Felsefe Arkivi, 42. Sayı, 2015/I, 33-40

PEIRCE'TE SAYININ TEMELLENDİRİLMESİ

Peirce's Foundation of Number

Özgüç Güven*

ÖZET

Bu makalede Peirce'ün sayıyı temellendirmesi ele alınmaktadır. Peirce, 1881 yılında yazdığı 'Sayının Mantığı' adlı makalesiyle sayılar için aksiyomatik bir temellendirme önerir. Söz konusu temellendirme için Peirce bağıntılar mantığını kullanır. Peirce'e göre aritmetik önermeler az sayıda temel önermelerden kıyas yoluyla elde edilir. Sayılara yönelik bu yaklaşım Peirce'ü Dedekind, Peano, Frege çizgisine katar. Bu makale Peirce'ün sayıyı nasıl aksiyomatikleştirdiğini, hangi tanımları verdiğini ve yaklaşımının özgün yanlarını ortaya koymayı amaçlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Sayının Temellendirilmesi, Peirce, Dedekind, Peano

ABSTRACT

This paper focuses on Peirce's apprehension of founding number. In 1881 Peirce wrote a paper called 'On the Logic of Number' which contains axiomatization of numbers. Peirce used the logic of relations for axiomatization. He argues that arithmetical propositions are syllogistic consequences from a few primary propositions. In this paper, it is intended to indicate how did Peirce axiomatize arithmetic, which definitions did he give and to determine his distinctive approach concerning foundation.

Keywords: Foundation of Number, Peirce, Dedekind, Peano

* Yrd. Doç. Dr., İstanbul Üniversitesi, Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü

Tüm rasyonel ve irrasyonel sayılar, bunların bileşimi olan real sayılar, küme-kuramsal yordamlar yoluyla oluşturulabilirken doğal sayılar için durum farklıdır. Bu nedenle 19. ve 20. yüzyıl boyunca filozof matematikçiler, doğal sayıları daha temel öğelere indirgeyebilmenin yollarını arar. Böylesi bir çabadan umudunu kesen Leopold Kronecker (1823-1891) ünlü cümlesinde şöyle demektedir: *"doğal sayılar Tanrı aracılığıyla verildi, gerisini insanoğlu düzenledi"*.[1] Elbette konu hakkında çalışan matematik kökenli bütün filozoflar böyle düşünmez. Sözgelimi Richard Dedekind (1831-1916), Peano (1858-1932) ve Gottlob Frege[2] (1848-1925) doğal sayıları daha temel öğelere indirgemeye çalışır. Bu bağlamda, Frege, 1884 yılında **Aritmetiğin Temelleri**'ni; Dedekind, 1888 yılında aritmetiğin **Sayılar Nedir ve Ne Olmalıdır?**'ı (Was sind und was sollen die Zahlen?), Peano, 1889 yılında **Yeni Bir Yönteme Göre Sunulmuş Aritmetiğin İlkeleri**'ni (Aritmetices Principia Nova Methodo Exposita) kaleme alır. Bütün bu isimlerin yanı sıra sayıları temellendirmeye yönelik bir başka çaba Charles Sanders Peirce'ten (1839-1914) gelir. Peirce, doğal sayıları aksiyomatikleştirme yoluyla temellendirmek için 1881 yılında, Dedekind ve Peano'dan önce **Sayının Mantığı Üstüne** (On the Logic of Number) [3] adlı makalesini yazar. Bu çalışma söz konusu makaleden yola çıkarak Peirce'ün sayıları aksiyomatikleştirme yoluyla nasıl temellendirmeye çalıştığını incelemektedir.

Belirttiğimiz üzere Peirce, sayıyı aksiyomatikleştirme yoluyla temellendirmek amacıyla 1881 yılında **Sayının Mantığı Üstüne**'yi yazar.[4] Söz konusu temellendirme için Peirce bağıntılar mantığını kullanır. Bağıntılar mantığı, mantığın gelişimi açısından önemli bir aşamaya karşılık gelir. Bilindiği gibi Aristoteles'ten 19. yüzyıla kadar süren uzun bir dönem boyunca mantıkta köklü bir değişim yaşanmamıştır. Klasik mantığın yapısında köktenci ilk büyük değişiklik 19. yüzyılda Frege eliyle gerçekleştirilir. Frege'nin niceleme mantığını ortaya koymasıyla mantığın kapsamı ve yapabildikleri artar. Yukarıda dikkat çektiğimiz üzere aritmetiği temellendirme çabasında olan Frege bu uğurda Aristoteles mantığının yetersiz olduğuna inanır. İşte bu yetersizlik Frege'nin niceleme mantığını ortaya koymasıyla aşılır. Aynı biçimde Frege'den bağımsız olarak Peirce de aritmetiği temellendirmek için yeni bir mantık olan bağıntılar mantığını ortaya koyar.

1 Aktaran Herman Weyl, **Philosophy of Mathematics and Natural Science**, New York, Atheneum, 1963, s. 33.

2 Frege'de sayının temellendirilmesi için Bkz., Özgüç güven, "Frege'de Sayının Temellendirilmesi",Kutadgubilig, 23, 2013, s. 68-89.

3 Peirce'e yapılacak alıntılar için The Collected Papers of Charles Sanders Peirce, I-VI ciltler ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss, Cambridge, MA Harvard University Press, 1931-1935, VII-VIII. ciltler ed. Arthur W. Burks, Harvard University Press, 1958. Gönderimi yapılan yerin ilk bölümü cildi, ikinci kısmı sayfa numarasını verir.

4 Bu çalışmasından önce 1867 yılında 'Upon the Logic of Mathematics' adında bir çalışma yayımlar. Peirce, Boole cebiri etkisiyle yazdığı bu çalışmasını daha sonra kötü olarak niteler. (Peirce 4.333)

Peirce'ün notasyonu[5] Frege'nin niceleme mantığını simgeleştirdiği notasyondan farklı olmakla birlikte her iki notasyon da bugünkünden ayrıdır. Yine de gerek Frege'nin gerek Peirce'ün önerdiği mantık anlayışı Aristoteles'ten sonra mantıkta yaşanan değişikliğin önemli bileşenlerindendir.

Bu bağlamda Peirce'ün Aristoteles mantığının sınırlılığını aşan mantık anlayışını ortaya koyan iki temel makalesini anmak gerekir. Bunlarda ilki 1870 yılında kaleme aldığı **Boole Cebir'in Geliştirilmesinden Kaynaklanan Bağıntılar Mantığı için Notasyon Betimlemesi** (Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus) adlı çalışmasıdır. Burada Peirce, bağıntılar mantığını ortaya koyar. Diğeri ise 1885 yılında yazdığı **Mantığın Cebri Üstüne: Notasyonlar Felsefesine Katkı** (On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notations) adlı makalesidir. Burada ise mantığı niceleştirmeyi önerir.

Peirce, 1870 tarihli makalesinde bağıntılar mantığı üç çeşit mantık terimi belirler bunlar mutlak, basit bağıntı ve bağlı (conjugative).[6] Mutlak olarak tanımlanan terimler bir niteliğin kavranışıyla ilgilidir. Bu tür terimler bir şeyi 'a—' olarak gösterir. Peirce açısından bu terimlerin gösterdiği nesneleri ayırt etmek için çabalamak gerekmez. Örneğin bir at, ağaç ya da insan mutlak terimlerin gösterdiği nesnelerdir. İkinci tür terimin mantıksal biçimi bağıntıyı içerir. Burada tam bir gönderimde bulunmak için başka bir terime gereksinim duyulur. Örneğin ...'ın babası, ...'ın oyuncağı basit bağıntılardır. Üçüncü tür olan bağlı terimlerde ise mantıksal biçim açısından, tam bir gönderimin yapılması için bir ya da daha fazla terime gereksinim duyulur. Örneğin ...'ın ... için satışı ya da ...'ya .... 'yı veren bu türde bağlı terimlerdir. Bu ayrımlardan sonra Peirce bu terimlerin gösterimini de özelleştirir.

Peirce'ün 1885 tarihli makalesi ise birinci-düzey ve ikinci-düzey yüklemler mantığını, Peirce'ün diliyle söylersek 'birinci-içlemsel bağıntılar mantığını' ve 'ikinci-içlemsel bağıntılar mantığını' içerir.

Peirce, yukarıda anılan çalışmalarıyla özellikle de bağıntılar mantığı aracılığıyla sayıyı aksiyomlaştırmak için gereken zemini oluşturur. Şimdi bu durumun nasıl gerçekleştiğini konu edelim.

Sayının Mantığı Üstüne'nin ilk bölümcesinde Peirce amacını şu sözlerle anlatır: "Sayıya ilişkin ilk (elemantary) önermelerden kimse kuşku duyamaz: bu tür ilk önermeler ilk bakışta besbelli doğru görünmemelerine karşın olağan (usual) kanıtlamalarla doğru durumuna gelir. Ne var ki, onların doğru olduğunu görmemize karşın, öyle kolayca, neden kesin olarak (precisely) doğru olduklarını görmeyiz; bu yüzden

5 Peirce felsefesi hakkında çalışırken önemli bir güçlük kullanılan notasyonla ilgilidir. Peirce'ün dönemin mantık ve matematik geleneğinin dışında kalmış olması ve son derece özgün bir filozof olması kendi dil ve notasyonunu kullanmasına yol açar.

6 **Bkz., Peirce** 3.63.

ünlü bir İngiliz mantıkçı bu önermelerin evrenin tüm bölümlerinde doğru olup olmadığından kuşku duymaktadır. Bu makalenin amacı bu tür önermelerin, kesin olarak (strictly) az sayıda ana (primary) önermelerden elde edilen tasımsal (syllogistic) sonuçlar olduğunu göstermektir. Tanımlar olarak nitelediğim, ana önermelerin mantıksal kökeni sorunu ayrı bir tartışmayı gerektirir. *"* (Frege, **3.252**)

Görüldüğü üzere Peirce açısından sayı önermeleri, az sayıda ana önermeden elde edilen tasımsal sonuçlardır. Bu bakımdan Peirce, Frege'nin mantıkçılık anlayışına yaklaşıyor görünebilir. Anımsanacağı gibi Frege ardından Russell aritmetiğin mantık ilkelerine indirgenebileceğini öne sürer.

Peirce, **Sayının Mantığı Üstüne**'yi yazmadan önce henüz 1866 yılındayken bile "matematiksel kanıtlamanın tasıma indirgenebileceğini" öne sürer. Ardından 1867 yılında yazdığı **Matematiğin Mantığı Üstüne** (Upon the Logic of Mathematics) adlı çalışmasında ise şunları dile getirir: "Bu makalenin amacı, matematiğin doğruluklarının tasımsal olarak izlenebileceği genel önermelerin olduğunu göstermektir. Bu önermeler matematikçinin ilgilendiği nesnelerin tanımları olarak alınabilir" (Peirce, **3.20**)

Peirce sayı önermelerini türettiği ana önermeleri herhangi bilgi kuramsal temellendirmeye başvurmaksızın konu eder. Bu çerçevede böylesi önermeler için gerekli olduğu ileri sürülebilecek yetileri sözgelimi görü vb. konu etmez. Peki ana önermeler nelerdir?

Peirce ana önermeleri 5 tanımla ya da aksiyomla açıklar: İlk tanım nicelikle ilgilidir.

Birinci Tanım: *r* herhangi bir bağıntılı terim olsun. Böylece herhangi bir şey ile başka bir şeyin arasında *r* olduğu söylenebilir ve bu başka şey, ilk şeyden *r* edilmiştir.

Nesnelerin belli bir dizgesinde [Peirce küme yerine dizgeyi/sistemi kullanır] bir şeyin *r*'sinin [aRb] *r*'si [bRc] olan herhangi bir şeyin kendisi o şeyin *r*'si [aRc] ise bu durumda *r*, o dizgede geçişli bir bağıntı (transitive relatives) oluştur.

$$[\forall\ a,b,c \in X,(aRb \wedge bRc)\rightarrow aRc]$$

Örneğin "herşeyi seven ... tarafından sevilir (lover of everything loved by) türünde bağıntılar geçişli bağıntılardır. *r*'nin geçişli bir bağıntı olduğu dizgede, herhangi bir şeyin *q*'su o şeyin kendisini ve o şey tarafından r edilmemiş o şeyin her r'sini içersin. Bu durumda *q* niceliğin temel bir bağıntısı (fundamental relative of quantity) olarak adlandırılabilir. Özellikleri ise şöyledir: ilkin geçişlidir; ikincisi dizge içindeki her şey kendisinin *q*'sudur; üçüncüsü kendisi dışında hiçbir şey bir şeyin hem *q*'su hem de o şey tarafından *q* edilmiş değildir. Niceliğin temel bağıntısına sahip nesnelerin dizgesine nicelik adı verilir ve böylesi bir dizge nicelik dizgesi olarak adlandırılır. (Peirce, **3.253**)

İkinci tanım: Peirce bu aksiyomda *basit niceliği* tanımlar. İki nicelikten biri diğerinin *q*'su olan dizgeye basit denir. (Peirce, **3.254**)

Üçüncü tanım: Burada Peirce, 'bir sonrakinden daha büyük olma' bağıntısını '... dan büyük olma' yoluyla açıklar. Her ne kadar Peirce, '... dan büyük olma'yı tanımlamamış olsa da, onun niceliğin temel bağıntısı yoluyla tanımlanabileceğini düşünür. Şöyle ki:

x, y den büyüktür ancak ve ancak x, y'nin *q*'su ise ve y, x'in *q*'su değilse. Bu durumda x, y'nin *q*'sudur; y, x'in *q*'su değildir; tüm z'ler için z, y'nin *q*'su ise y, z'nin *q*'su değildir, öyleyse z, x'in *q*'sudur.

Dördüncü Tanım: Bir *basit nicelik* dizgesi, *sürekli*, *ayrık* ya da *karmadır*. (Peirce, **3.256)**

Sürekli bir dizge, biri diğerinden daha büyük olan her niceliğin aynı zamanda diğerinden daha büyük olan bazı aracı niceliklerden de daha büyük olduğu dizgedir.

Ayrık bir dizge, diğerinden daha büyük olan her niceliğin sonraki bazı niceliklerden daha büyük olduğu (eş deyişle, daha büyük olan bir şeyden daha büyük bir şey olmaksızın daha büyük olarak) dizgedir.

Karma bir dizge, bazı nicelikler bazı niceliklerden büyük iken, diğerlerinden daha büyük olan dizgedir.

Bir ayrık nicelik dizgesi sınırlı, yarı sınırlı ya da sınırsızdır. Sınırlı bir dizge bir mutlak maksimum ve bir mutlak minimum niceliği olan dizgedir; yarı sınırlı dizge biri olmadan diğer niceliği olan (genellikle minimum düşünülür) dizgedir; ayrık dizgede ikisi de yoktur. (Peirce **3.257**)

Beşinci Tanım: aracılığıyla Peirce, minimum ve maksimum tanımlarını ise şöyle verir:

x minimumdur ancak ve ancak x yalnızca kendisinin *q*'su ise.

x maksimumdur ancak ve ancak x yalnızca kendisi tarafından q edilirse.

Sonsuz bir kümede, verilen bir kümenin niceliğinden sonraki büyük olan her niceliğin kendisi de aynı kümeye aitse, bu durumda her nicelikten daha büyük olan o kümenin niceliği de o kümeye aittir. (Peirce **3.258**) Bu ilke aynı zamanda matematiksel tümevarımı belirten ilkedir.

Bu beş tanım yoluyla Peirce 'sıradan sayılar' (ordinary numbers) bugün bizim doğal sayılar adını verdiğimiz sayılar için aksiyomatik temeli oluşturur. Bu temel, sonsuz, yarı-sınırlı ayrık basit niceliktir, bu ise sıral sayıdır.

Sayının Mantığın Üstüne'de yer alan 'nicelik dizgesi' yerine kısmi sıralı dizge (partially ordered set), 'basit olma özelliği' yerine 'bağlantı' (connection), 'basit nicelik sistemi' yerine 'basit sıralı küme' '(simply ordered set) kullanılmaktadır.

Bu tanımlardan sonra Peirce doğal sayılar için kullanılacak aritmetiği betimler.

Peirce minium sayıyı '1' olarak adlandırır. Toplama ve çarpma için yineleyici (recursive) tanımlar verir:

" x + y demek, x=1 olduğu durumda y'den bir sonraki büyük sayı demektir, diğer durumlarda ise x'+ y 'den bir sonraki büyük sayı demektir. Burada x`, x den bir sonraki küçük sayıdır.

x X y demek, x=1 olduğu durumda y sayısı demek, diğer durumlarda ise y + (x'X y) demektir burada x', x'den bir sonraki küçük sayıdır.

Dikkat edilmesi gereken + ve X simgelerin üçlü bağıntılar olduğudur, iki eşlenikleri biri simgeden önce ve öbürü simgeden sonra yer alır." (Peirce, **3.262**-**264**)

Buradan sonra Peirce birleşim, değişim ve dağılım yasalarını kanıtlar.

Peirce, **Sayının Mantığı Üstüne**'nin sonlarına doğru bir kümenin sayallığı (cardinality) düşüncesini öne sürer. Sayallık, bir kümenin içerdiği eleman 'miktarıdır'. Sayallığı, sayma işlemi yoluyla şöyle açıklar:

"c öyle bir bağıntı terimi olsun ki, herhangi bir şeyin c'si her ne ise, o şeyin tek c'sidir ve o şeyin bir c'si basit karşılama bağıntısı olarak adlandırılır."

"bir kümenin, her s nesnesi, yarı-sonsuz, ayrık, basit sistem...." (Peirce, **3.280**)

Peirce, *basit eşleme bağıntısı* ile bugün bire-bir eşleme olarak nitelenen durumu anlar. Böylece Peirce, bir kümenin sayallığını doğal sayıların bir bölümüyle bire bir eşleme yoluyla sağlar.

Peirce, yukarıda dile getirdiklerimiz doğrultusunda <N,R,f,l> 'nin şu özellikleri sağladığı ölçüde bir doğal sayı dizgesi olduğunu ileri sürer.

1. R, N'de bir bağıntıdır.
2. N, R aracılığıyla kısmi olarak düzenlenir.
3. N, R aracılığıyla bağlantılıdır.
4. N'deki bir eleman N'de minimum eleman değilse, bu durumda o N'deki bazı elemanların dolaysız ardışığıdır.
5. 1, N'deki minimum elemandır ve N'de maksimum eleman bulunmaz.
6. N'de matematiksel tümevarım geçerlidir.

Sonuç olarak Peirce, **Sayının Mantığı Üstüne** adlı çalışmasıyla tüm aritmetiksel önermeleri mantıksal olarak türetebileceği aksiyom bir dizge ortaya koymayı başarmıştır. Öyle ki Peirce'ün **Sayının Mantığı Üstüne**'sinde *kısmi doğrusal sıralama* (partial linear order) ve *toptan doğrusal sıralama* (total linear order) anlayışlarının ilk dile getirişleri bulunur. Bu çalışmanın bir başka önemi sıral sayılar yoluyla sayal sayıların tanımı veren ilk çalışma olarak görülmesidir. Bütün bu başarılara karşın Peirce'ün, o dönemde aritmetik temellerine dönük çalışmaların odağı olan Avrupa'dan uzak oluşu çalışmasının bilinmesini ve yaygınlaşmasını engellemiştir.

Kaynakça

Dedekind, Richard: **Was sind und was sollen die Zahlen**, Braunschweig, Vieweg, 1888.

Haack, Susan: **Peirce and Logicism: Notes Towards an Exposition**, Transactions of the Charles S. Peirce Society, v29 n1 (19930101) pp. 33-56.

Jourdain, Philip, E. B.: 'Richard Dedekind', **The Monist**, Vol. 26, No. 3, pp 415-427.

Peano, Giuseppe: **Arithmetices principia nova methodo exposita**, Turin, Bocca, 1889, Kennedy içinde 'The Principles of Arithmetic, Presented by a New Method'.

Peirce, Charles Sanders: **Collected Papers of Charles Sanders Peirce,** Vols. 1-6, edited by Charles Hart- shorne and Paul Weiss. Cambridge: Harvard University Press, 1931-35- Vols. 7-8, edited by Arthur W. Burks. Cambridge:,Harvard University Press, 1958.

Putnam, Hilary: 'Peirce the Logician', **Realism with a Human Face**, Harvard University Press, 1990, pp. 252-260.

Weyl, Herman: **Philosophy of Mathematics and Natural Science**, New York, Atheneum, 1963,