1}{2}}$ Uzayı (Urysohn Uzayı)***: (X,τ) topolojik uzayının her farklı x, y noktaları için, sırasıyla x ve y yi içeren G_1 ve G_2 açık kümeleri var öyleki $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset$ ise, (X,τ) uzayına $T_{2\frac{1}{2}} -$ uzayı denir (Steen and Seeback, 1995). Bir başka ifadeyle,

$$(X,\tau),\ T_{2\frac{1}{2}} - \text{uzay} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (\forall x, y \in X)(x \neq y) \Rightarrow (\exists G_1, G_2 \in \tau)(x \in G_1)(y \in G_2) \\ :\exists\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \emptyset\right) \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

2.6 ***T_3 Uzayı (Düzenli Hausdorff Uzayı)***: (X,τ) topolojik uzay olmak üzere her K kapalı kümesi ve her $x \notin K$ noktasına karşılık, K yı kapsayan bir G_1 açık kümesi ve x noktasını içeren bir G_2 açık kümesi var öyleki $G_1 \cap G_2 = \phi$ ise, (X,τ) topolojik uzayına düzenli uzay denir. Buna göre, (X,τ) düzenli uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzayı ise, (X,τ) topolojik uzayına $T_3 -$ uzayı denir (Yıldız, 2005).

2.7 ***$T_{3\frac{1}{2}} -$ Uzayı (Tychonoff Uzayı)***: (X,τ) topolojik uzayının her K kapalı kümesi ve K ya ait olmayan her a noktası için $f(a) = 0$ ve $f(K) = \{1\}$ olacak şekilde $f: X \to [0,1]$ tanımlı sürekli bir f fonksiyonu varsa, (X,τ) uzayına tamamen düzenli uzay denir. Eğer (X,τ) tamamen düzenli uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzayı ise, (X,τ) uzayına $T_{3\frac{1}{2}} -$ uzayı denir (Yıldız, 2005).

2.8 ***$T_4 -$ Uzayı (Normal Hausdorff Uzayı)***: (X,τ) topolojik uzayının herhangi iki ayrık ve kapalı K_1, K_2 alt kümeleri için, sırasıyla bunları kapsayan ayrık G_1 ve G_2 açık kümeleri mevcut ise, (X,τ) topolojik uzayına normal uzay denir. Eğer (X,τ) normal uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzayı ise, (X,τ) uzayına $T_4 -$ uzayı denir (Yıldız, 2005).

2.9 ***$T_5 -$ Uzayı (Tamamen Normal Hausdorff Uzayı)***: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ ise, A ve B kümelerine ayrılmış kümeler adı verilir (Steen and Seeback, 1995). (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ herhangi iki ayrılmış küme olsun. Sırasıyla A ve B yi içeren ayrık ve açık G_1 ve G_2 kümeleri varsa, (X, τ) uzayına tamamen normal uzay denir. Eğer (X, τ) tamamen normal uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzayı ise, (X, τ) uzayına $T_5 -$ uzayı denir.

***2.10 $T_6 -$ Uzayı (Mükemmel Normal Hausdorff Uzayı)*:** Bir (X, τ) topolojik uzayında, sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olan kümelere $G_\delta -$ kümesi adı verilir. (X, τ) normal uzayı verilmiş olsun. Eğer (X, τ) normal uzayının her kapalı alt kümesi bir $G_\delta -$ kümesi ise, (X, τ) uzayına mükemmel normal uzay denir (Willard, 2004). Eğer (X, τ) mükemmel normal uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzayı ise, (X, τ) uzayına $T_6 -$ uzayı denir.

***2.11 Sonuç*:** Yukarıda tanımlanan ayırma aksiyomları arasındaki ilişki şekil 1'deki gibidir.

$$^{*}T_{\frac{1}{2}}$$

$$\Uparrow$$

$$T_6 \Longrightarrow T_5 \Longrightarrow T_4 \Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_{2\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_{\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_0$$

$$\Downarrow$$

$$T_{\frac{1}{2}}^{*}$$

Şekil 1. Ayırma aksiyomları arasındaki ilişki

***2.12 Teoremler ve Lemma*:**

***2.12.1 Teorem*:** (X, τ) tamamen düzenli uzay ise, (X, τ) uzayı düzenli uzaydır (Aslım, 1988).

***2.12.2 Teorem*:** (X, τ) tamamen normal uzay ise, (X, τ) uzayı normal uzaydır (Steen and Seeback, 1995)

***2.12.3 Teorem*:** (X, τ) mükemmel normal uzay ise, (X, τ) tamamen normal uzaydır (Steen and Seeback, 1995).

***2.12.4 Teorem*:** (X, τ) normal uzayının, düzenli uzay olması için gerek ve yeter şart tamamen düzenli uzay olmasıdır (Bilge, 2005).

2.12.5 *Teorem*: (X,τ) uzayının $T_{\frac{1}{2}}-\text{uzay}$ olması için gerek ve yeter şart bu uzayın hem $T_{\frac{1}{2}}{}^{*}-\text{uzay}$ hem de ${}^{*}T_{\frac{1}{2}}-\text{uzay}$ olmasıdır (Erdoğan, 2003).

2.12.6 *Teorem*: (X,τ) uzayının $T_1-\text{uzay}$ olması için gerek ve yeter koşul (X,τ) uzayının tek elemanlı her alt kümesinin kapalı olmasıdır (Çakallı, 1997).

2.12.7 *Urysohn Lemması*: (X,τ) topolojik uzayının normal uzay olması için gerek ve yeter şart her ayrık kapalı K_1, K_2 küme çifti için $f(K_1)=\{0\}$ ve $f(K_2)=\{1\}$ olacak şekilde $f:X\longrightarrow[0,1]$ tanımlı sürekli bir f fonksiyonunun olmasıdır.

***2.13 Ayırma Aksiyomlarının Bir, İki ve Üç Elemanlı Kümeler Üzerine Uygulanması*:**

- $X_1=\{a\} \Rightarrow \sigma=\{\emptyset,X_1\}$

  $X_2=\{a,b\} \Rightarrow \rho_1=\{\emptyset,X_2\}$, $\rho_2=\{\emptyset,X_2,\{a\}\}$, $\rho_3=\{\emptyset,X_2,\{b\}\}$,
  $\rho_4=\{\emptyset,X_2,\{a\},\{b\}\}$

  $X=\{a,b,c\} \Rightarrow \tau_1=\tau_I=\{\emptyset,X\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, $\tau_3=\{\emptyset,X,\{b\}\}$,
  $\tau_4=\{\emptyset,X,\{c\}\}$
  $\tau_5=\{\emptyset,X,\{a,b\}\}$
  $\tau_6=\{\emptyset,X,\{b,c\}\}$
  $\tau_7=\{\emptyset,X,\{a,c\}\}$
  $\tau_8=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\}\}$
  $\tau_9=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,c\}\}$
  $\tau_{10}=\{\emptyset,X,\{a\},\{b,c\}\}$
  $\tau_{11}=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,b\}\}$
  $\tau_{12}=\{\emptyset,X,\{b\},\{b,c\}\}$
  $\tau_{13}=\{\emptyset,X,\{b\},\{a,c\}\}$

$$\tau_{14} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}\}$$

$$\tau_{15} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{16} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\}\}$$

$$\tau_{17} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

$$\tau_{18} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$$

$$\tau_{19} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{20} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

$$\tau_{21} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{22} = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{23} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{24} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

$$\tau_{25} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$

$$\tau_{26} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{27} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{28} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

$$\tau_{29} = \tau_D = \mathcal{P}(X)$$

(Bilge, 2005)

Yukarıda bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerinde oluşturulabilecek bütün topolojiler verilmiştir. Bu topolojiler için elde edilen topolojik uzayların, ayırma aksiyomlarını ve diğer topolojik uzayları sağlayıp sağlamadığı aşağıda incelenmiş ve elde edilen sonuçlar tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1. Bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerindeki bütün topolojik yapılar için elde edilen topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını gösteren tablo

Ayır. Ak. / Top. Uz.	T_0	$T_{\frac{1}{2}}^{*}$	$^{*}T_{\frac{1}{2}}$	$T_{\frac{1}{2}}$	T_1	T_2	$T_{2\frac{1}{2}}$	Reg uz.	T_3	Tam reg uz	$T_{3\frac{1}{2}}$	Nor uz	T_4	Tam nor uz	T_5	Mük nor uz	T_6
(X_1,π)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(X_2,ρ_1)	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
(X_2,ρ_2)	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X_2,ρ_3)	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X_2,ρ_4)	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(X,τ_1)	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
(X,τ_2)	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_3)	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_4)	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_5)	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_6)	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_7)	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_8)	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_9)	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{10})	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
(X,τ_{11})	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{12})	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{13})	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
(X,τ_{14})	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{15})	✓	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{16})	×	✓	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
(X,τ_{17})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{18})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{19})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{20})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
(X,τ_{21})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
(X,τ_{22})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
(X,τ_{23})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{24})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{25})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{26})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{27})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{28})	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	✓	×	×	×
(X,τ_{29})	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

***2.13.1 Tablo 1'deki Topolojik Uzayların Bazılarının Ayırma Aksiyomlarını Sağlayıp Sağlamadığını Gösteren Çözümler*:**

2.13.1.1 $X = \{a,b,c\}$, $\tau_5 = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$ ise (X,τ_5) uzayı için:

$a,b \in X$, $a \neq b$ için $a \in G$, $b \notin G$ veya $b \in G$, $a \notin G$ olacak şekilde $G \in \tau_5$ yoktur. Dolayısıyla, (X,τ_5) $T_0 -$ uzay değildir. (X,τ_5) uzayının kapalılar ailesi, $\mathcal{K}^{\tau_5} = \{\emptyset, X, \{c\}\}$ olup (X,τ_5) uzayının tek elemanlı her alt kümesi kapalı olmadığından (X,τ_5) uzayı, $T_1 -$ uzay değildir. (X,τ_5), $T_1 -$ uzay olmadığından $T_2 -$ uzay da olamaz.

$$\left.\begin{array}{l}\{a\} \subseteq \{a,b\}, \ \{a,b\} \text{ açık} \\ \{a\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}} = X \not\subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a\}, \ g - \text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{l}\{b\} \subseteq \{a,b\}, \ \{a,b\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}} = X \not\subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{b\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{b\}, \ g - \text{kapalı}$$

değil

$$\{c\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{c\}} = \{c\} \subseteq X\} \Rightarrow \{c\}, \ g - \text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{a,b\} \subseteq \{a,b\}, \ \{a,b\} \text{ açık} \\ \{a,b\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}} = X \not\subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a,b\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a,b\}, \ g - \text{kapalı}$$

değil

$$\{a,c\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{a,c\}} = X \subseteq X\} \Rightarrow \{a,c\}, \ g - \text{kapalı}$$

$$\{b,c\} \subseteq X, \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{b,c\}} = X \subseteq X\} \Rightarrow \{b,c\}, \ g - \text{kapalı}$$

olduğuna göre $g -$ kapalı'lar ailesi $G(X,\tau_5) = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ olur ve $g -$ açık'lar ailesi de $G'(X,\tau_5) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ elde edilir. Diğer yandan,

$$\left.\begin{array}{l}\{a\} \subseteq \{a\}, \ \{a\} \ g - \text{açık} \\ \{a\} \subseteq \{a,b\}, \ \{a,b\} \ g - \text{açık} \\ \{a\} \subseteq X, \ X \ g - \text{açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}} = X \not\subseteq \{a\} \\ \overline{\{a\}} = X \not\subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a\}, \ g^* - \text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{l}\{b\}\subseteq\{b\},\ \{b\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq\{a,b\},\ \{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}}=X\nsubseteq\{b\}\\ \overline{\{b\}}=X\nsubseteq\{a,b\}\\ \overline{\{b\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\{c\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\}\Rightarrow\overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq X\}\Rightarrow\{c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{a,b\}\subseteq\{a,b\},\ \{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{a,b\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}}=X\nsubseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a,b\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\{a,c\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\}\Rightarrow\overline{\{a,c\}}=X\subseteq X\}\Rightarrow\{a,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\{b,c\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\}\Rightarrow\overline{\{b,c\}}=X\subseteq X\}\Rightarrow\{b,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

olduğundan g^*- kapalı'lar ailesi $G^*(X,\tau_5)=\{\emptyset,X,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. O halde,

- Her g^*- kapalı küme aynı zamanda kapalı olmadığından (X,τ_5) uzayı, $T_{\frac{1}{2}}{}^*-$ uzay değildir. Gerçekten, $\{a,c\}\in G^*(X,\tau_5)$ iken $\{a,c\}\notin\mathcal{K}^{\tau_5}$ şeklindedir.
- Her $g-$ kapalı küme aynı zamanda g^*- kapalı olduğundan (X,τ_5) uzayı, ${}^*T_{\frac{1}{2}}-$ uzaydır.
- Her $g-$ kapalı küme aynı zamanda kapalı olmadığından (X,τ_5), $T_{\frac{1}{2}}-$ uzay değildir. Gerçekten, $\{b,c\}\in G(X,\tau_5)$ iken $\{b,c\}\notin\mathcal{K}^{\tau_5}$ şeklindedir.

Not 1: Yukarıda yapılan işlemlerin bir sonucu olarak $\emptyset$ ve X kümelerinin her zaman $g-$ kapalı, $g-$ açık ve g^*- kapalı kümeler ailesinde bulunacağı söylenebilir. $a,b\in X,\ a\neq b$ için $a\in G_1,\ b\in G_2$ ve $\overline{G_1}\cap\overline{G_2}=\emptyset$ olacak şekilde $G_1,G_2\in\tau_5$ yoktur. Gerçekten, $a,b\in X,\ a\neq b$ için a'yı içeren X veya $\{a,b\}$, b'yi içeren X veya $\{a,b\}$ açık kümeleri mevcut olmasına rağmen $\overline{X}\cap\overline{\{a,b\}}=X\cap X\neq\emptyset$

şeklindedir. Dolayısıyla, (X,τ_5) uzayı $T_{2\frac{1}{2}}-\text{uzay}$ değildir. $a\in X$, $\{c\}\in\mathcal{K}^{\tau_5}$ ve $a\notin\{c\}$ için $a\in G_1$, $\{c\}\subset G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde $G_1,G_2\in\tau_5$ yoktur. Gerçekten, a'yı içeren açık kümeler $G_1=\{a,b\}$ veya $G_1=X$, $\{c\}$'ni kapsayan tek açık küme $G_2=X$ olup, $G_1\cap G_2=\{a,b\}\cap X\neq\emptyset$ veya $G_1\cap G_2=X\cap X\neq\emptyset$ olduğundan (X,τ_5) düzenli uzay değildir. Dolayısıyla, (X,τ_5) uzayı, $T_3-\text{uzay}$ değildir. (X,τ_5) düzenli uzay olmadığı için tamamen düzenli uzay da değildir. Buna göre, (X,τ_5) uzayı tamamen düzenli ve $T_1-\text{uzay}$ olmadığından $T_{3\frac{1}{2}}-\text{uzay}$ değildir.

(X,τ_5) uzayının her ayrık kapalı K_1,K_2 alt küme çifti için; $K_1=\emptyset$ ve $K_2=X\Longrightarrow K_1\subset G_1,\ K_2\subset G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde

G_1,G_2 açık kümeleri vardır ve $G_1=\emptyset$, $G_2=X$ $K_1=\emptyset$ ve $K_2=\{c\}\Longrightarrow K_1\subset G_1,\ K_2\subset G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde G_1,G_2 açık kümeleri vardır ve $G_1=\emptyset$, $G_2=X$ şeklindedir. Dolayısıyla, (X,τ_5) normal uzaydır. (X,τ_5) normal uzayı aynı zamanda $T_1-\text{uzay}$ olmadığından (X,τ_5), $T_4-\text{uzay}$ değildir. Her $A\in\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$ için, $\overline{\emptyset}\cap A=\emptyset\cap\overline{A}=\emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve A ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset\subseteq G_1$, $A\subseteq G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde $G_1,G_2\in\tau_5$ vardır ve $G_1=\emptyset$, $G_2=X$ şeklindedir. Eğer, $A=\{a,b\}$ ise $G_2=X$ 'in dışında $G_2=\{a,b\}$ açık kümesi alınabilir. Sonuçta, $G_1=\emptyset$ olmasından dolayı G_2'nin her durumunda $G_1\cap G_2=\emptyset$ olmaktadır. Ayrıca yukarıdakiler dışında ayrılmış kümeler bulunmamaktadır. O halde, (X,τ_5) tamamen normal uzaydır. (X,τ_5) tamamen normal uzayı aynı zamanda $T_1-\text{uzay}$ olmadığından $T_5-\text{uzay}$ değildir.

(X,τ_5) normal uzayının her kapalı alt kümesi için $X=X\cap\emptyset^c$ ve $\emptyset=X\cap\emptyset$ şeklinde yazılabildiğinden $\emptyset$ ve X, $G_\delta-\text{kümesi}$ dir. Fakat $\{c\}\in\mathcal{K}^{\tau_5}$ kapalı alt kümesi sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılamadığından $\{c\}$, $G_\delta-\text{kümesi}$ değildir. Buna göre, (X,τ_5) mükemmel normal uzay değildir. Dolayısıyla (X,τ_5), T_6-uzay değildir.

Not 2: Her topolojik uzayın açıklar ve kapalılar ailesinde $\emptyset$ ve X mevcut olduğu için bunlar her zaman $X = X \cap \emptyset^c$ ve $\emptyset = X \cap \emptyset$ şeklinde yazılabilir. Dolaysıyla $\emptyset$ ve X kapalı kümeleri her zaman için $G_\delta-$kümesidir.

2.13.1.2 $X = \{a,b,c\}$, $\tau_{13} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\}$ ise (X,τ_{13}) uzayı için:

(X,τ_{13}) uzayı T_0-uzay değildir. Çünkü $a,c \in X$, $a \neq c$ için $a \in G$, $c \notin G$ veya $c \in G$, $a \notin G$ olacak şekilde $G \in \tau_{13}$ yoktur. (X,τ_{13}) uzayının kapalılar ailesi

$$\mathcal{K}^{\tau_{13}} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\}$$

şeklinde olup, (X,τ_{13}) uzayının tek elemanlı her alt kümesi kapalı olmadığından (X,τ_{13}), T_1-uzay değildir.

$$\left.\begin{array}{ll}\{a\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{a\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}} = \{a,c\} \subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{a\}} = \{a,c\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\} \subseteq \{b\}, & \{b\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}} = \{b\} \subseteq \{b\} \\ \overline{\{b\}} = \{b\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{c\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}} = \{a,c\} \subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{c\}} = \{a,c\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{c\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\{a,b\} \subseteq X,\ \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{a,b\}} = X \subseteq X\} \Rightarrow \{a,b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,c\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{a,c\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a,c\}} = \{a,c\} \subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{a,c\}} = \{a,c\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a,c\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\{b,c\} \subseteq X,\ \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{b,c\}} = X \subseteq X\} \Rightarrow \{b,c\},\ g-\text{kapalı}$$

olduğundan $g-$kapalı 'lar ailesi $G(X,\tau_{13}) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} = \mathcal{P}(X)$ ve $g-$açık 'lar ailesi de

$G'(X,\tau_{13}) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\} = \mathcal{P}(X)$ şeklinde olur. Diğer yandan, g^*- kapalı'lar ailesi

$$\left.\begin{array}{l}\{a\}\subseteq\{a\},\ \ \{a\}\ g-\text{açık}\\ \{a\}\subseteq\{a,b\},\ \ \{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{a\}\subseteq\{a,c\},\ \ \{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{a\}\subseteq X,\ \ X\ \ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}}=\{a,c\}\nsubseteq\{a\}\\ \overline{\{a\}}=\{a,c\}\nsubseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a\}}=\{a,c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a\}}=\{a,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{l}\{b\}\subseteq\{b\}\ ,\ \{b\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq\{a,b\}\ ,\ \{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq\{b,c\},\ \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq X\ \ ,\ X\ \ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{c\}\subseteq\{c\}\ ,\ \{c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq\{a,c\}\ ,\ \{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq\{b,c\},\ \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq X\ \ ,\ X\ \ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}}=\{a,c\}\nsubseteq\{c\}\\ \overline{\{c\}}=\{a,c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{a,c\}\nsubseteq\{b,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{a,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{l}\{a,b\}\subseteq\{a,b\},\{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{a,b\}\subseteq X\ \ \ ,\ \ X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}}=X\nsubseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a,b\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{l}\{a,c\}\subseteq\{a,c\},\{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{a,c\}\subseteq X\ \ \ ,\ \ X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{l}\{b,c\}\subseteq\{b,c\},\ \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{b,c\}\subseteq X,\ \ \ \ \ X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}}=X\nsubseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b,c\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$G^*(X,\tau_{13}) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\}$

olur. O halde

- Her $g^* -$ kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan $(X,\tau_{13}), T_{\frac{1}{2}}{}^* -$ uzaydır.
- Her $g -$ kapalı küme aynı zamanda $g^* -$ kapalı olmadığından (X,τ_{13}) uzayı ${}^*T_{\frac{1}{2}} -$ uzay değildir.
- Her $g -$ kapalı küme aynı zamanda kapalı olmadığından $(X,\tau_{13}), T_{\frac{1}{2}} -$ uzay değildir.

$a, c \in X,\ a \neq c$ için $a \in G_1$, $c \in G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ yoktur. O halde, (X,τ_{13}) uzayı $T_2 -$ uzay değildir. $a, c \in X,\ a \neq c$ için $a \in G_1$ olacak şekildeki G_1 açık kümesi $G_1 = X$ veya $G_1 = \{a,c\}$ ve $c \in G_2$ olacak şekildeki G_2 açık kümesi $G_2 = X$ veya $G_2 = \{a,c\}$ olup

$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{X} \cap \overline{X} = X \cap X \neq \emptyset$,
$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{X} \cap \overline{\{a,c\}} = X \cap \{a,c\} \neq \emptyset$

$\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{\{a,c\}} \cap \overline{\{a,c\}} = \{a,c\} \cap \{a,c\} \neq \emptyset$

olduğundan (X,τ_{13}) uzayı $T_{2\frac{1}{2}} -$ uzay değildir.

$a \in X,\ \{b\} \in \mathcal{K}^{\tau_{13}},\ a \notin \{b\}$ için $a \in G_1$, $\{b\} \subset G_2$ olacak şekilde $G_1 = \{a,c\}$, $G_2 = \{b\}$ açık kümeleri vardır ve $G_1 \cap G_2 = \{a,c\} \cap \{b\} = \emptyset$, $b \in X,\ \{a,c\} \in \mathcal{K}^{\tau_{13}},\ b \notin \{a,c\}$ için $b \in G_1$, $\{a,c\} \subset G_2$ olacak şekilde $G_1 = \{b\},\ G_2 = \{a,c\}, G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 \cap G_2 = \{b\} \cap \{a,c\} = \emptyset$, $c \in X,\ \{b\} \in \mathcal{K}^{\tau_{13}},\ c \notin \{b\}$ için $c \in G_1$, $\{b\} \subset G_2$ olacak şekilde $G_1 = \{a,c\},\ G_2 = \{b\}$, $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 \cap G_2 = \{a,c\} \cap \{b\} = \emptyset$ şeklinde olduğundan (X,τ_{13}) düzenli uzaydır. (X,τ_{13}) düzenli uzayı, $T_1 -$ uzay olmadığından $T_3 -$ uzay değildir. (X,τ_{13}) uzayındaki ayrık kapalı K_1, K_2 küme çifti için, $K_1 = \emptyset,\ K_2 = X \Longrightarrow K_1 \subset G_1,\ K_2 \subset G_2$ e $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset,\ G_2 = X$, $K_1 = \emptyset,\ K_2 = \{b\} \Longrightarrow K_1 \subset G_1,\ K_2 \subset G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset,\ G_2 = \{b\}$ $K_1 = \emptyset,\ K_2 = \{a, c\} \Longrightarrow K_1 \subset G_1,\ K_2 \subset G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset,\ G_2 = \{a, c\}$, $K_1 = \{b\},\ K_2 = \{a, c\} \Longrightarrow K_1 \subset G_1,\ K_2 \subset G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \{b\},\ G_2 = \{a, c\}$ şeklindedir. O halde, (X, τ_{13}) uzayı normal uzaydır. (X, τ_{13}) normal uzayı, $T_1 - \text{uzay}$ olmadığından $T_4 - \text{uzay}$ değildir. "(X, τ) *normal uzayının, düzenli uzay olması için gerek ve yeter koşul tamamen düzenli uzay olmasıdır*" teoremi gereğince (X, τ_{13}) normal uzayı aynı zamanda düzenli uzay olduğundan (X, τ_{13}) tamamen düzenli uzaydır. (X, τ_{13}) tamamen düzenli uzayı aynı zamanda $T_1 - \text{uzay}$ olmadığından $T_{3\frac{1}{2}} - \text{uzay}$ değildir.

$\overline{\emptyset} \cap X = \emptyset \cap \overline{X} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve X ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1,\ X \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1 = \emptyset,\ G_2 = X$ açık kümeleri vardır.

$\overline{\emptyset} \cap \{a\} = \emptyset \cap \overline{\{a\}} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve $\{a\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1,\ \{a\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1 = \emptyset,\ G_2 = \{a, c\}$ açık kümeleri vardır.

$\overline{\emptyset} \cap \{b\} = \emptyset \cap \overline{\{b\}} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve $\{b\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1, \{b\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset,\ G_2 = \{b\}$ şeklindedir.

$\overline{\emptyset} \cap \{c\} = \emptyset \cap \overline{\{c\}} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve $\{c\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1,\ \{c\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır $G_1 = \emptyset,\ G_2 = \{a, c\}$ şeklindedir.

$\overline{\emptyset} \cap \{a, c\} = \emptyset \cap \overline{\{a, c\}} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve $\{a, c\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1,\ \{a, c\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset, G_2 = \{a, c\}$ şeklindedir.

Her $A \in \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ kümesi için, $\overline{\emptyset} \cap A = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve A ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1,\ A \subseteq G_2$ ve

$G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır ve $G_1 = \emptyset,\ G_2 = X$ şeklindedir. Diğer yandan, $\{b\}$ kümesi ile her $B \in \{\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ kümesi için, $\overline{\{b\}} \cap B = \{b\} \cap \overline{B} = \emptyset$ olacağından $\{b\}$ ile B kümeleri ayrılmış kümelerdir. Buna göre, $\{b\} \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{13}$ vardır öyle ki $G_1 = \{b\}$, $G_2 = \{a,c\}$ şeklindedir. O halde (X,τ_{13}) uzayı, tamamen normal uzaydır. (X,τ_{13}) tamamen normal uzayı aynı zamanda $T_1 -$ uzay olmadığından $T_5 -$ uzay değildir. "*Not 2*" den dolayı, (X,τ_{13}) uzayının $\emptyset, X$ kapalı alt kümelerinin $G_\delta -$ kümesi olduğu aşikârdır. Bunların dışında, (X,τ_{13}) uzayının $\{b\},\{a,c\}$ kapalı alt kümeleri $\{b\} = \{b\} \cap X$, $\{a,c\} = \{a,c\} \cap X$ şeklinde sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılabildiğinden $\{b\},\{a,c\}$ kapalı alt kümeleri $G_\delta -$ kümesi dir. O halde, (X,τ_{13}) normal uzayının her kapalı alt kümesi $G_\delta -$ kümesi olduğundan (X,τ_{13}) mükemmel normal uzaydır. Fakat (X,τ_{13}) mükemmel normal uzayı, $T_1 -$ uzay olmadığından $T_6 -$ uzay değildir.

2.13.1.3 $X = \{a,b,c\}$, $\tau_{21} = \{\emptyset, X, \{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$ ise (X,τ_{21}) uzayı için;

$$a,b \in X,\ a \neq b \text{ için } b \in \{b\},\ a \notin \{b\} \text{ ve } \{b\} \in \tau_{21}$$

$$a,c \in X,\ a \neq c \text{ için } a \in \{a,b\},\ c \notin \{a,b\} \text{ ve } \{a,b\} \in \tau_{21}$$

$$b,c \in X,\ b \neq c \text{ için } b \in \{b\},\ c \notin \{b\} \text{ ve } \{b\} \in \tau_{21}$$

olduğundan (X,τ_{21}) $T_0 -$ uzaydır. (X,τ_{21}) uzayının kapalılar ailesi $\mathcal{K}^{\tau_{21}} = \{\emptyset, X, \{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ şeklinde olup, görüleceği üzere (X,τ_{21}) uzayının tek elemanlı her alt kümesi kapalı değildir. Gerçekten, $\{b\} \notin \mathcal{K}^{\tau_{21}}$ şeklindedir. O halde (X,τ_{21}) uzayı $T_1 -$ uzay değildir. (X,τ_{21}), $T_1 -$ uzay olmadığından T_2 ve $T_{2\frac{1}{2}}$ uzay da değildir.

$$\left.\begin{array}{ll} \{a\} \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\} \text{ açık} \\ \{a\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{a\},\ g - \text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\} \subseteq \{b\}, & \{b\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{b\} \\ \overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{a,b\} \\ \overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{b,c\} \\ \overline{\{b\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{b\},\ g-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{c\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}} = \{c\} \subseteq \{b,c\} \\ \overline{\{c\}} = \{c\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{c\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,b\} \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\} \text{ açık} \\ \{a,b\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}} = X \nsubseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a,b\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a,b\},\ g-\text{kapalı}$$

değil

$$\{a,c\} \subseteq X,\ \ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{a,c\}} = \{a,c\} \subseteq X\} \Rightarrow \{a,c\},\ \ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b,c\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{b,c\} \subseteq X, & X \text{ açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}} = X \nsubseteq \{b,c\} \\ \overline{\{b,c\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{b,c\},\ g-\text{kapalı}$$

değil

olduğuna göre, $g-$ kapalı'lar ailesi $G(X,\tau_{21}) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$ olur. Buna göre, $g-$ açık 'lar ailesi de $G'(X,\tau_{21}) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ şeklindedir. Diğer yandan, g^*- kapalı'lar ailesi,

$$\left.\begin{array}{ll}\{a\} \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\}\ g-\text{açık} \\ \{a\} \subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq \{a,b\} \\ \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{a\},\ \ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\} \subseteq \{b\}, & \{b\}\ g-\text{açık} \\ \{b\} \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\}\ g-\text{açık} \\ \{b\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık} \\ \{b\} \subseteq X, & X\ \ g-\text{açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{b\} \\ \overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{a,b\} \\ \overline{\{b\}} = X \nsubseteq \{b,c\} \\ \overline{\{b\}} = X \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{b\},\ \ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık} \\ \{c\} \subseteq X, & X\ \ g-\text{açık}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}} = \{c\} \subseteq \{b,c\} \\ \overline{\{c\}} = \{c\} \subseteq X\end{array}\right\} \Rightarrow \{c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,b\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\ g-\text{açık}\\ \{a,b\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}}=X\nsubseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a,b\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow \{a,b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\{a,c\}\subseteq X,\ \ X\ g-\text{açık}\}\Rightarrow \overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq X\}\Rightarrow \{a,c\},\ \ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b,c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{b,c\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}}=X\nsubseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b,c\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow \{b,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$G^*(X,\tau_{21})=\{\emptyset,X,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$$

olur. O halde,

- Her g^*- kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan (X,τ_{21}) $T_{\frac{1}{2}}{}^*-$ uzaydır.
- Her $g-$ kapalı küme aynı zamanda g^*- kapalı olduğundan (X,τ_{21}) uzayı $^*T_{\frac{1}{2}}-$ uzaydır.
- Her $g-$ kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan (X,τ_{21}) $T_{\frac{1}{2}}-$ uzaydır.

$b\in X$, $\{a\}\in\mathcal{K}^{\tau_{21}}$, $b\notin\{a\}$ için $b\in G_1$, $\{a\}\subset G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde $G_1,G_2\in\tau_{21}$ yoktur. Gerçekten, b'yi içeren açık kümeler $\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X$ ve $\{a\}$ kümesini kapsayan açık kümeler $\{a,b\}$, X olup $\{b\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$, $\{a,b\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$, $\{b,c\}\cap\{a,b\}\neq\emptyset$, $\{b\}\cap X\neq\emptyset$, $\{a,b\}\cap X\neq\emptyset$, $\{b,c\}\cap X\neq\emptyset$, $X\cap X\neq\emptyset$ şeklindedir. O halde (X,τ_{21}) düzenli uzay değildir. (X,τ_{21}) düzenli uzay olmadığından T_3 ve tamamen düzenli uzay değildir. Ayrıca, (X,τ_{21}) tamamen düzenli ve T_1 uzay olmadığı için $T_{3\frac{1}{2}}-$ uzay değildir.

$\{a\},\{c\}\in\mathcal{K}^{\tau_{21}}$ ayrık kapalıları için $\{a\}\subset G_1$, $\{c\}\subset G_2$ ve $G_1\cap G_2=\emptyset$ olacak şekilde $G_1,G_2\in\tau_{21}$ yoktur. Gerçekten, $\{a\},\{c\}$ ayrık kapalıları için $\{a\}$ kapalı kümesini kapsayan açık kümeler

$\{a,b\}, X$ ve $\{c\}$ kapalı kümesini kapsayan açık kümeler $\{b,c\}, X$ olduğu halde

$\{a,b\} \cap \{b,c\} \neq \emptyset$, $\{a,b\} \cap X \neq \emptyset$, $X \cap \{b,c\} \neq \emptyset$, $X \cap X \neq \emptyset$

şeklindedir. O halde (X, τ_{21}) normal uzay değildir. (X, τ_{21}) normal uzay ve T_1 uzay olmadığından $T_4 - \text{uzay}$ da değildir. Diğer yandan, $\overline{\{a\}} \cap \{c\} = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$ ve $\{a\} \cap \overline{\{c\}} = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset$ şeklindedir. Yani, $\overline{\{a\}} \cap \{c\} = \{a\} \cap \overline{\{c\}} = \emptyset$ olup $\{a\}$ ile $\{c\}$ kümeleri ayrılmış kümelerdir. Fakat $\{a\} \subseteq G_1$, $\{c\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{21}$ yoktur. Gerçekten, $\{a\}$ kümesini kapsayan açık kümeler $\{a,b\}, X$ ve $\{c\}$ kümesini kapsayan açık kümeler $\{b,c\}, X$ olmak üzere $\{a,b\} \cap \{b,c\} \neq \emptyset$, $\{a,b\} \cap X \neq \emptyset$, $X \cap \{b,c\} \neq \emptyset$, $X \cap X \neq \emptyset$ şeklindeydi. Bu nedenle, (X, τ_{21}) tamamen normal uzay değildir. O halde, $T_5 - \text{uzay}$ değildir.

(X, τ_{21}) normal uzayının her kapalı alt kümesi $G_\delta - \text{kümesi}$ değildir. Gerçekten, $\{a\} \in \mathcal{K}^{\tau_{21}}$ kapalı alt kümesini göz önüne alırsak, bu küme sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılamaz. O halde $\{a\}$, $G_\delta - \text{kümesi}$ değildir ve dolayısıyla (X, τ_{21}) mükemmel normal uzay değildir. (X, τ_{21}), mükemmel normal ve T_1 uzay olmadığından $T_6 - \text{uzayı}$ da değildir.

2.13.1.4 $X = \{a,b,c\}$, $\tau_{26} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ ise (X, τ_{26}) uzayı için;

$a,b \in X$, $a \neq b$ için $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$ ve $\{a\} \in \tau_{26}$

$a,c \in X$, $a \neq c$ için $c \in \{b,c\}$, $a \notin \{b,c\}$ ve $\{b,c\} \in \tau_{26}$

$b,c \in X$, $b \neq c$ için $c \in \{a,c\}$, $b \notin \{a,c\}$ ve $\{a,c\} \in \tau_{26}$

olduğundan (X, τ_{26}) , $T_0 - \text{uzaydır}$. $b,c \in X$, $b \neq c$ için c noktasını içeren fakat b noktasını içermeyen $\{a,c\} \in \tau_{26}$ açık kümesi mevcut iken, b noktasını içeren fakat c noktasını içermeyen bir $G \in \tau_{26}$ açık kümesi bulunamaz. Dolayısıyla (X, τ_{26}) $T_1 - \text{uzay}$ değildir. Yine, $b,c \in X$, $b \neq c$ için $b \in G_1, c \in G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde

$G_1, G_2 \in \tau_{26}$ yoktur. Gerçekten, b noktasını içeren açık kümeler $\{b,c\}, X$ ve c noktasını içeren açık kümeler $\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$ olup bunlar ayrık değildir. Yani, b ve c noktalarını içeren ayrık ve açık kümeler yoktur. O halde, (X,τ_{26}), T_2-uzay değildir. (X,τ_{26}), T_2-uzay olmadığı için $T_{2\frac{1}{2}}-$uzay da olamaz. (X,τ_{26}) uzayının kapalılar ailesi $\mathcal{K}^{\tau_{26}} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ şeklindedir.

$$\left.\begin{array}{ll} \{a\} \subseteq \{a\}, & \{a\} \text{ açık} \\ \{a\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{a\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq \{a\} \\ \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{a\}} = \{a\} \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{a\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \{b\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{b\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{b\}} = \{b\} \subseteq \{b,c\} \\ \overline{\{b\}} = \{b\} \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \{c\} \subseteq \{c\}, & \{c\} \text{ açık} \\ \{c\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{c\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{c\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{c\}} = \{b,c\} \not\subseteq \{c\} \\ \overline{\{c\}} = \{b,c\} \not\subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{c\}} = \{b,c\} \subseteq \{b,c\} \\ \overline{\{c\}} = \{b,c\} \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{c\},\ g-\text{kapalı}$$

değil

$$\{a,b\} \subseteq X,\ X \text{ açık}\} \Rightarrow \overline{\{a,b\}} = \{a,b\} \subseteq X\} \Rightarrow \{a,b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \{a,c\} \subseteq \{a,c\}, & \{a,c\} \text{ açık} \\ \{a,c\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{a,c\}} = X \not\subseteq \{a,c\} \\ \overline{\{a,c\}} = X \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{a,c\},\ g-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{ll} \{b,c\} \subseteq \{b,c\}, & \{b,c\} \text{ açık} \\ \{b,c\} \subseteq X, & X \text{ açık} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{\{b,c\}} = \{b,c\} \subseteq \{b,c\} \\ \overline{\{b,c\}} = \{b,c\} \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow \{b,c\},\ g-\text{kapalı}$$

olduğundan $g-$kapalı 'lar ailesi $G(X,\tau_{26}) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$ ve $g-$açık 'lar ailesi de $G'(X,\tau_{26}) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ şeklinde olur. Diğer yandan,

$$\left.\begin{array}{ll}\{a\}\subseteq\{a\}, & \{a\}\ g-\text{açık}\\ \{a\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{a\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{b\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\}\subseteq\{c\}, & \{c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{c\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}}=\{b,c\}\nsubseteq\{c\}\\ \overline{\{c\}}=\{b,c\}\nsubseteq\{a,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{b,c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{b,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\{a,b\}\subseteq X,\ X\ g-\text{açık}\}\Rightarrow\overline{\{a,b\}}=\{a,b\}\subseteq X\}\Rightarrow\{a,b\},\ g^*-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-\text{açık}\\ \{a,c\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,c\}}=X\nsubseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a,c\}}=X\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

değil

$$\left.\begin{array}{ll}\{b,c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-\text{açık}\\ \{b,c\}\subseteq X, & X\ g-\text{açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b,c\},\ g^*-\text{kapalı}$$

olduğuna göre $g^*-\text{kapalı}$ 'lar ailesi $G^*(X,\tau_{26})=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$ olur. O halde, (X,τ_{26}) uzayı için,

- Her $g^*-\text{kapalı}$ küme aynı zamanda kapalı olduğundan $T_{\frac{1}{2}}{}^*-$ uzaydır.
- Her $g-\text{kapalı}$ küme aynı zamanda $g^*-\text{kapalı}$ olduğundan ${}^*T_{\frac{1}{2}}-$ uzaydır.

- Her $g-$kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan $T_{\frac{1}{2}}-$uzaydır.

$c \in X$, $\{b\} \in \mathcal{K}^{\tau_{26}}$, $c \notin \{b\}$ için $c \in G_1$, $\{b\} \subset G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ yoktur. Yani, sırasıyla c noktasını içeren ve $\{b\}$ kümesini kapsayan ayrık ve açık kümeler yoktur. Gerçekten, c noktasını içeren açık kümeler $\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X$ ve $\{b\}$ kümesini kapsayan açık kümeler $\{b,c\}, X$ olduğu halde bunlar ayrık değildir. Dolayısıyla, (X, τ_{26}) düzenli uzay değildir. (X, τ_{26}) düzenli uzay olmadığından T_3 ve tamamen düzenli uzay değildir. Buna göre, (X, τ_{26}) tamamen düzenli ve T_1 uzay olmadığı için $T_{3\frac{1}{2}}-$uzay da değildir. (X, τ_{26}) uzayının ayrık ve kapalı küme çiftleri;

$\rightarrow$ $\emptyset$ ve X, $\emptyset$ ve $\{a\}$, $\emptyset$ ve $\{b\}$, $\emptyset$ ve $\{a,b\}$, $\emptyset$ ve $\{b,c\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan ayrık $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ açık kümeleri vardır ve $G_1 = \emptyset, G_2 = X$ şeklindedir.

$\rightarrow$ $\{a\}$ ve $\{b\}$, $\{a\}$ ve $\{b,c\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan ayrık $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ açık kümeleri vardır öyle ki $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{b,c\}$ şeklindedir.

O halde, (X, τ_{26}) normal uzaydır. Fakat (X, τ_{26}) normal uzayı aynı zamanda T_1-uzay olmadığından T_4-uzay değildir.

Her $A \in \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$ için $\overline{\emptyset} \cap A = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$ şeklinde yazılabildiğinden $\emptyset$ ve A ayrılmış kümelerdir ve $\emptyset \subseteq G_1$, $A \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ vardır öyle ki $G_1 = \emptyset$, $G_2 = X$ şeklindedir. Diğer ayrılmış küme çiftleri ise;

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\{a\}} \cap \{b\} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \\ \{a\} \cap \overline{\{b\}} = \{a\} \cap \{b\} = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\{a\}} \cap \{b\} = \{a\} \cap \overline{\{b\}} = \emptyset$$

olduğundan $\{a\}$ ve $\{b\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\{a\} \subseteq G_1$, $\{b\} \subseteq G_2$ ve $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ vardır öyle ki $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{b, c\}$ şeklindedir.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\{a\}} \cap \{c\} = \{a\} \cap \{c\} = \emptyset \\ \{a\} \cap \overline{\{c\}} = \{c\} \cap \{b, c\} = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\{a\}} \cap \{c\} = \{a\} \cap \overline{\{c\}} = \emptyset$$

olduğundan $\{a\}$ ve $\{c\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\{a\} \subseteq G_1$, $\{c\} \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ vardır öyle ki $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{c\}$ şeklindedir.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\{a\}} \cap \{b, c\} = \{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \\ \{a\} \cap \overline{\{b, c\}} = \{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\{a\}} \cap \{b, c\} = \{a\} \cap \overline{\{b, c\}} = \emptyset$$

olduğundan $\{a\}$ ve $\{b, c\}$ ayrılmış kümelerdir ve $\{a\} \subseteq G_1$, $\{b, c\} \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{26}$ vardır ve $G_1 = \{a\}, G_2 = \{b, c\}$ şeklindedir.

O halde, (X, τ_{26}) tamamen normal uzaydır, fakat bu (X, τ_{26}) tamamen normal uzayı aynı zamanda $T_1 - \text{uzay}$ olmadığından $T_5 - \text{uzay}$ değildir. (X, τ_{26}) normal uzayının $\{b\} \in \mathcal{K}^{\tau_{26}}$ kapalı alt kümesi, sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılamadığı için $G_\delta - \text{kümesi}$ değildir. Dolayısıyla, (X, τ_{26}) mükemmel normal uzayı değildir. (X, τ_{26}), mükemmel normal ve T_1 uzayı olmadığından dolayı $T_6 - \text{uzayı}$ değildir.

2.13.1.5 $X = \{a, b, c\}$, $\tau_{29} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ise (X, τ_{29}) uzayı için;

$a, b \in X$, $a \neq b$ için $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$ ve $\{a\} \in \tau_{29}$

$a, c \in X$, $a \neq c$ için $c \in \{c\}$, $a \notin \{c\}$ ve $\{c\} \in \tau_{29}$

$b, c \in X$, $b \neq c$ için $b \in \{b\}$, $c \notin \{b\}$ ve $\{b\} \in \tau_{29}$

olduğundan (X, τ_{29}), $T_0 - \text{uzaydır}$. (X, τ_{29}) uzayının kapalılar ailesi

$$\mathcal{K}^{\tau_{29}} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} = \mathcal{P}(X)$$

şeklindedir. Buna göre, (X,τ_{29}) uzayının tek elemanlı her alt kümesi kapalı olduğundan (X,τ_{29}) uzayı T_1- uzaydır.

$$\left.\begin{array}{ll}\{a\}\subseteq\{a\}, & \{a\}\text{ açık}\\ \{a\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\text{ açık}\\ \{a\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\text{ açık}\\ \{a\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\}\subseteq\{b\}, & \{b\}\text{ açık}\\ \{b\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\text{ açık}\\ \{b\}\subseteq\{a,c\}, & \{b,c\}\text{ açık}\\ \{b\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\}\subseteq\{c\}, & \{c\}\text{ açık}\\ \{c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\text{ açık}\\ \{c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\text{ açık}\\ \{c\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{c\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,b\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\text{ açık}\\ \{a,b\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}}=\{a,b\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a,b\}}=\{a,b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,b\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\text{ açık}\\ \{a,c\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,c\},\ g-\text{kapalı}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b,c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\text{ açık}\\ \{b,c\}\subseteq X, & X\text{ açık}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b,c\},\ g-\text{kapalı}$$

olduğundan $g-$kapalı'lar ailesi $G(X,\tau_{29})=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}=\mathcal{P}(X)$ ve buna göre $g-$açık'lar ailesi de $G'(X,\tau_{29})=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}=\mathcal{P}(X)$ şeklinde olur. Diğer yandan, g^*-kapalı'lar ailesi

$$\left.\begin{array}{ll}\{a\}\subseteq\{a\}, & \{a\}\ g-açık\\ \{a\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\ g-açık\\ \{a\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-açık\\ \{a\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a\}}=\{a\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a\},\ g^*-kapalı$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b\}\subseteq\{b\}, & \{b\}\ g-açık\\ \{b\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\ g-açık\\ \{b\}\subseteq\{a,c\}, & \{b,c\}\ g-açık\\ \{b\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b\}}=\{b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b\},\ g^*-kapalı$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{c\}\subseteq\{c\}, & \{c\}\ g-açık\\ \{c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-açık\\ \{c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-açık\\ \{c\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{c\}}=\{c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{c\},\ g^*-kapalı$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,b\}\subseteq\{a,b\}, & \{a,b\}\ g-açık\\ \{a,b\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,b\}}=\{a,b\}\subseteq\{a,b\}\\ \overline{\{a,b\}}=\{a,b\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,b\},\ g^*-kapalı$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{a,c\}\subseteq\{a,c\}, & \{a,c\}\ g-açık\\ \{a,c\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq\{a,c\}\\ \overline{\{a,c\}}=\{a,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{a,c\},\ g^*-kapalı$$

$$\left.\begin{array}{ll}\{b,c\}\subseteq\{b,c\}, & \{b,c\}\ g-açık\\ \{b,c\}\subseteq X, & X\ g-açık\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq\{b,c\}\\ \overline{\{b,c\}}=\{b,c\}\subseteq X\end{array}\right\}\Rightarrow\{b,c\},\ g^*-kapalı$$

$$G^*(X,\tau_{29})=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}=\mathcal{P}(X)$$

olur. O halde, (X,τ_{29}) uzayı için,

- Her g^*-kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan $T_{\frac{1}{2}}^*-$uzaydır.
- Her $g-$kapalı küme aynı zamanda g^*-kapalı olduğundan ${}^*T_{\frac{1}{2}}-$uzaydır.

- Her $g-$ kapalı küme aynı zamanda kapalı olduğundan $T_{\frac{1}{2}}-$ uzaydır.

$\rightarrow$ $a,b \in X$, $a \neq b$ için $a \in G_1, b \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{a\}, G_2 = \{b\}$ şeklindedir.

$\rightarrow$ $a,c \in X$, $a \neq c$ için $a \in G_1, c \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{a\}, G_2 = \{c\}$ şeklindedir.

$\rightarrow$ $b,c \in X$, $b \neq c$ için $b \in G_1, c \in G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{b\}, G_2 = \{c\}$ şeklindedir.

O halde (X, τ_{29}), T_2- uzaydır.

⇨ $a,b \in X$, $a \neq b$ için $a \in G_1, b \in G_2$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{b\}$ şeklinde olup $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} = \{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$ şeklindedir.

⇨ $a,c \in X$, $a \neq c$ için $a \in G_1, c \in G_2$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{c\}$ şeklinde olup $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{\{a\}} \cap \overline{\{c\}} = \{a\} \cap \{c\} \neq \emptyset$ şeklindedir.

⇨ $b,c \in X$, $b \neq c$ için $b \in G_1, c \in G_2$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{b\}$, $G_2 = \{c\}$ şeklinde olup $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = \overline{\{b\}} \cap \overline{\{c\}} = \{b\} \cap \{c\} \neq \emptyset$ şeklindedir.

O halde (X, τ_{29}), $T_{2\frac{1}{2}}-$ uzaydır.

➚ $a \in X$ noktası için bu noktayı içermeyen kapalı kümeler $\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}$ şeklindedir. Buna göre, a noktasını içeren ve $\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}$ kapalı kümelerini kapsayan sırasıyla $\{a\}$ ve $\{b,c\}$ açık kümeleri vardır ve bunlar ayrıktır.

➚ $b \in X$ noktası için bu noktayı içermeyen kapalı kümeler $\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}$ olup, b noktasını içeren açık küme $\{b\}$ ve $\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}$ kapalı kümelerini kapsayan açık küme $\{a,c\}$ vardır ve $\{b\} \cap \{a,c\} = \emptyset$ şeklindedir. Yani, $\{b\}$ ile $\{a,c\}$ ayrık açık kümelerdir.

$c \in X$ noktası için bu noktayı içermeyen kapalı kümeler $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$ şeklindedir. Buna göre, c noktasını içeren açık küme $\{c\}$ ve $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}$ kapalı kümelerini kapsayan açık küme $\{a,b\}$ mevcuttur ve $\{c\} \cap \{a,b\} = \emptyset$ şeklindedir. Yani, c noktası ile bu noktayı içermeyen kapalı kümeleri kapsayan ayrık ve açık kümeler mevcuttur.

O halde (X, τ_{29}), düzenli uzaydır. (X, τ_{29}), düzenli ve T_1 uzayı olduğundan bu uzay aynı zamanda $T_3 - \mathbf{uzay}$dır. (X, τ_{29}) uzayının ayrık ve kapalı küme çiftleri;

$\Rightarrow \emptyset$ ve X, $\emptyset$ ve $\{a\}$, $\emptyset$ ve $\{b\}$, $\emptyset$ ve $\{c\}$, $\emptyset$ ve $\{a,b\}$, $\emptyset$ ve $\{a,c\}$, $\emptyset$ ve $\{b,c\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan ayrık $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \emptyset, G_2 = X$ şeklindedir.

$\Rightarrow \{a\}$ ve $\{b\}$, $\{a\}$ ve $\{c\}$, $\{a\}$ ve $\{b,c\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan ayrık $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{a\}$, $G_2 = \{b,c\}$ şeklindedir.

$\Rightarrow \{b\}$ ve $\{c\}$, $\{b\}$ ve $\{a,c\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{b\}$, $G_2 = \{a,c\}$ şeklindedir.

$\Rightarrow \{c\}$ ve $\{a,b\}$ ise bunlardan her biri için sırasıyla bunları kapsayan $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{c\}$, $G_2 = \{a,b\}$ şeklindedir.

O halde, (X, τ_{29}) normal uzaydır. (X, τ_{29}), normal ve T_1 uzayı olduğundan bu uzay $T_4 - \mathbf{uzay}$dır. "*(X, τ) normal uzayının, düzenli uzay olması için gerek ve yeter koşul tamamen düzenli uzay olmasıdır*" teoremi gereğince (X, τ_{29}) normal uzayı aynı zamanda düzenli uzay olduğundan (X, τ_{29}) tamamen düzenli uzaydır. (X, τ_{29}), tamamen düzenli ve T_1 uzayı olduğu için bu uzay $T_{3\frac{1}{2}} - \mathbf{uzay}$dır.

➠ Her $A \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$ için $\overline{\emptyset} \cap A = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset$ ve A ayrılmış kümelerdir ve

$\emptyset \subseteq G_1, A \subseteq G_2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \emptyset, G_2 = X$ şeklindedir.

➠ $\{a\}$ kümesi ile her $B \in \{\{b\},\{c\},\{b,c\}\}$ için $\overline{\{a\}} \cap B = \{a\} \cap \overline{B} = \emptyset$ olduğundan $\{a\}$ ile her bir B küme çifti ayrılmış kümelerdir. Buna göre, $\{a\} \subseteq G_1$, $B \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır ve $G_1 = \{a\}, G_2 = \{b, c\}$ şeklindedir.

➠ $\{b\}$ kümesi ile her $C \in \{\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ için $\overline{\{b\}} \cap C = \{b\} \cap \overline{C} = \emptyset$ olduğundan $\{b\}$ ile her bir C küme çifti ayrılmış kümelerdir. Buna göre, $\{b\} \subseteq G_1$, $C \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{b\}, G_2 = \{a, c\}$ şeklindedir.

➠ $\{c\}$ kümesi ile her $D \in \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ için $\overline{\{c\}} \cap D = \{c\} \cap \overline{D} = \emptyset$ olduğundan $\{c\}$ ile her bir D küme çifti ayrılmış kümelerdir. Buna göre, $\{c\} \subseteq G_1$, $D \subseteq G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ olacak şekilde $G_1, G_2 \in \tau_{29}$ vardır öyle ki $G_1 = \{c\}, G_2 = \{a, b\}$ şeklindedir.

O halde, (X, τ_{29}) tamamen normal uzaydır. (X, τ_{29}) tamamen normal uzayı aynı zamanda $T_1 - \text{uzay}$ olduğundan (X, τ_{29}) , $T_5 - \text{uzay}$ dır. (X, τ_{29}) normal uzayının her kapalı alt kümesi $G_\delta - \text{kümesi}$ dir. Gösterelim. *"Not 2"* den dolayı (X, τ_{29}) uzayının $\emptyset, X$ kapalı alt kümelerinin $G_\delta - \text{kümesi}$ olduğu aşikârdır. (X, τ_{29}) uzayının diğer kapalı alt kümeleri,

$\{a\} = \{a\} \cap \{ab\}$, $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\}$, $\{c\} = \{c\} \cap \{a, c\}$

$\{a, b\} = X \cap \{ab\}$, $\{a, c\} = X \cap \{a, c\}$, $\{b, c\} = X \cap \{b, c\}$

şeklinde sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılabildiğinden $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ kapalı alt kümeleri $G_\delta - \text{kümesi}$ dir. O halde (X, τ_{29}) normal uzayının her kapalı alt kümesi $G_\delta - \text{kümesi}$ olduğundan (X, τ_{29}) uzayı mükemmel normal uzaydır. (X, τ_{29}) mükemmel normal uzayı aynı zamanda $T_1 - \text{uzayı}$ olduğundan (X, τ_{29}), $T_6 - \text{uzay}$dır.

BULGULAR

Bu çalışmada, ayırma aksiyomlarının birbirleriyle olan ilişkileri incelenmiş ve şekil 1 ′de gösterilmiştir. Yine, bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerinde oluşturulabilecek bütün topolojik yapılar için elde edilen topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı tablo 1′de verilmiştir. Bu tabloda yer alan topolojik uzaylardan bazılarının, ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını gösteren çözümlerine yer verilmiştir.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Ayırma aksiyomları hakkında daha önce yapılmış çalışmalar bulunmasına karşın, kısıtlı sayıda aksiyomlar ele alınarak incelenmiştir. Bu çalışmada, geniş bir literatür taraması sonucunda daha önce yapılmış çalışmalara ek olarak, farklı küme sınıfları üzerinde tanımlanmış farklı aksiyomlar da ele alınmıştır. Bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerinde elde edilen bütün topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını gösteren çalışmalar kısıtlı sayıda aksiyomlar üzerine uygulanmış iken, bu çalışma sayesinde daha fazla aksiyomlar üzerine uygulanabilme olanağına sahip olmuştur.

ÖNERİLER

Bu çalışmada yer alan aksiyomlar dışında farklı aksiyomlar da mevcut olup bunlar üzerinde çalışmalar yapılabilir. Ayrıca, farklı küme sınıfları üzerinde çalışmalar yapılarak literatürde yer alamayan yeni ayırma aksiyomları elde edilebilir. Bu çalışmada, bir, iki ve üç elemanlı kümeler üzerinde elde edilen bütün topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı tablo 1′de verilmiştir. Bu tabloya, yeni ayırma aksiyomları eklenebileceği gibi dört veya daha fazla elemana sahip kümeler üzerinde elde edilen bütün topolojik uzayların ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını gösteren sonuçlar da eklenebilir. Kümenin eleman sayısı arttıkça küme üzerinde oluşturulabilecek bütün topolojik yapıları ve bunların sayısını belirlemek kolay bir iş değildir. Bu nedenle, herhangi bir programlama dili yardımıyla bu işi daha basite indirgeyecek bir yazılım geliştirilebilir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve yayınlanmasında emeği geçen herkese sonsuz şükran ve minnetlerimizi arz etmeyi bir borç biliriz.

KAYNAKLAR

Aslım, G. 1988. *Genel Topoloji*, Yayın No:109, s.223, İzmir, Ege Üniversitesi Basımevi.

Yıldız, C. 2005. *Genel Topoloji*, s.336, Ankara, Gazi Kitabevi.

Steen L. A. and Seeback J. A. 1995. *Counterexamples In Topology*, 244p. , New York, Dover Publications Inc.

Willard, S. 2004. *General Topology*, 384p. , New York, Dover Publications Inc.

Çakallı, H. 1997. *Genel Topolojiye Giriş (Birinci Cilt)*, s.208, İstanbul, İ.Ü Fen Fakültesi Basımevi.

Bilge, Ö. 2005. *Topolojik Gruplar ve Ayırma Aksiyomları Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi.

Erdoğan, A. 2003. *Topolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları Üzerine*, Yüksek Lisans tezi, Selçuk Üniversitesi.

URL-1, Separation Axioms for Topological Spaces, (2011) 02.08.2011
http://en.wikibooks.org/wiki/Topology/Separation_Axioms

URL-2, Ayrılma Belitleri, (2011) 08.06.2011
http://tr.wikipedia.org/wiki/Ayr%C4%B1lma_belitleri

****