Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi www.e-sosder.com ISSN: 1304-0278 Yaz-2007 C.6 S.21 (172-191)

DOĞRUSAL PROGRAMLAMADA PRIMAL VE DUAL İLİŞKİSİNİN İRDELENMESİ VE BİR ÖRNEK UYGULAMASI

The primal and dual problem's focuses in Linear Programming

Sait PATIR*

ÖZET

Doğrusal programlama,işletme sorunlarında kullanılan optimallik tekniklerinden biridir. Doğrusal programlama probleminin birinci şekline asıl veya primal problem denir.Bu problemin simetriğine ikincil veya dual problem denir. Primal problemi dual probleme çevirirken ,değerler aynı kalırken dönüşüme uğrarlar.

Bu çalışmada, primal problemin duale dönüştürülmesi irdelenmiş ve seçilen örnek problem her iki şekle göre çözülerek, sonuçları karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal programlama,Primal problem,Dual problem,Dualite

ABSTRACT

Linear Programming (LP) is one of the techniques which is used for solving problems. The basic form of Linear programming problem is called Primal problem. The symmetric of this problem is called secondary or Dual problem. While primal problem is changed into dual problem its value is constant.

This study focused on that how primal problem change to the dual problem by illustrating a case.

Keywords: Linear Programming, Primal problem, Dual Problem, Duality

I.GİRİŞ

Doğrusal programlama yöntemi,optimum kılma amacı ve sınırlayıcı şartların doğrusal fonksiyon ile ele alınması varsayımına dayanmaktadır[1]. Doğrusal programlama(DP),diğer bir çok matematik,istatistik modeller gibi çok sayıda işletme problemine ,yaklaşık optimum çözümler bulabilen ,kapasite kullanma miktarı sınırlı,kolay ve basit bir model grubunun arama ve deneme esasına dayanan çözümleri, değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal

* İnönü Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimleri Fakültesi,İşletme Bölümü Sayısal Yöntemler Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi,Malatya.

olduğu hallerde kullanılabilecek bir işletme ve sanayi mühendisliği aracıdır[2]. Başka bir ifadeyle,DP,sınırlı kaynakların en etkin bir biçimde nasıl kullanılması gerektiğini saptama tekniği ve bir karar verme aracıdır[3].

Yani DP,değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı kalarak amaç fonksiyonunu en uygun (maksimum ve mimimum)kılmaya çalışır[4]. Doğrusal programlama problemini ise,doğrusal bir fonksiyonu, eşitsizlik ve eşitlik şeklindeki doğrusal kısıtlayıcıları ile, maksimize veya minimize eden bir problemdir[5]. Genel olarak, bir doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir

Amaç Fonksiyonu → Zmax/min= $\sum_{J=1}^{n} CjXj$

Kısıtlayıcılar → $\sum_{J=1}^{n} aijXj$ {≥,=,≤} bi ,{ İ= 1,2,…….m}

Pozitif Olma → Xj ≥ 0 ,{J= 1,2,…….n}

DP problemi, genel bir çözüm metodunun geliştirilmesi için standart form olarak adlandırılan genel formatta ifade etmek gerekir.Standart formun özellikleri ;

- negatif olmayan sağ taraf sabitleriyle birlikte,bütün kısıtlar eşitlik haline dönüştürülmeli,
- değişkenlerin tamamı pozitif olmalı ve
- amaç fonksiyonu maksimize ve minimize olmalıdır[6].

---

[1] Yılmaz Tulunay ;**Matematik Programlama ve işletme Uygulamaları,**Bayrak Matbaacılık, ,İstanbul 1987, s,257.
[2] İlhami,Karayalçın.,(1993),**Yöneylem-Hareket-Araştırması,Operations Research,**Geliştirilmiş 3.Baskı.Menteş Kitapevi.İstanbul.1993,s.111.
[3] Hülya H,Tütek.,Şevkinaz Gümüşoğlu.,**Sayısal Yöntemler Yönetsel Yaklaşım,** Genişletilmiş 2.Basım .Beta Yayınevi,İstanbul,1994,s.113.
[4] Ahmet Öztürk.,1992)**,Yöneylem Araştırması,**Genişletilmiş III.Basım,Uludağ Üniversitesi Basımevi.,1992,s.17.
[5] Bazaraa,M.S,Jarvis,J,.J.(1977)**,Linear Programming And Network Flows,**John Wiley – Sons,İnc,Canada-America.,1977,s.2-6 .
[6] Taha Hamdy.,.**Operations Research,An İntroduction,**Fourth Edition,Collier Macmillan.inc.Canada-America,1987,s.65.

II. DP'DA KULLANILAN TEMEL KAVRAMLAR

Bir doğrusal programlama probleminin çözümünde kullanılan kavramlar problemin çözümünü anlamak için önem arz etmektedir.

Temel Çözüm(Basic Solution); cebirsel olarak (n-m) değişken kümesinden sıfıra eşitlenmek üzere kurulan birik(unique) çözümdür[7].

Mümkün Temel çözüm(Feasible Basic Solution);bütün (m) değişkenleri negatif olmamayı sağlayan temel çözümdür[8].

Mümkün Olmayan Temel Çözüm(İnfeasible Basic Solution);değişkenlerinin biri veya daha fazlası negatif değer alabilen temel çözümdür.[9]

Temel Değişken(basic variables);başlangıç temel çözüme (initial basic solution) giren değişkenlere temel değişken denir.Başlangıç çözüme giremeyenlere de temel olmayan değişkenler(nonbasic variables) denir[10].

Aylak Değişken(Slack Variable:Si) (≤) şeklindeki her bir kısıtı, eşitlik şekline dönüştürürken, gölge (slack) değişken ilave edilir. Bu değişken amaç fonksiyonunda sıfır katsayıyla gösterilir ve temel çözüm sürecinde yer alır.

Artık Değişken(Surplus Variable:Vi) ≥ seklindeki her bir kısıt,eşitlik şekline dönüştürülürken, bir artık değişken çıkarılır Artık değişken, eşitliğin sol tarafında yer alır ve negatif katsayılı bir değişken olarak gösterilir.Amaç fonksiyonunda katsayısı sıfırdır,optimal çözüme sonradan girebilir[11].

Yapay (Suni) Değişken(Artificial Valuables: Ai); ≥ ve = şeklindeki her bir kısıta yapay değişken ilave edilir.Başlangıç temel çözümde yer alır. Maksimizasyon amaçlı bir

---

[7] Hamdy.,.s,69.
[8] Ahmet Acar., Linear Proggramming For Managerial Decision , A Non- Algorithmic Apporach With Computer Applications,Middle East Technical University,Ankara,1989,s.115.
[9] Acar,s.115.
[10] Wagner,H,M., **Principles Of Operations Research With Applications To Managerial Decisions,**Prentice-Hall.İnc.,Canada-America,1969..s.103.

problemde,yapay değişkenin katsayısı (-M)'dir,minumum amaçlı problemde ise (M)'dir.Optimal çözümde yer almaz[12] .

İterasyon; Simpleks yöntemle mümkün temel çözümlerinden hareketle,temel çözümlerin elde edildiği yinelenen aşamalardır[13].

III. DP'DA PRİMAL PROBLEM İLE DUAL PROBLEMİN İLİŞKİSİ

Her doğrusal programlama probleminin ilişkili olduğu bir ikiz problemi vardır.Herhangi bir doğrusal programlama problemi primal ve asıl olarak adlandırılırken diğerine yani ikizine dual (dualite) veya ikilik adı verilir[14].Dualite kavramı,doğrusal programlamaya özgün bir kavram değildir,matematik,fizik,istatistik ve mühendislikte de ortaya çıkmaktadır.Dualiteden doğrusal programlama sorunlarında hem
kurumsal hem pratik açıdan yararlanılmaktadır.Bunları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz[15].

- Bazı durumlarda dual sorunu çözmek,primali çözmekten daha kolaydır.
- Dualite başlangıç çözümün mümkün olmadığı durumlarda simpleks yöntemini kullanmaya imkan tanır.Bu teknik dual simpleks olarak adlandırılır.
- Dualite doğrusal proğramlama sorunlarını açıklayan güçlü teoremler ortaya koyar.
- Bir primal sorunun dual çözümü matematiksel özelliklerinin yanı sıra önemli ekonomik yorumlar getirir.
- Dualite bir doğrusal programlama sorununun formulasyonundaki yada katsayılarındaki değişmelerin çözümü nasıl etkileyeceğini araştırmada (yani duyarlılık analizinde) kullanılır.

---

[11] İbrahim Eroğlu.,İbrahim Güngör.,**Primal-Dual Doğrusal Programlama Modelleri Arasındaki İlişkiler**,SDÜ,İ.İ.B.F,Dergisi,1997.s.96.
[12] Wagner,a,g,e,s.112.
[13] Eroğlu,a.g.e,s.96.
[14] Öztürk,a,g,e,.s.92
[15] Tütek,a,g,e,s,174.

Verilen her bir doğrusal problem Canonical[16] formda bir primal problemdir.Aşağıda genel(canonical) formatta bir primal-dual problemini görebiliriz.

Tablo.1. Primal Dual İlişkisinin Genel Görünümü

Primal Problem	Dual Problem
Zmax = $\sum_{J=1}^{n} cjxj$ Kısıtlar $\sum_{J=1}^{n} aijxj \leq bi(i = 1,2,...,m)$ Pozifif Olma xi≥ 0	Wmin = $\sum_{i=1}^{m} biyj$ Kısıtlar $\sum_{i=1}^{m} aijyj \geq cj(j = 1,2,....n)$ Pozifif Olma yj≥ 0

IV.PRİMALİN DUALE DÖNÜŞTÜRÜLME KURALLARI

Bir primal problemi duale dönüştürülürken aşağıdaki değişiklikler yapılır[17].

a) Primal problem maksimizasyon amaçlı ise,bunun duali bir minimizasyon problemidir.
b) Primal problemin amaç katsayıları,dual problemin sağ taraf sabitlerini oluşturur.
c) Primal probleminin sağ taraf sabitleri,dual probleminin amaç katsayılarını oluşturur.
d) Primal problemin kısıtlayıcı sayısı,dual problemin değişken sayısına eşittir.
e) Primal problemin değişken sayısı,dual problemin kısıt sayısına eşittir.
f) Maksimizasyon amaçlı primal problemde kısıtlayıcıların yönü(≤)şeklinde iken,minimizasyon amaçlı dual problemin kısıtlayıcıların yönü(≥) şeklinde olur.
g) Her iki problemdeki değişkenler negatif olmamalıdırlar.
h) Primal problemin değişkenleri işareti sınırlanmamış ise, bunların karşılığı dual kısıtlayıcıları(=)eşitlikte olur.

[16] Bazaraa, a,g,e, s..5

i) Primal problemin kısıtlayıcıları(=)eşitlikte ise,bunlara karşılık gelen dual değişkenlerin işareti sınırlanmamış olur.

j) Simetri kuralı gereği ,dual problemin duali primal problem olacaktır .

Primal ile dual arasındaki benzer özellikleri görmek için, geliştirilen iki teorem vardır.Bunlar sırasıyla aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Teorem ı.

Primal problemin optimal çözümü $X_T = T^{-1}$ .b ve buna karşılık gelen amaç fonksiyon değeri $C_T X_T$ olsun. Dual problem optimal çözümü

w=$C_T T^{-1}$ olup amaç fonksiyon değeri$C_T X_T$ ye eşittir.

Primal problem bir maksimum problemi olsun

$$\text{Max}= cx$$

$$ax\leq b$$

$$x\geq 0$$

Problemin duali aşağıdaki gibidir.

$$\text{Min}=b'\, w\geq c'$$

$$a'w\geq c'$$

$$w\geq 0$$

Teoremin geçerliliği için iki sonucun elde edilmesi gerekir,bunlar;

1) X, primal problemin optimal mümkün çözümü,w, de dual problemin optimal mümkün bir çözümü göstermek üzere,

$$w'b\geq cx$$

olur.Buradan,

x ve w birer optimal mümkün çözüm olduğundan

$$ax\leq b$$

$$x\geq 0$$

[17] Öztürk,a.g.e,s.97.

$$a'w \geq C'$$

$$w \geq 0$$

olucaktır.Kısıtlayıcıları ifade eden eşitsizlikleri $w' \geq 0$ ve $x \geq 0$ ile çarpınca

$$w'ax \leq w'b$$

$$w'ax \geq cx$$

elde edilecektir, buradan:

$$w'\, b \geq cx$$

olacaktır[18].

2) Primal (max) problemi ve dual (min) probleminin , her ikisinin de optimal mümkün çözümü elde edilebiliyorsa [19].Bunlar ya birbirlerine eşittirler,yada dual(min) değeri primal(max) değerinden büyüktür.

$Z_{max}=Y_{min}$ veya;

$Z_{max} \leq Y_{min}$ olacaktır.

3) Şayet primal problem sınırsız bir çözüme sahipse,dual problem de mümkün bir çözüm değildir[20].

Teorem ıı.

Primal problemin optimal değeri x_j^* $j=1,2,3….n$ ve bunun dual optimal çözümü y_i^* $i= 1,2,…..m$ olsun.Her ikisi de optimal olmak şartıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$y_i^* \,.\, \left(\sum_{j=1}^{n} (aijxj^* - bi) = 0, \quad \text{için } i = 1,2,\ldots\ldots,m \right.$$

$$x_j^* . \left(\sum_{i=1}^{m} (aijyj^* - cj) = 0, \quad \text{için, } j = 1,2,\ldots\ldots\ldots n \right.$$

---

[18] Zeki Avralıoğlu;**Doğrusal Programlama ve Tarımsal İşletmelerde Bir Uygulama**,Ankara iktisadi ve Ticari İlimler akademisi İstatistik ve Temel Bilimler Fakültesi,Yayın No:139-1981/1,Ankara 1981,s.160.

19 Geniş Bilgi İçin Bakınız: S.John Croucher:"**Operations Research**"A First Course,Pergamon Pres,New York,1980

Problemin (primal-dual) kısıtlardan birinde, bir gölge(slack) değişken varsa, bunun ilişkili olduğu diğer problemdeki değişkenin değeri sıfıra eşit olacaktır. Bu teoreme tamamlayıcı gevşeklik(complementary slackness) adı da verilmektedir[21].

Aşağıda genel (canonical) formda verilen problemde bunu görebiliriz.

(ı)maksimize $\sum_{j=1}^{n} cjxj$

kısıtlar

(ıı) $\sum_{j=1}^{n} aijxj \le bj$ için, i= 1,2,……,h≤ m

(ııı) $\sum_{j=1}^{n} aijxj = 0$ için, i= h+1,h+2,…..,m

(ıv) $x_j \ge 0$ için, j = 1,2,…….,k≤ n

(v) x_j işareti sınırlanmamış, j= k+1,k+2,….. ,n.

Ve

(ı')miniimize $\sum_{i=1}^{m} biyi$ kısıtlar

(ıı') $\sum_{i=1}^{m} aijyi \ge ci$ için, j= 1,2,……,k

(ııı') $\sum_{i=1}^{m} aijyi = 0$ için, j= k+1,k+2,…..,n

(ıv') $y_i \ge 0$ için, i = 1,2,…….,h

(v') y_i işareti sınırlanmamış, i= h+1,h+2,….. ,m.

---

[20] Acar,,a,g,e.s,236.

[21] Wagner,a,g,e. s,134-140.

Dual teorem her iki problem için geçerlidir . Diğer bir anlatımla,primal ve dual sorunların optimal çözümünde,problemlerden birinde gölge değişkenler çözümde ise,diğer problemde bu değişkene karşılık gelen değişken sıfıra eşittir.Eğer kısıt,eşitlik olarak sağlanır ve gölge değişkeni sıfıra eşit olursa diğer problemde,bu kısıta karşılık gelen değişken çözümdedir[22] . Primal dual ilişkisini aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

Tablo.2.Primal Dual İlişkisindeki Dönüşüm Kuralları

Primal(maksimize)	Dual(minimize)
Amaç Fonksiyon	Sağ Taraf Sabiti
Sağ Taraf Sabiti	Amaç Fonksiyon
J' ninci Sütün Katsayıları	J' ninci Satır Katsayıları
İ'ninci Satır Katsayıları	İ'ninci Sütün Katsayıları
J'ninci Negatif Olmayan Değişken	J'ninci $\geq$ Şeklindeki Bir Eşitsizlik İlişkisi
J'ninci İşareti Sınırlanmamış Bir Değişken	J'ninci Eşitlik Şeklindeki Bir İlişki
İ'ninci $\leq$ Şeklindeki Bir Eşitsizlik İlişkisi	İ'ninci Negatif Olmayan Bir Değişken
İ'ninci Eşitlik Şeklindeki Bir İlişki	İ'ninci İşareti Sınırlanmamış Bir Değişken

KAYNAK:Harvey M,Wagner:" Principles Of Operations Research With Applications To Managerial Decisions"Prentice-Hall.İnc.,Canada-America,1969.s.137.

Primal ile dual arasındaki dönüşümü aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

[22] Tütek,a.g.e,s.184

Tablo3.Primal Problemin Duale Dönüştürülmesi

Primal Problem	Dual Problem
Z max/(min)= $\sum_{J=1}^{n} cjxj$	W min/(max)= $\sum_{i=1}^{m} biyi$
İ.Primal Kısıt	J.Dual Değişken
$\sum_{j=1}^{n} aijxj = \text{bi} \rightarrow$	Yi kısıtsız
$\sum_{j=1}^{n} aijxj \geq \text{bi} \rightarrow$	Yi $\geq$ 0
$\sum_{j=1}^{n} aijxj \leq \text{bi} \rightarrow$	Yi $\leq$ 0
J.Primal Değişken	İ.Dual Kısıt
xj = kısıtsız $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} aijyi = \text{cj}$
xj$\geq$ 0 $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} aijyi \geq \text{cj}$
xj ≤ 0 $\rightarrow$	$\sum_{i=1}^{m} aijyi \leq \text{cj}$

KAYNAK:Frederick S.Hillier,Gerald J.Lieberman:"İntroduction to Operations Research",Fourth Edition, Holden–Day,İnc, California,1986.s.150-151.

ÖRNEK PROBLEM(I)

Primal Problem | Standart Primal Problem

$Zmax=6x_1+8x_2$ | $Zmax=6x_1+9x_2+0S1+0S2+0S3$

Kısıtlar $4x_1+2x_2 \leq 30$ | $4x_1+2x_2+S1=30$

$2x_1+4x_2 \leq 24$ | $2x_1+4x_2+S2=24$

$3x_1+x_2 \leq 22$ | $3x_1+x_2+S3=22$

$x_1,x_2 \geq 0$ | $x_1,x_2,\ S1,S2,S3 \geq 0$

Problemin simpleks yöntemle çözümü sonunda oluşan optimal değerleri aşağıdaki gibidir.

Tablo.4.Örnek Problem(I)'in Çözüm Sonucu

TEMEL	X_1	x_2	S3	S2	S3	Ç:V
$6x_1$	1	0	1/3	0	0	6
$8x_2$	0	1	-1/6	1/4	0	3
0s3	0	0	-5/6	-1/4	1	1
C-Z	0	0	-2/3	-2	0	60

Dual Problem

Wmin=30Y1+24Y2+22Y3

4Y1+2Y2+3Y3≥6

2Y1+4Y2+Y3 ≥8

Y1,Y2,Y3≥0

Standart Dual Problem

Wmin=30Y1+24Y2+22Y3+MA1+0V1+MA2+OV2

4Y1+2Y2+3Y3+A1-V1=6

2Y1+4Y2+Y3+A2-V2= 8

Y1,Y2,Y3 ,A1,A2,V1,V2 ≥ 0

Tablo.5.Örnek Problem(I) İçin Dual Çözümünün Sonucu

Temel	Y1	Y2	Y3	A1	V1	A2	V2	Ç.V
30Y1	1	0	5/6	1/3	-1/3	-1/6	1/6	2/3
24Y2	0	1	-1/6	-1/6	1/6	1/3	1/3	5/3
C-Z	0	0	1	M-6	6	M-3	3	60

Örnek problem(ı) ‘in çözüm sonucundan yukarıdaki teoremlerin geçerliliği görülmektedir.

Bunlar;

Teorem ı in geçerliliği olan Z=W sağlanmıştır.

Zmax=60 = Wmin=60

Teorem ıı’nin geçerliliği olan;

X3Y1ı=0, $\rightarrow$0.1/3 = 0

X_4 .Y2=0, $\rightarrow$0.5/3 = 0

X5.Y3=0, $\rightarrow$1. 0 = 0

Elde edilmişlerdir.Ayrıca,her iki tablonun optimal son tablosunun (c-z) satırına bakarak hangi değişkenin çözüme gireceğini ve ne değer alacaklarını da bulmak mümkündür. Örneğin,dual tablodan bakarak;X1,değişkenin 6 değeriyle,X2,değişkeninde 3 değeriyle primalde çözüme gireceği görülmektedir. Aynı şekilde primal tabloya bakarak Y1’in 2/3 la ,Y2’ nin de 2 değeriyle çözüme gireceği görülmektedir .

ÖRNEK PROBLEM (2)

PRİMAL PROBLEM	DUAL PROBLEM
Z max = 6X1+7X2	Wmin = 5Y1+7Y2+2Y3+4Y4
Kısıtlar 3X1+4X2 $\leq$ 30	kısıtlar Y1+Y2+Y3+Y1$\geq$3
4 X1+3X2 $\geq$ 26	Y1+2Y2+2Y4 $\geq$5
X1 + X2 = 8	Y1$\geq$0,Y2$\leq$ 0,Y3,kısıtsız
X1,X2 $\geq$ 0	

Tablo.6.Örnek Problem (2) İçin Primal Dual Dönüşümü

Primal Problemin Standart Şekli	Her Bir Kısıt İçin Dual Değişken
Zmax=6X1+7X2+OX3+-MX4+0X5-MX6 Kısıtlar 3X1+4X2+X3=30 → 4X1+2X2+X4-X5=26 → X1 +X2+X6 = 8 → X1,X2, X3,X4,X5,X6 ≥ 0	 Y1 Y2 Y3
Primal Kısıtlayıcılar	Dual Değişken
Xj ≤ 30 → Xj $\geq$ 26 → Xj = 8 →	Y1 ≥ 0 Y2 $\leq$ 0 Y3, kısıtsız
Dual Problem	Dual Kısıtların Primal Değişkenleri
WMin=30Y1+26Y2+8Y3 Kısıtlar 3Y1+4Y2+Y3 ≥ 6 4Y1+3Y2+Y3 ≥ 7 Y1 ≥ 0 -Y2 ≥ 0 Y2 $\geq$ -M Y3 $\geq$ -M Y1,Y2,Y3,kısıtsız	 →X1 →X2 →S1 →A1 →V1 →A2

Primal ve Dual problemleri ayrı ayrı simpleks yöntemle çözelim.

Tablo.7. Örnek Problem(2) ‘nin Primal Çözümü

Aşama	Tem.	6X1	7X2	0S1	-MA1	0V1	-MA2	Ç.V
0	0S1	3	4	1	0	0	0	30
	-MA1	***4***	3	0	1	-1	0	26
	-MA2	1	1	0	0	0	1	8
	C-Z	6+5M	7+4M	0	0	M	0	34M
1	0S1	0	7/4	1	-3/4	0	¾	22/2
	6X1	1	3/4	0	¼	0	-1/4	13/2
	-MA2	0	**1/4**	0	-1/4	1	1/4	3/2
	C-Z	0	5/2+ 1/4M	0	-3/2 -3/4M	0	3/2 -1/4M	39 -3/2M
2	0S1	0	0	1	1	-7	-1	0
	6X1	1	0	0	1	-3	-1/2	2
	7X2	0	1	0	-1	4	1	6
	C-Z	0	0	0	-M+1	-M-10	-4	54

Çözüm sonunda X1=2,X2=6 Zmax=54 elde edilmiştir.

Primalin dual çözümünde, kısıtsız ve $Y_j \leq 0$ eşitliğini sağlamayan Y2 ve Y3 değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlamak gerekir.

$Y2=Y_2^{'}-Y_2^{''}$ $\qquad$ $Y3=Y_3^{'}-Y_3^{''}$

Buna göre dual problemin standart formu aşağıdaki gibi olacaktır.

$Wmin = 30Y1+26Y_2^{'} -26Y_2^{''} +8Y_3^{'} -8Y_3^{''} +MA1+MA1+0V1+0V2$

3Y1+4Y2’-4Y2’’+Y’3-Y’3+A1-V1=6

4Y1+3Y2’-3Y2’’+Y3’-Y3’’+A2-V2=5

$Y1, Y2^{'}, Y2^{''}, Y3^{'}, Y3^{''},\ A1, A2, V1, V2 \geq 0$

Problemin çözümü aşağıdaki gibidir.

Tablo 8: Örnek Problem (2)’nin Dual Çözümü

AŞM	T.	Y1	Y2’	Y2’’	Y3’	Y3’’	A1	A2	V1	V2	Ç.V
	MA1	3	**4**	-4	1	-1	1	0	-1	0	6
	MA2	4	3	-3	1	-1	0	1	0	-1	7
0	C-Z	-7M +30	-7M +26	7M -26	-2M +8	+2M -8	0	0	M	M	13M
1	Y2’	3/4	1	**-1**	1/4	-1/4	1/4	0	-1/4	0	6/4
	MA2	**7/4**	0	0	1/4	-1/4	-3/4	1	3/4	-1	10/4
	C-Z	-7/4M +42/4	0	0	-1/4M +6/4	1/4M -6/4	1/4M -26/4	0	26/4- 3/4M	M	156/4 10/4M
	Y2’	0	1	-1	64/448	- 64/448	124/428	- 12/28	-124/ 428	12/2 8	192 /448
2	Y1	1	0	0	4/28	-4/28	-12/28	4/7	12/28	-4/7	40/28
	C-Z	0	0	0	0	0	M+3.24	M-6	2	6	54

Y3=Y’3-Y’’3 = 0.5 – 0 = 0.5

Y2=Y2-X4 =2.5-0=2.5 Wmin=54 olarak gerçekleşmiştir.

Örnek problemin sonucundan Teorem ı'in birinci sonucu elde edilmiştir.Yani Primal problemin çözümü Zmax=54,ve dual problemin çözüm sonucu Wmin=54 dir.

Teorem I için problemin optimal sonucu=. Zmax = Wmin=54 elde edilmiştir.

Teorem ıı için , örnek problemden aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

X1.Y7= 2.0 = 0

X2.Y8= 2.5.0 = 0

X3.Y1= 0.5.0 = 0

X4.Y2=0.2.5 = 0

Elde edilmiştir.Böylece örnek problemde(ıı) de her iki teoremin geçerliliği görülmektedir.

4.PRİMAL DUAL İLİŞKİSİNİN EKONONOMİK YORUMU

Dual değişkenlerin optimal değerleri gölge fiyatlar olarak adlandırılır.Gölge fiyatlar,herhangi bir üretim kaynağının miktarını bir birim arttırması veya azaltması durumunda amaç fonksiyonda meydana gelecek artış veya azalış olarak tanımlanır.Dual problemlerde,elverişli kaynakların en etkin dağıtımı, tüm kaynakların toplam marjinal değerlerini(maliyetlerini) kısıtlayıcılara bağlı kalarak ürün kârından az olmayacak şekilde en küçükleme yani minumumu yapılarak sağlanır.[23].Modelde bulunan sağ taraftaki sabit değerler sınırlı kaynakların miktarını belirtirken,gölge fiyatlar da, primal modelin optimum çözümünden de anlaşılacağı gibi, her kaynağın biriminin değerini gösterirler. Optimal çözümde,fazla kapasitesi bulunan herhangi bir kaynak için sıfır gölge fiyat söz konusudur[24].Primal problem eldeki kaynakların kullanılarak,bir birim mamul üretilmesi halindeki kârdaki artışı gösteren bir kâr maksimizasyonu olurken,bunun duali eldeki hammadde ve diğer girdilerindeki birim maliyet azalışını gösteren gölge fiyatları için bir maliyet minimizasyonu olacaktır.

[23] Öztürk;a.g.e.s,103.

[24] Tulunay;,a.g.e. s,257-272

5. **UYGULAMA**

Uygulama alanı olarak bir tekstil işletmesi seçilmiştir. Bu işletme ürünlerini;resmi ve özel kuruluşlara ,şahıs ve dış ülke ihracatına yönelik olarak,pamuk ve sentetikten elde etmektedir.Ürünlerin çok geniş bir yelpazesi bulunmaktadır ve on sekiz ürün çeşidi tespit edilmiştir.Ürünler, üretime dört farklı departmanda işlenerek elde edilmektedirler.Departmanlarda kullanılan makineler saat olarak kısıtlara alınmıştır.Birim maliyetlerin en azını elde etmek üzere pirimal problemin modeli aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Karar değişkenleri;

X1=Goblen döşemelik üretim miktarı (metre),

X2=Lüks goblen üretim miktarı (metre),

X3=Süper goblen üretim miktarı (metre),

X4=Jakarlı döşemelik üretim miktarı (metre),

X5=Polyesterli perde üretim miktarı (metere),

X6=Sentetik perdeler üretim miktarı (metre),

X7=Jakar perdeler üretim miktarı (metre),

X8= Yatak örtüsü üretim miktarı (metre),

X9=Karyola örtüsü üretim miktarı (metre),

X10=Pike örtüsü üretim miktarı(metre),

X11=Erbaş için yazlık elbiselik kumaş üretim miktarı (metre),

X12=Yazlık elbiselik kumaş üretim miktarı(metre),

X13=Mevsimlik elbise kumaşı üretim miktarı(metre),

X14=Kışlık elbise kumaşı üretim miktarı(metre),

X15=Yazlık gömlek kumaşı üretim miktarı(metre),

X16=Mevsimlik gömlek kumaşı üretim miktarı(metre),

X17=Kışlık gömlek kumaşı üretim miktarı (metre), X18= Erbaş için kışlık kumaş üretim miktarı(metre).

Amaç satırdaki maliyetler bir metre kumaşın işlenme maliyeti olarak alınmış ve kısıtlayıcılarda bu mamullerin işlenme süreleri makine saati üzerinden hesaplanmıştır.Ürünler sırasıyla ; iplik,dokuma ihzar,dokuma mamul ve terbiye bölümlerinde işlenmektedirler. Kısıtlayıcıların sağ taraf sabitlerini makinelerin günlük çalışma saatlerini dakikaya çevrilerek hesaplanmıştır. Maliyetler (TL olarak) 1/1000'le çarpılarak verilmiştir ,uygulamanın doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibidir.

ZMin=6700X1+7500X2+8000X3+7000X4+5000X5+6000X6+6750X7+11000X8+6000X9+4000X10+4500X11+6000X12+3500X13+6600X14+3500X15+3500X16+5500X17+7000X18

Kısıtlar

.010X1+.015X2+.017X3+.015X4+.010X5+.009X6+.011X7+.020X8+.015X9+.017X10+.009X11+.018X12+.010X13+.022X14+.015X15+.009X16+.019X17+.010X18 ≥ 1100

.018X1+.010X2+.019X3+.022X4+.018X5+.008X6+.018X7+.030X8+.018X9+.016X10+.010X11+.017X12+.020X13+.021X14+.017X15+.007X16+.018X17+.018X18 ≥ 1080

.020X1+.020X2+.020X3+.010X4+.022X5+.011X6+.020X7+.018X8+.010X9+.011X11+.019X12+018X13+.018X14+.019X15+.011X16+.020X17+.017X18 ≥ 1140

.025X1+.018X2+.017X3+.008X3+.019X4+.019X5+.017X6+.010X7+.022X8+.005X9+.009X10++.018X11+.020X12+.022X13+.009X14+.022X15+.017X16+.022X17+.009X18 ≥ 1350

X1,X2,X3,X4,……………….,X18 ≥ 0

Problem QSB paket programıyla çözülmüştür,yedi iterasyon sonundaki değerler şöyledir.

X15=73333,336 birim, Zmin= 256666676 olmaktadır.

Daha sonra problemin duali alınmış ve aşağıdaki değerler elde edilmiştir.

Wmax=1100Y1+1080Y2+1140Y3+1350Y4

Kısıtlar

.010Y1+.018Y2+.020Y3+.025Y4 ≤ 6700

.015Y1+.010Y2+.020Y3+.018Y5 ≤ 7500

.017Y1+.019Y2+.020Y3+.018Y4 ≤ 8000

.015Y1+.022Y2+.010Y3+.008Y4 ≤ 7000

$.010Y1+.018Y2+.022Y3+.019Y4 \leq 5000$

$.009Y14.008Y2+.011Y3+.017Y4\leq 6000$

$.011Y1+.018Y2+.020Y3+.010Y4\leq 6750$

$.020Y1+.030Y2+.018Y3+.022Y4\leq 11000$

$.015Y1+.018Y2+.010Y3+.005Y4\leq 6000$

$.017Y1+.016Y2+.018Y3+.009Y4\leq 4000$

$.009Y1+.010Y2+.011Y3+.018Y4\leq 4500$

$.018Y1+.017Y2+.019Y3+.020Y4\leq 6000$

$.010Y1+.020Y2+.018Y3+.022Y4\leq 3500$

$.022Y1+.021Y2+.018Y3+.009Y4\leq 6600$

$.015Y1+.017Y2+.019Y3+.017Y4\leq 3500$

$.009Y1+.007Y2+.011Y3+.017Y4\leq 3500$

$.009Y1+.018Y2+.020Y3+.022Y4\leq 5500$

$.010Y1+.018Y2+.017Y3+.009Y4\leq 7000$

$Y1,Y2,Y3,Y4 \geq 0$

Problem iki iterasyon sonuncunda aşağıdaki değerleri bulunmuştur.

Y1=109374,98, Y4= 109375,01, Wmax=267968750 olarak gerçekleşmiştir.

Zmin< Wmax olarak gerçekleşmiştir.Dual çözüm sonucu, primal çözümün bir üst sınırını oluşturmuştur.

6.SONUÇ VE ÖNERİLER

Doğrusal programlama işletmelerde ortaya çıkan problemler için kullanılan bir optimallik tekniğidir.Doğrusal programlamada primal ile Dual ilişkisini ve çözüm sürecini ele aldık ve ekonomik yorumu üzerinde durmaya çalıştık. Farklı ve çeşitli ürünler üreten işletmeler için primal çözüm süreci uzun olabilir veya mümkün sonucu vermeyebilir.Bu nedenle modeli oluşturulan problemin duali alınarak çözümlenebilir.Büyük ölçekli ve çok sayıda mamul üreten işletmeler için primal çözüm süreci yerine dual çözümü önere bilinir.

KAYNAKÇA

Acar.,A, **Linear Proggramming For Managerial Decision , A Non- Algorithmic Apporach With Computer Applications**,Middle East Technical University,Ankara,1989,s.115.

Başar; F,2002, **Lineer Cebir**,Uğurel Matbaası Mimar Sinan Cad..No.31,s,141-190,Malatya.

Bazaraa Mokhtar,S,Jarvis J,1987, **Lineer Programming and Network Flowns,**John Wiley & Sons Canada/America ,s,160.

Eroğlu,A.,Güngör,İ.,1977,**Primal-Dual Doğrusal Programlama Modelleri Arasındaki İlişkiler**,S .Demirel Üniversitesi,İktisadi ve İdari Bilimler fakültesi Dergisi,s,95-108.

Fredrich S,Hillier and Gerald J,Lieberman, 1986,**İntroduction to Operations Research Fourt Edition,**Holden Day,Inc,s,134-167, America,1986.

Groucher J, S,1980,**Operations Research A First Course**,Pergoman Pres, New York ,1980.

Karayalçın.,İ,(1993),**Yöneylem-Hareket-Araştırması,Operations Research,**Geliştirilmiş 3.Baskı.Menteş Kitapevi.İstanbul.1993,s.111.

Hamdy.T,.**Operations Research,An İntroduction,**Fourth Edition,Collier Macmillan.inc.Canada-America,1987,s.65.

Öztürk.,A,1992)**,Yöneylem Araştırması,**Genişletilmiş III.Basım,Uludağ Üniversitesi Basımevi.,1992,s.17.

Tulunay;Y,**Matematik Programlama ve işletme Uygulamaları,**Bayrak Matbaacılık, ,İstanbul 1987, s,257

Tütek ,H H,., Gümüşoğlu.,Ş ,**Sayısal Yöntemler Yönetsel Yaklaşım,** Genişletilmiş 2.Basım .Beta Yayınevi,İstanbul,1994,s.113

Wagner,H,M., **Principles Of Operations Research With Applications To Managerial Decisions,**Prentice-Hall.İnc.,Canada-America,1969..s.103.

Yılmaz;Z,1995,**Sayısal Yöntemler**,Uludağ Üniversitesi Basımevi Bursa.