Felsefe Arkivi, 43. Sayı, 2015/II, 25-39

ÇÖZÜMLEYİCİ ÇİZELGELER VE DEĞİLLEMESİZ ÖNERMELER MANTIĞI -I

Analytic Tableaux and Negation-Free Propositional Logic-I

İskender Taşdelen[*]

ÖZET

Bu yazıda çözümleyici çizelge yöntemi ile değillemesiz bir önermeler mantığı sistemi ve bu sistemin kimi sentaktik özellikleri ortaya konmaktadır. Sistemin biçimsel nesne-dilinde tüm önermeler doğruluk değeri dizileriyle etiketlenmektedir. Doğruluk değerleri dizileri kümesi üzerinde tanımlanan bir indirgeme işlemi sayesinde, etiketlerin karmaşıklığı azaltılabilmekte ve her etiket sonlu adımda tek doğruluk değerinden oluşan bir atomik etikete indirgenebilmektedir. Çizelge kuralları etiketlerin kullanımını belirleyen bir yapısal kuralın yanı sıra önermelerin doğruluk değerleriyle etiketlendiği çizelgelerin yaygın sunumunun kurallarına benzer eleme kurallarından oluşmaktadır. Biçimsel nesne dilde değilleme operatör sembolüne başvurmayı gereksizleştirerek, söz konusu sistem değillemenin yanlışlık olduğu yorumuyla bağdaşmaktadır.

Anahtar Terimler: Doğruluk-değeri, değilleme, etiketli önerme, çözümleyici çizelge, etiketli çözümleyici çizelge.

[*] Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi, Felsefe Bölümü.

ABSTRACT

In this paper, a negation-free propositional logic system with an analytic tableau method and some of its syntactic properties is put forth. In the formal object-language of the system all propositions are labeled by sequences of truth values. Through a reduction operation defined on the set of sequences of truth values, complexity of labels can be reduced and every label can be reduced to atomic labels (which consists of single truth values) after finite number of reduction steps. Tableau rules consists of a structural rule governing the labels in addition to those resembling the rules of common presentation of trees labeled with truth values. The system is compatible with the interpretation of negation as falsity by making any use of negation in the formal object language inessential.

Keywords: Truth-value, negation, labeled proposition, analytic tableau, labeled analytic tableau.

1. Çözümleyici Çizelgelerin Yaygın İki Sunumu

Çözümleyici çizelge yöntemi (diğer adıyla, semantik çizelge yöntemi) mantıkta en yaygın kullanılan denetleme yöntemlerinden biridir. Sentaktik-tutarlılık denetlemesi ve önermelerin normal biçimlerinin elde edilmesi gibi işlemlerin sezgiye başvurmayı genellikle daha az gerektirerek gerçekleştirilebilmesi bu yöntemin diğerlerine göre öne çıkan özelliklerinden biridir. Çözümleyici çizelge yönteminin yaygın kullanımını açıklayan bir diğer özelliği, mantık sistemlerinin sentaksı ile yaygın semantiği arasındaki bağı güçlü biçimde kurmasıdır: çözümleyici çizelge kuralları biçimsel dilin sentaksına dayalı olarak tanımlanırken, aynı zamanda mantık değişmezlerinin yaygın yorumlanışı (örneğin, önerme eklemlerinin doğruluk fonksiyonları yorumu ve niceleyicilerin küme kuramsal yorumu) gözetilmektedir. Bunun sonucunda, örneğin, sentaktik-tutarlılık denetlemesinin yapıldığı aynı çözümleyici çizelge yardımı ile önermelerin (ve önerme kümelerinin) doğrulayıcı ve yanlışlayıcı yorumlamaları da (varsa) oluşturulabilmektedir. Yaygın mantık öncelikle dayandığı semantik anlayış nedeniyle benimsendiğinden, bu mantık sistemi için bir denetleme yöntemi seçiminde bu semantik anlayışı yansıtmasıyla çözümleyici çizelge yöntemi öne çıkmaktadır.

Çözümleyici çizelge yöntemi çizge kuramı deyimiyle "ağaç" sıralamalı yapısında olan *ç*izelgelerin dönüştürülmesine dayalıdır. Çizelgelerin oluşturulmasını sağlayan dönüşüm kuralları iki grup altında incelenebilir:

(i) Çizelgede bulunan bir dala alt alta bir veya daha çok nokta eklemeyi gerektiren (yani çizelgede bulunan bir dalı "uzatmayı" gerektiren) kurallar ("α kuralları")

(ii) Çizelgede bulunan bir dalın altına birden çok noktayı, yeni dal (ya da yeni dallar) üretecek biçimde eklemeyi gerektiren kurallar. ("β kuralları")

Yöntemin en yaygın sunumunda çizelgeler etiketlenmemiş önermelerden oluşur (Bkz. Teller, (1989) ve Grünberg (2000 §1.4).) Değilleme, koşul, tümel-evetleme ve tikel-evetleme sembollerini (sırasıyla, $\sim$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ sembolleri) sistemin ilkel (tanımlanmamış) mantık değişmezi sembolleri sayarak, bu türden bir sistemin dönüşüm kuralları, örneğin, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

k. ~~A

A (k)

k. $\sim(A \rightarrow B)$	k. $(A \wedge B)$	k. $\sim(A \vee B)$
------------	---------------	------------
A (k)	A (k)	$\sim A$ (k)
$\sim B$ (k)	B (k)	$\sim B$ (k)

k. $(A \rightarrow B)$	k. $(A \vee B)$	$\sim(A \wedge B)$
--------------	-----------	-----------
$\sim A \mid^{(k)} B$	$A \mid^{(k)} B$	$\sim A \mid^{(k)} \sim B$

Bu kurallara göre, kesikli çizginin üstündeki önerme çizelgedeki bir daldaki “k.” noktasında bulunduğunda, kesikli çizginin altındaki önermeler bu dalı uzatarak veya bu dalın sonuna yeni dallar ekleyerek yazılabilir. Bu sistemde bir *A* önermesi için bir çizelge oluştururken, çizelgenin tepe noktasına *A* önermesi yazılarak, çizelgeye yukarıda sıralanan kurallara göre yeni noktalar eklenir. Böylece oluşturulan bir çizelgede bir dalın açık kalması (kapanması) için, o dalda bir önerme ve onun değilinin bulunmaması (bulunması) yeterli ve gereklidir. Bir *A* önermesinin bir çizelgesindeki bir dala dönüşüm kuralları ile eklenebilecek tüm noktalar eklenmiş ise, bu dal tamamlanmış bir daldır. Eğer bir çizelgede tamamlanmış en az bir açık dal varsa, bu çizelge açık bir çizelgedir. Bir *A* önermesi için açık bir çizelge varsa, *A* önermesi sentaktik-tutarlıdır. Bir çizelgedeki tüm dallar kapanırsa, bu çizelge kapalıdır. *A* önermesi için kapalı bir çizelge olması *A* önermesinin sentaktik-tutarsız olması demektir. Bir *A* önermesinin bu sistemde bir teorem olduğu, $\sim A$ önermesinin sentaktik-tutarsız olduğu gösterilerek kanıtlanır. Dolayısıyla, $\sim A$ önermesinin her kapalı çizelgesi *A* önermesinin bir kanıtlamasıdır.

Çözümleyici çizelge yönteminin diğer bir sunumunda, çizelgeler bir doğruluk değeri ile etiketlenmiş önermelerle oluşturulmaktadır. Bu türden önermelere etiketli önerme; etiketli önermeler için oluşturulan çizelgelere de etiketli çizelge diyoruz. Yine aynı ilkel (tanımlanmamış) mantık değişmezi sembolleri ile, önermeler mantığı için bir etiketli çözümleyici çizelge sisteminin dönüşüm kuralları, örneğin, aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

k. D $\sim A$	k. Y $\sim A$
----------	----------
Y A (k)	D A (k)

k. Y $(A \rightarrow B)$	k. D $(A \wedge B)$	k. Y $(A \vee B)$
----------------	---------------	---------------
D A (k)	D A (k)	Y A (k)
Y B (k)	D B (k)	Y B (k)

k. D $(A \rightarrow B)$	k. D $(A \vee B)$	Y $(A \wedge B)$
----------------	---------------	--------------
Y $A \mid^{(k)}$ D B	D $A \mid^{(k)}$ D B	Y $A \mid^{(k)}$ Y B

(Etiketli çözümleyici çizelgelere ilişkin ayrıntılı açıklama için bkz. Smullyan 1995.)

Bu sistemde, bir etiketli çizelgedeki tamamlanmış bir dalın açık kalması (kapanması) için, o dala uygun bütün dönüşüm kuralları uygulandıktan sonra, o dalda herhangi bir A önermesinin bağdaşmaz doğruluk değerleri ile etiketlenmemiş (etiketlenmiş) olması, yani dalda D A ve Y A noktalarının bulunmaması gerekmektedir. Bir A önermesinin sentaktik-tutarlı olması, başlangıç önermesi D A önermesi olan açık bir etiketli çizelge olması demektir. Başlangıç önermesi Y A önermesi olan bir açık çizelge olması ise, $\sim A$ önermesinin sentaktik-tutarlı olması demektir. Dolayısıyla, başlangıç önermesi Y A önermesi olan kapalı bir çizelge olması ise $\sim A$ önermesinin sentaktik-tutarsız olması ve A önermesinin bir teorem olması demektir. Böyle her çizelge bu sistemde A önermesinin bir kanıtlamasıdır.

Bu kurallara başvurarak,

$$((p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)) \qquad (*)$$

önermesi etiketsiz ve etiketli çözümleyici çizelgeler (bu sıra ile) ile aşağıdaki gibi kanıtlanabilir:

1. $\sim((p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p))$		1′. Y $((p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p))$	
2. $\sim(p \rightarrow q)$	(1)	2′. Y $(p \rightarrow q)$	(1)
3. $\sim(q \rightarrow p)$	(1)	3′. Y $(q \rightarrow p)$	(1)
4. p	(2)	4′. D p	(2)
5. $\sim q$	(2)	5′. Y q	(2)
6. q	(3)	6′. D q	(3)
7. $\sim p$	(3)	7′. Y p	(3)
x(5,6)		x(5′,6′)	

Soldaki çizelge $Ç_1$, sağdaki $Ç_1^*$ çizelgesi olsun. Bu iki çizelgenin her biri (*) önermesinin değilinin sentaktik-tutarsız olduğunu ortaya koymaktadır. İki çizelgeye bakıldığında, göze ilk çarpan, $Ç_1^*$ çizelgesinde değillemenin hiç ortaya çıkmamış olmasıdır. Ayrıca, $Ç_1^*$ çizelgesi $Ç_1$ çizelgesinden $\sim$ sembolünün yer aldığı her yerde, $\sim$ sembolü yerine Y sembolü konması ve eleme kurallarının uygulanmasıyla ortaya çıkan önermelerin D sembolü ile etiketlenmesiyle elde edilebilmektedir.

Kolayca görülebileceği gibi, bu durum her zaman gerçekleşmez; Önerme bu kez

$\sim(p \land \sim p)$

sembolik önermesi olsun. Bu önerme yukarıdaki iki yönteme göre denetlendiğinde, aşağıdaki çizelge çifti elde edilir:

1. $\sim\sim(p \land \sim p)$		1′. Y $\sim(p \land \sim p)$	
2. $(p \land \sim p)$	(1)	2′. D $(p \land \sim p)$	(1)
3. p	(2)	3′. D p	(2)
4. $\sim p$	(2)	4′. D $\sim p$	(2)
x(3,4)		5. Y p	(4)
		x(3,5)	

Soldaki etiketsiz çizelge $Ç_2$, sağdaki etiketli çizelge ise $Ç_2^*$ olsun. Görüldüğü gibi, $Ç_2^*$ çizelgesi tam olarak $Ç_2$ çizelgesinden ~ sembolü yerine Y sembolü konarak elde edilmemiştir. Demek ki, yaygın sunumda etiketli çizelgelerin etiketsiz olanlardan ~ yerine Y konması ile elde edilmiş çizelgeler olduğu genel bir kural olarak ileri sürülemez. Yine de durum buna yakındır: çizelgenin tamamlanması, D ve Y değerlerinin değillemeli önermelere uygulanması ile "D *p*" ve "Y *p*" etiketli değişkenlerinin elde edilmesiyle sağlanmıştır. Peki, etiketli önermelerde ayrıca bir de değilleme sembolüne yer vermek gerekli midir? Yoksa yanlışlık sembolü bir mantık değişmezi sayılarak, değillemenin yerini alabilir mi?

$Ç_2$ çizelgesinden değilleme sembolünün her geçişi yerine Y etiketinin yazılmasıyla ve eleme ile elde edilen etiketsiz atomik önermenin D ile etiketlenmesiyle elde edilen aşağıdaki $Ç_2^{**}$ çizelgesine bakalım:

1′. YY ($p \wedge$ Y p)	
2′. ($p \wedge$ Y p)	(1)
3′. D p	(2)
4′ Y p	(2)

$Ç_2$ çizelgesinin kapanmasını sağlayan *p* ve ~*p* önermelerinin her ikisi de biçimsel nesne dildeki önermeler; $Ç_2^*$ çizelgesinin kapanmasını sağlayan D *p* ve Y *p* önermelerinin her ikisi de biçimsel üst dildeki önermelerdir (D ve Y sembolleri sistemin biçimsel dilinde yer almamaktadır.) $Ç_2^{**}$ çizelgesinin kapandığını söylemek için 3′ ve 4′ noktalarındaki önermelerin çeliştiği söylenmelidir. Bu nedenle, 2′ noktasını dönüştürürken D *p* etiketli önermesini elde edilmesi amaçlanmalıdır. (*p* biçimsel nesne dilde bir önerme olup Y *p* biçimsel üst dilde bir önermedir. Ayrıca, ne bu "önermelerden" biri diğerinin değilidir, ne de bir önermeye iki bağdaşmaz doğruluk değeri atanmış olmaktadır). Oysa, ($p \wedge$ Y p) noktasından D *p* ve Y *p* noktalarını elde etmeyi sağlayacak doğal bir dönüşüm kuralı bulunmamaktadır.

Çizelgelere ilişkin yukarıdaki temel gözlemler sonucunda her önermenin baştan bir doğruluk değeri dizisi ile etiketlendiği çizelgeleri ortaya koyuyoruz. İlk adım olarak, $Ç_2^{**}$ çizelgesinde etiketsiz atomik önermelerin baştan D doğruluk değeri ile etiketlenmesiyle elde edilen, aşağıdaki $Ç_2^{***}$ çizelgesini ele alalım:

1′. YY (D $p \wedge$ Y p)	
2′. (D $p \wedge$ Y p)	(1)
3′. D p	(2)
4′ Y p	(2)
x(3′,4′)	

$Ç_2^{***}$ çizelgesi incelendiğinde, dönüşüm kurallarının uygulanması sonucunda değilleme sembolünün ortaya çıkmadığı görülmektedir. Ayrıca, 2′ ile işaretli (D $p \wedge$ Y p) noktasından D *p* ve Y *p* noktalarının elde edilmesi de tümel-evetlemenin elenmesi dönüşüm kuralının olağan bir örneği sayılabilir. Ancak, $Ç_2^{***}$ çizelgesinin ilk adımında da başvurulan ve çifte değillemenin elenmesi kuralının karşılığı olarak ortaya çıkan "çifte yanlışmanın elenmesi" kuralı diye adlandırılabilecek kural sistemin bütünlüğünü bozmaktadır. Bu sav yalın bir örnekle açıklanabilir: kurala göre bir çizelgede ortaya çıkabilecek YY *p* önermesinden elde edilmesi gereken (etiketsiz) *p* önermesidir. Bilindiği gibi çizelgede bir dalın durumuna karar verilmesi için, o daldaki önermelere uygun tüm dönüşüm kurallarının uygulanması gerekmektedir. Bu kural izlenerek bir dala eklenen *p* önermesi ise, herhangi bir doğruluk değeri ile etiketlenmediği ve etiketli çizelge yönteminde çizelgelerin değerlendirilmesinde önermelerin hangi doğruluk değerleri ile etiketlendiğine göre yapıldığı için işlevsizdir. Önermenin yok sayılması da, bir doğruluk değeri ile etiketlenerek dala eklenmesi de sistemin bütünlüğüne aykırıdır. Bu duruma çözüm olarak, yazının izleyen bölümlerinde doğruluk değerlerinin (etiketlerin) işlenmesi ile doğruluk değerlerinin yok olmayıp, uygun bir doğruluk değerine dönüşmesi ilkesine dayalı bir sistem ortaya konmaktadır.

2. Değillemesiz Etiketli Önermeler

İlk olarak değillemesiz etiketli önermeler mantığının biçimsel dilini ortaya koyuyoruz:

Tanım: Değillemesiz etiketli önermeler mantığının biçimsel dilinin alfabesi aşağıdaki sembollerden oluşmaktadır:

(i) Önerme değişkenleri: $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$
(ii) Önerme eklemleri: ∧ (tümel-evetleme), ∨ (tikel-evetleme),
(iii) Doğruluk değeri sembolleri: D ve Y
(iv) Parantezler: (,)

Önce, bu alfabenin elemanlarından oluşan belirli sembol dizileri olan etiketleri tanımlayarak etiketlerin bir takım özelliklerini ortaya koyup, bunun ardından etiketli önermeleri tanımlıyoruz.

Tanım: Doğruluk değeri sembollerinden oluşan sonlu uzunluktaki sembol dizilerinin her biri bir etikettir. Bir başka deyişle:

(i) D bir etikettir
(ii) Y bir etikettir
(iii) *e* bir etiket ise, D*e* bir etikettir.
(iv) *e* bir etiket ise, Y*e* bir etikettir.

Tek sembolden oluşan D ve Y sembollerine *atomik etiket*, diğerlerine *bileşik etiket* diyoruz. Üst-dilde atomik etiketleri a, a', … ya da a_0, a_1, a_2, ... sembolleri ile; genel olarak (atomik ya da bileşik) etiketleri ise, e, e', … ya da e_0, e_1, e_2, ... sembolleri ile gösteriyoruz.

Tanıma göre, tüm etiketler atomik etiket dizileri olduğundan, herhangi bir *e* etiketini

$a_{n\text{-}1} \dots a_1 a_0$

biçiminde yazabiliriz.

Tanım: Herhangi bir *e* etiketi için

1) e etiketinin *uzunluğu*, u(e), bu etiketteki sembol geçişi sayısıdır.
2) e etiketinin D-sayısı, SD(e), bu etikette D etiketinin geçme sayısıdır.
3) e etiketinin Y-sayısı, SY(e), bu etikette Y etiketinin geçme sayısıdır.

Tanım: Her $e = a_{n\text{-}1} \dots a_1\, a_0$ etiketi için, $(e)^*$ etiketi, e etiketinden her D sembolü yerine bir Y her Y sembolü için de bir D sembolü yazılmasıyla elde edilen dizi olsun. Böyle elde edilen $(e)^*$ dizisine e dizisinin *eşleniği* diyoruz. Dolayısıyla, $(e)^* = (a_{n\text{-}1} \dots a_1\, a_0)^* = (a_{n\text{-}1})^* \dots (a_1)^*\, (a_0)^*$

Eşleniklik biçimsel yinelgen bir tanımlama ile de belirtilebilir.

1) $(\mathrm{D})^* = \mathrm{Y}$
2) $(\mathrm{Y})^* = \mathrm{D}$
3) $(ae)^* = (a)^*(e)^*$

Etiketler kümesi üzerinde D etiketinin "doğruluk," Y etiketinin ise "yanlışlık" olarak yorumlanmasına uygun bir indirgeme işlemi tanımlanabilir.

Tanım: Etiket dizileri üzerinde indirgeme işlemi aşağıdaki → bağıntısı ile tanımlanan işlemdir:

1) $\mathrm{D} \rightarrow \mathrm{D}$
2) $\mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Y}$
3) $\mathrm{D}\, e_{n\text{-}1} \dots e_1\, e_0 \rightarrow e_{n\text{-}1} \dots e_1\, e_0$
4) $\mathrm{Y}\, e_{n\text{-}1} \dots e_1\, e_0 \rightarrow (e)^*_{n\text{-}1} \dots e_1\, e_0$

Bu tanıma göre, en az 2 uzunluğundaki bir etiket dizisinin başındaki D sembolü atılabilmekte; en az 2 uzunluğundaki ve ilk etiketi Y olan bir etiket dizisinin başındaki Y sembolü atılarak bir sonraki etiket ise eşleniği ile yer değiştirmektedir. Örneğin,

$$\mathrm{DYYYD} \rightarrow \mathrm{YYYD}$$

Açıkça, indirgeme işlemi yinelenebilir bir işlemdir. Bir e etiketinin ardı ardına sonlu sayıda indirgeme adımı ile bir e' etiketine indirgeneceğini

$e \rightarrow\rightarrow e'$

biçiminde gösteriyoruz. Her indirgeme adımında etiketin uzunluğu 1 azaldığından, her etiket dizisi, sonlu sayıda indirgeme sonunda ya D ya da Y atomik etiketine indirgenir. Bir e etiketinin ardı ardına indirgemelerin *sonunda* bir a atomik etiketine indirgeneceğini

$e > a$

biçiminde gösteriyoruz. *Her* etiket için böyle *tek* atomik önerme bulunduğu için, > bağıntısı bir Dğ değer fonksiyonu belirler:

Dğ(e) = a öyle ki $e > a$

Örneğin,

$$\mathrm{DYYYD} \rightarrow \mathrm{YYYD} \rightarrow \mathrm{DYD} \rightarrow \mathrm{YD} \rightarrow \mathrm{Y}\ (^{**})$$

Dolayısıyla, Dğ(DYYYD) = Y olur. Ayrıca, Dğ fonksiyonunun tanımı gereği, D > D ve Y > Y olduğundan, her a atomik etiketi için

Dğ(a) = a

olur. (**) gibi bir indirgeme dizisi incelendiğinde, sadece dizinin ilk etiketin değil, dizideki her etiketin aynı tek atomik etikete indirgendiğinden, tüm etiketlerin değerinin aynı olduğu söylenebilir:

Önerme 1. $e \twoheadrightarrow e'$ ise, Dğ(e) = Dğ(e')

Kanıt: $e \twoheadrightarrow e'$ olsun. Dğ(e') değeri, $e' >$ a koşulunu sağlayan yani, e' etiketinin sonunda indirgendiği tek atomik a etiketidir. e' etiketi sonlu sayıda adımda (gerçekte, u(e')-1 sayıda adımda) a etiketine indirgendiğinden, $e \twoheadrightarrow e' \twoheadrightarrow a$. İndirgeme açıkça geçişli bir bağıntı olduğundan, $e \twoheadrightarrow a$ yani, Dğ(e) = a.

Etiket dizileri üzerinde indirgeme işleminin bir bölümü kolayca görülebilen başka ilginç pek çok özelliği bulunmaktadır. Şimdilik, uygulamada yararlı olabilecek ve tümevarımla kolayca kanıtlanabilecek birkaç temel özelliği belirtelim:

1) DD...D dizisinden farklı bir etiket dizisindeki herhangi uzunlukta bir DD...D dizisi yerine hemen bir D etiketi yazılabilir. (Etiket DD...D dizisi ise, D atomik etiketine indirgenir.)

2) Bir etiket dizisinde yer alan çift uzunlukta YY ... Y dizisi yerine hemen bir D etiketi yazılabilir.

3) Bir etiket dizisinde yer alan tek sayıda Y dizisi yerine ise bir Y etiketi yazılabilir.

Örneğin,

$$\text{DDDDDYYYYYDDDDDYYYD} \rightarrow \text{YDYD}$$
$$\text{YYYYDYDYDDDYD} \rightarrow \text{DDYDYDYD}$$

Şimdi,

1) DD → D
2) DY → Y
3) YD → Y
4) YY → D

formüllerinin dolaysız sonucu olarak,

Önerme 2. Bir atomik etiketin eşleniğini almak ile, Y ile "çarpmak" aynı sonucu vermektedir: her a atomik etiketi için,

a^* = Dğ(Ya)

Kanıt: (3) ve (4) gereği.

Önerme 3. D etiketi indirgeme işlemine göre birim (etkisiz) elemandır

Dğ(De) = Dğ(e)

Kanıt: D$e \rightarrow e$ olduğundan, $e > a$ ise, D$e > a$.

Şimdi tümevarımla kanıtlanabilecek yardımcı önermelerin ardından, Y etiketinin değillemenin işlevini gördüğünü bir ana önerme ile ortaya konup kanıtlanabilir:

Önerme 4. Dğ(ae) = Dğ(aDğ(e))

Kanıt: (e etiketinin uzunluğu üzerine tümevarımla (e etiketinin a′ atomik etiketi olduğu durumda,

Dğ(De) = Dğ(e) = Dğ(D Dğ(e))

dolayısıyla eşitlik a = D durumunda sağlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \text{Dğ}(\text{Y}e) &= \text{Dğ}((e_n)^* e_{n-1} \ldots e_1) \\ &= \text{Dğ}((e_n)^* \text{Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1)) \end{aligned}$$

Şimdi eğer e_n = D ise, $(e_n)^*$ = Y ve

$$\begin{aligned} \text{Dğ}((e_n)^* \text{Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1)) &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1)) \\ &= (\text{Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1))^* \\ &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1)) \\ &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(\text{D } e_{n-1} \ldots e_1)) \\ &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(e)) \end{aligned}$$

Eğer e_n = Y ise, $(e_n)^*$ = D ve

$$\begin{aligned} \text{Dğ}((e_n)^* \text{Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1)) &= \text{Dğ}(e_{n-1} \ldots e_1) \\ &= \text{Dğ}(\text{D } e_{n-1} \ldots e_1) \\ &= \text{Dğ}((e_n)^* e_{n-1} \ldots e_1) \\ &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(e_n\, e_{n-1} \ldots e_1)) \end{aligned}$$

(Son eşitlik Dğ($e_n\, e_{n-1} \ldots e_1$) teriminin bir a atomik etiket olması ve Dğ(Ya) = a^* eşitliği dolayısıyla.)

Sonuç: Dğ(e) = D eğer ve ancak Dğ(Ye) = Y.

Önerme 5. Dğ(ee') = Dğ(Dğ(e)Dğ(e'))

Kanıt: e etiketi üzerine tümevarımla. e etiketinin atomik olduğu durum yukarıda kanıtlandığı gibidir.

Dğ(ee') = Dğ(Dğ(e)Dğ(e'))

olduğu varsayılırsa,

Dğ(Dee') =* Dğ(ee') =**Dğ(Dğ(e)Dğ(e')) =*** Dğ(D Dğ(e)Dğ(e'))

olur (* ve *** eşitlikleri D etiketinin etkisiz eleman olması; ** eşitliği ise tümevarım hipotezi dolayısıyla.) Ayrıca,

$$\begin{aligned} \text{Dğ}(\text{Y}ee') &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(ee')) \\ &= (\text{Dğ}(ee')) \\ &= (\text{Dğ}(\text{Dğ}(e)\text{Dğ}(e'))) \\ &= \text{Dğ}(\text{Y Dğ}(e)\text{Dğ}(e')) \\ &= \text{Dğ}(\text{Dğ}(\text{Y}e)\text{Dğ}(e')) \end{aligned}$$

Yukarıdaki önermelere başvurarak tümevarımla kanıtlanabileceği gibi, bir etiketin hangi atomik etikete indirgeneceği etikette geçen D etiketlerinden tümüyle bağımsızdır: herhangi bir e etiketinin değeri, Dğ(e), ile bu etiketlemede geçen Y etiketleri arasındaki ilişki oldukça yalın bir biçimde ortaya konabilir:

Önerme 6. (Ana Önerme) Her e etiketi için:

e > D eğer ve ancak SY(e) çift sayı ise.

Eşdeyişle,

Dğ(e) = D eğer ve ancak SY(e) çift sayı ise.

Kanıt (Ana Önerme): Önermenin doğruluğunu etiketlerin uzunluğu üzerine tümevarımla kanıtlayabiliriz. Atomik önermeler için önermenin doğruluğu açıktır. Şimdi, n uzunluğundaki her e etiketi için önermenin doğruluğunu varsayalım. n + 1 uzunluğunda bir etiket, e n uzunluğundaki bir etiket olmak üzere ya De ya da Ye etiketidir. İlk durumda D indirgeme işlemine göre etkisiz eleman olduğundan, önerme De etiketi için de doğrudur. İkinci durumda,

SY(e) çift eğer ve ancak SY(Ye) tek ise.

SY(e) tek eğer ve ancak SY(Ye) çift ise.

önermelerinin ikisi de açıkça doğrudur. Şimdi, yukarıdaki sonuç önermesi ve tümevarım hipotezi yardımıyla önermenin Ye önermesi için doğruluğu kolayca gösterilebilir.

2.1 Etiketli Sembolik Önermeler

Tanım: Etiketlenmiş sembolik önermeler yinelgen biçimde aşağıdaki gibi tanımlanır:

a) Her p önerme değişkeni ve her e etiketi için

$e\,p$

sembol dizisi bir sembolik önermedir.

b) Her iki A ve B sembolik önermesi ve e, e', e'' etiketleri için

a) $e\,(e'A \wedge e''\,B)$

b) $e\,(e'A \vee e''\,B)$

birer sembolik önermedir.

Bu tanıma göre,

(i) Şimdi (i) gereği, bir önerme değişkeninin başına istenilen etiket eklenebileceğinden, örneğin, aşağıdakilerin her biri sembolik önermedir:

a) DD p_1

b) YD p_4

c) YDD p_1

d) DYDD p

(ii) Ayrıca, (ii) dolayısıyla, iki etiketli önermenin arasına ∧ veya ∨ önerme eklemlerinden birinin yazılıp, bu deyimin başına bir sol parantez, sonuna sağ bir parantez yazılmasıyla elde edilen başına bir etiket eklenmesiyle elde edilen aşağıdaki sembol dizilerinin her biri sembolik önermedir:

a) Y (DD p_1 ∧ YD p_4)

b) D (DD p_1 ∧ YD p_4)

c) Y (DD p_1 ∧ YD p_4)

d) DD (DD p_1 ∧ YD p_4)

e) YY (DD p_1 ∧ YD p_4)

Görüldüğü gibi biçimsel dilde değilleme sembolü dışında, önermeler mantığında yaygın başvurulan koşul ve karşılıklı koşul önerme eklemi sembollerine de yer verilmemiştir. Ama hem bu üç sembol hem de diğer tüm doğruluk fonksiyonel önerme eklemleri değillemesiz önermeler mantığının biçimsel dilinde karşılanabilir. Özel olarak,

(i) $\sim (e\,A) =_{\text{tanım}} \mathrm{Y}e\,A$

(ii) $e\,(e'\,A \rightarrow e''\,B) =_{\text{tanım}} e\,(\mathrm{Y}e'\,A \vee \mathrm{D}e''\,B)$

(iii) $e\,(e'\,A \leftrightarrow e''\,B) =_{\text{tanım}} e\,(\mathrm{D}\,(e'\,A \wedge e''\,B) \vee \mathrm{D}\,(\mathrm{Y}e'\,A \wedge \mathrm{Y}e''\,B))$

3. Etiketli Değillemesiz Önermeler Mantığı için Çözümleyici Çizelge Sistemi

Önermeler mantığı için yaygın etiketli çizelge sisteminin kuralları geliştirilerek biçimsel nesne dilde değillemenin yerini yanlışlamanın aldığı ve önermelerin doğruluk değeri dizileriyle etiketlendiği biçimsel dil bir biçimsel mantık sistemine dönüştürülebilir. Bu sistem için çözümleyici çizelge kuralları aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$e\ A\ \&\ (e \rightarrow e')$
$e'\,A$

k. D $(A \wedge B)$	k. Y $(A \vee B)$	k. D $(A \vee B)$	Y $(A \wedge B)$
---------------	---------------	--------------	-----------
D A (k)	Y A (k)	D $A\ \vert^{(k)}$ D B	Y $A\ \vert^{(k)}$ Y B
D B (k)	Y B (k)		

Bu sistemde de bir A etiketli önermesi için sentaktik-tutarlılık denetlemesi, Y A önermesi ile başlayan tamamlanmış bir çizelge ile gerçekleştirilir. Bir dalın kapalı olması için, o dalda bir önermenin D ve Y etiketlenmiş olması gerekli ve yeterlidir.

Tümel ve tikel-evetleme kuralları, sistemin biçimsel dilini oluşturmada önermelerin niçin sadece doğruluk değerleriyle değil de, doğruluk değeri dizileriyle etiketlendiğini ortaya koymaktadır: bu kuralların tümünde A, B etiketli önermeler olduğuna göre, kuralların uygulanmasıyla bu önermelerin etiketlerinin başına ek olarak bir de ya D ya da Y etiketi gelmektedir. Yapısal (bir mantık değişmezine ilişkin olmayan) ilk kural ise, diğer çizelge kurallarının uygulanmasıyla ortaya çıkan bileşik etiketlerin indirgenerek çizelgenin tamamlanmasını sağlar.

Örnek: D (D p ∨ Y p) önermesinin bir denetlenmesi:

1. YD (D p ∨ Y p)	
2. Y (D p ∨ Y p)	
3. YD p	(2)
4. YY p	(2)
5. Y p	(3, YD → Y)
6. D p	(4, YY → D)
x(5,6)	

Örnek: D (Y p ∨ (D (D p ∧ Y r) ∧ D (D p ∧ D r))) önermesinin denetlenmesi:

1. $YD\,(Y\,p \vee (D\,(D\,p \wedge Y\,r) \wedge D\,(D\,p \wedge D\,r)))$
2. $Y\,(Y\,p \vee (D\,(D\,p \wedge Y\,r) \wedge D\,(D\,p \wedge D\,r)))$
3. $Y\,Y\,p$ (2)
4. $Y\,(D\,(D\,p \wedge Y\,r) \wedge D\,(D\,p \wedge D\,r))$ (2)
5. $D\,p$ (3, YY → D)
6. $YD\,(D\,p \wedge Y\,r)$ (4)
7. $YD\,(D\,p \wedge D\,r)$ (4)
8. $Y\,(D\,p \wedge Y\,r)$ (6)
9. $Y\,(D\,p \wedge D\,r)$ (7)

9\. $YD\,p$ |(7) 9. $YY\,r$
10\. $Y\,p$ 10. $D\,r$
x(4,10) 11. $YD\,p$ |(8) 11. $YD\,r$
12\. $Y\,p$ 12. $Y\,r$
x(3,12) x(10,12)

Çözümleyici çizelgeleri, bir yandan tüm önermelerin etiketlenmiş olması özelliğini koruyup, tümel ve tikel-eleme kurallarının gerektirdiği bileşik etiketleri indirgeyerek sadeleştirmek olanaklıdır. Ayrıca etiket indirgeme kuralı dışındaki çizelge kuralları, her etiketli önermenin tüm etiketlerinin atomik olduğu varsayılarak tanımlanabilir. Bu durumda,

i. D etiketi etkisiz eleman olduğundan D-∧ ve D-∨ eleme kurallarında bileşen önermelerin etiketleri olduğu gibi bırakılabilir.

ii. Bir atomik etiketin başına Y etiketi eklenmesiyle ve indirgemenin ardından bu atomik etiketin eşleniği elde edileceğinden Y-∧ ve Y-∨ eleme kuralları uygulanırken bileşenlerin atomik etiketleri eşlenikleri ile değiştirilebilir.

Bu durumda aşağıdaki dört çizelge kuralı ortaya çıkar

k. D ($a\,A \wedge a'\,B$)	k. Y ($a\,A \vee a'B$)	k. D ($a\,A \vee a'\,B$)	Y ($a\,A \wedge a'\,B$)
A (k)	$a^*\,A$ (k)	$a\,A$ |(k) $a\,B$	$(a)^*\,A$ |(k) $(a')^*\,B$
B (k)	$(a')^*\,B$ (k)		

De Morgan kuralları diye bilinen önermelerden birinin bir koşulunu bu sadeleştirilmiş kurallarla kanıtlayalım:

1. $Y\,(D\,(D\,p \wedge D\,q) \vee D\,(Y\,p \vee Y\,q))$
2. $Y\,(D\,p \wedge D\,q)$ (1)
3. $Y\,(Y\,p \vee Y\,q)$ (1)
4. $Y\,p$ (2)
5. $Y\,q$ (2)
6. D p (3)
7. Y q (3)
8. x(4,6)

Gerçekte, tüm önermelerin yalnızca atomik etiketler taşıdığı ve etiket indirgeme kurallarının çözümleyici çizelge kurallarına yerleştirildiği bir çözümleyici çizelge sistemi geliştirilebilir. Ancak değillemenin olmadığı durumda, bazı mantık sistemlerini ayırt etmede önem taşıyan değilleme kurallarının biçimsel dilde yanlışlama sembolü ile dile getirilebilmelidir. Örneğin, buradaki sistemde

$\sim\sim\sim p \rightarrow \sim p$

önermesi

D (YYY $p \rightarrow$ Y p)

biçiminde kısaltılan,

D (YYYY $p \rightarrow$ Y p)

önermesi ile dile getirilip, aşağıdaki çözümleyici çizelge ile kanıtlanabilir:

1.	YD (YYYY $p \rightarrow$ Y p)	
2.	Y (YYYY $p \rightarrow$ Y p)	(1)
3.	YYYYY p	(2)
4.	YY p	(2)
5.	DYYY p	(3)
6.	YYY p	(5)
7.	DY p	(6)
8.	Y p	(7)
9.	D p	(4)

x(8,9)

Kaynakça

Grünberg, T. (2000) *Sembolik mantık el kitabı. Cilt 1 Temel mantık*. 1. Baskı. Ankara: Metu Press.

Smullyan, R. (1995) *First-order logic*. New York: Dover Publications.

Teller, P. (1989) *A Modern formal logic primer*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.