Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 23, Sayı 1, 272-276, 2019

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 23, Issue 1, 272-276, 2019

DOI: 10.19113/sdufenbed.478565

Topolojik *R*-Modül Grupoid Örtüleri

Nazmiye ALEMDAR

Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 38039, Kayseri
(ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0819-6613)

(Alınış / Received: 05.11.2018, Kabul / Accepted: 06.04.2019, Online Yayınlanma / Published Online: 26.04.2019)

Anahtar Kelimeler
Grup-grupoid,
Örtü grupoidi,
R-Modül grupoid,
Topolojik R-Modül grupoid

Özet: Bu makalede ilk olarak bir topolojik R-modül grupoid, topolojik R-modüllerin kategorisinde bir grupoid obje olarak tanımlandı. Daha sonra R, birim elemanı 1_R olan birimli bir diskre topolojik halka ve N, topolojik uzayı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik R-modül olmak üzere $\pi_1 N$ temel grupoidinin bir topolojik R-modül grupoid olduğu gösterildi. Son olarak da $p: \widetilde{N} \to N$ objeleri için N ve $\widetilde{N}$ birer evrensel örtüye sahip olacak şekilde $T_d ModCov/N$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi $UT_d ModCov/N$ ve $p: \widetilde{G} \to \pi_1 N$ objeleri için de N ve $\widetilde{N} = \widetilde{G}_0$ birer evrensel örtüye sahip olacak şekilde $T_d GdMCov/\pi_1 N$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi olan $UT_d GdMCov/\pi_1 N$ tanımlanıp, $UT_d ModCov/N$ ve $UT_d GdMCov/\pi_1 N$ kategorilerinin denk kategoriler olduğu ispatlanmıştır.

Topological *R*-Module Groupoid Coverings

Keywords
Group-groupoid,
Covering groupoid,
R-Module groupoid,
Topological R-Module groupoid

Abstract: In this paper, firstly a topological R-module groupoid is defined as a groupoid object in the category of topological R-modules. Then it is proved that the fundamental groupoid $\pi_1 N$ is a topological R-module groupoid, where R is a discrete topological ring with identity 1_R and N is a topological R-module whose underlying space has a universal covering. Finally, it is proved that the categories $UT_d ModCov/N$ and $UT_d GdMCov/\pi_1 N$ are equivalent, where $UT_d ModCov/N$ is a full subcategory of $T_d ModCov/N$ in which for objects $p: \widetilde{N} \to N$ both N and $\widetilde{N}$ have universal coverings and $UT_d GdMCov/\pi_1 N$ is the full subcategory of $T_d GdMCov/\pi_1 N$ in which for objects $p: \widetilde{G} \to \pi_1 N$ both $\widetilde{N} = \widetilde{G}_0$ and N have universal coverings.

1. Giriş

Her morfizmi bir izomorfizm olan bir kategoriye grupoid denir [1]. Bir grup tek objeli grupoiddir, ayrıca bir grupoid ise çok objeli grup gibi düşünülebilir[2]. Grupoidlerin kategorisinde bir grup objeye grup-grupoid denir[1]. Bu tanımdan yola çıkılarak [3] de halka-grupoid ve [4] de R-modül grupoid tanımları verilmiştir.

Örtü uzayları ve örtü grupoidleri teorisi cebirsel topolojinin iki önemli başlığıdır. X, topolojik uzayı basit irtibatlı örtüye sahip olan bir topolojik grup ise X in topolojik grup örtülerinin kategorisi $TGpCov/X$ ve $\pi_1 X$ temel grupoidinin grup-grupoid örtülerinin kategorisi $GpGdCov/\pi_1 X$ denk kategorilerdir[5],[6]. Benzer bir sonuç halka-grupoidler için [3] de elde edilmiştir. İçen, Özcan ve Gürsoy tarafından [7] de $UTCov/X$ ve $UTGCov/\pi_1 X$ kategorileri tanımlanıp, bu kategorilerinin denk kategoriler olduğu ispatlanmıştır.

Bir R-modül grupoid, grupoidlerin kategorisinde bir R-modül objedir[4]. Alemdar ve Mucuk tarafından [4] de eğer R, birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka ve N bir topolojik R-modül ise $\pi_1 N$ temel grupoidinin bir R-modül grupoid olduğu gösterilmiştir. Ayrıca [4] de R, birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka ve N, topolojik uzayı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik R-modül ise N topolojik R-modülünün topolojik R-modül örtülerinin $TModCov/N$ kategorisi ile $\pi_1 N$ temel grupoidinin R-modül grupoid örtülerinin $GdMCov/\pi_1 N$ kategorisinin denk kategoriler olduğu ispatlanmıştır.

Bu makalede ilk olarak topolojik R-modül grupoid tanımlandı. Daha sonra R, birim elemanı 1_R olan

*İlgili yazar: nakari @erciyes.edu.tr

birimli bir diskre topolojik halka ve N, topolojik uzayı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik R-modül ise $\pi_1 N$ temel grupoidinin bir topolojik R-modül grupoid olduğu gösterildi. Son olarak ta $UT_d ModCov/N$ ve $UT_d GpMCov/\pi_1 N$ kategorileri tanımlandı ve bu kategorilerin denk kategoriler olduğu ispatlandı.

2. *R*-Modül Grupoidler ve Örtüleri

$p: \tilde{X} \to X$ topolojik uzayların bir fonksiyonu olsun. Eğer X topolojik uzayının bir U alt cümlesi açık, eğrisel irtibatlı ve $p^{-1}(U)$ nun her bir eğrisel irtibatlı bileşeni $\tilde{X}$ da açık ve p ile homeomorfik olarak U üzerine dönüşürse U ya p ye göre *kanoniktir* denir. Ayrıca $p^{-1}(U)$ nun her bir eğrisel irtibatlı bileşenine de *kanonik komşuluk* adı verilir. Eğer X de her bir x noktasının bir kanonik komşuluğu varsa p ye örtü dönüşümü ve $\tilde{X}$ topolojik uzayına X topolojik uzayının *örtü uzayı* denir. Eğer $\tilde{X}$ ve X eğrisel irtibatlı ise p örtü dönüşümü irtibatlıdır denir [8].

Bir G grupoidi bir G_0 objeler cümlesi, bir G morfizmler cümlesi ile sırasıyla başlangıç ve bitiş dönüşümleri $s, t: G \to G_0$, $s \circ \varepsilon = t \circ \varepsilon = 1_{G_0}$ olacak şekilde birim dönüşüm $\varepsilon: G_0 \to G$, inversiyon dönüşüm $\gamma: G \to G$ ve

$$G_s \times_t G = \{(a,b) \in G \times G | s(b) = t(a)\}$$

cümlesi üzerinde tanımlı kısmi bileşke dönüşümünden oluşur ve bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlar,

1) $(b,a) \in G_s \times_t G$ için $s(ba) = s(a)$ ve $t(ba) = t(b)$ dır.

2)$s(c) = t(b), s(b) = t(a)$ olacak şekildeki $a, b, c \in G$ için $c(ba) = (cb)a$ dır.

3) Her bir $x \in G_0$ için 1_x, x objesinde birim morfizm olmak üzere $s(1_x) = t(1_x) = x$ dir.

4)Her $a \in G$ için $a1_{s(a)} = 1_{t(a)}a = a$ dır.

5)Her bir $a \in G$ için $\gamma(a) = a^{-1}$ olmak üzere $s(a^{-1}) = t(a)$, $t(a^{-1}) = s(a)$ ve $a^{-1}a = 1_{s(a)}$, $aa^{-1} = 1_{t(a)}$ dır [9].

Kısaca bir *grupoid* her bir morfizmi tersinir olan bir küçük kategoridir [8].

X bir topolojik uzay olsun. X de birim uzunlukta $\alpha: [0,1] \to X$ eğrilerinin uç noktalarına göre homotopi sınıfı olan $[\alpha]$ ların $\pi_1 X$ cümlesi X üzerinde bir grupoiddir. Bu grupoid *temel grupoid* olarak adlandırılır.

G ve H iki grupoid olsun. $f: G \to H$ ve $f_0: G_0 \to H_0$ dönüşüm ikilisi için $sf = f_0 s, tf = f_0 t$ ve her $(b,a) \in G_s \times_t G$ için $f(b \circ a) = f(b) \circ f(a)$ şartları sağlanıyorsa $f: G \to H$ dönüşümüne bir *grupoid morfizmi* denir. Buradan objeleri grupoidler ve morfizmleri grupoid morfizmleri olan bir kategori elde edilir ki bu kategori *Gd* ile gösterilir[2].

Grupoid örtü morfizmi [8] de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$f: G \to H$ bir grupoid morfizmi olsun. Eğer her bir $x \in G_0$ için f in $f_x: G_x \to H_{f_0(x)}$ kısıtlaması bijektif ise f morfizmine bir *grupoid örtü morfizmi* denir.

Ayrıca [10] dan bilindiği üzere;

$G_s \times_{f_0} H_0 = \{ (a,x) \in G \times H_0 \mid s(a) = f_0(x) \}$ bir geri çekme (pullback) olsun. $f: G \to H$ bir örtü morfizmidir ancak ve ancak $(f,s): H \to G_s \times_{f_0} H_0$ bijektiftir.

Bir G grupoidinin G_0 objeler cümlesi ve G morfizmler cümlesi birer topolojiye sahip ve grupoid yapısının $s, t, \varepsilon, \gamma$ dönüşümleri ve grupoid kısmi bileşke dönüşümü sürekli ise G ye *topolojik grupoid* denir [10]. Bir *topolojik grupoid morfizmi* sürekli olan $f_0: G_0 \to H_0$ ve $f: G \to H$ dönüşümlerinden oluşur.

Aşağıdaki sonuç Brown and Danesh-Naruie tarafından [11] da verilmiştir:

Eğer X evrensel örtüye sahip bir topolojik uzay ise $\pi_1 X$ temel grupoidi bir topolojik grupoiddir.

Bir G grubu üzerinde bir topoloji tanımlı ve bu topolojiye göre grup çarpım ve ters işlemleri sürekli ise G ye bir *topolojik grup* denir. Bir topolojik grup morfizmi sürekli bir grup homomorfizmidir.

Brown and Spencer tarafından [1] de *grup-grupoid*, grupoidlerin kategorisinde bir grup obje olarak tanımlanmıştır. Ayrıca bölüm grup-grupoidi tanımı da Mucuk vd. tarafından [12] de yapılmıştır.

Bir küçük G topolojik grupoidi için sırasıyla çarpım, invers ve birim olarak adlandırılan ve grup şartlarını sağlayan

1.$m: G \times G \to G$
2. $inv: G \to G$
3. $id: \{*\} \to G$ (burada $\{*\}$ tek objeli diskre kategori)

sürekli fanktorları mevcut ise G ye *topolojik grup-grupoid* denir[7].

Örnek 2.1: X bir topolojik grup olsun. Bu taktirde **X**$= X \times X$, objelerinin cümlesi X olan $s(x,y) = x$, $t(x,y) = y$, $\varepsilon(x) = (x,x)$, $\gamma(x,y) = (y,x)$ sürekli dönüşümleri ve $(y,z) \circ (x,y) = (x,z)$ sürekli kısmi bileşke işlemi dönüşümü ile bir topolojik grupoiddir. Ayrıca

$\oplus: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', \ y + y')$,

$inv: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, $(x, y)^{-1} = (-x, -y)$

$id: \ \{*\} \rightarrow \mathbf{X}$, $e = 0, 1_e = (0,0)$

Sürekli fanktorları ile $\mathbf{X}$ bir topolojik grup-grupoiddir[13].

Aşağıdaki sonuç [7] de verilmiştir:

Önerme 2.2: X bir topolojik grup olsun. Eğer X in topolojik uzay yapısı evrensel örtüye sahip ise $\pi_1 X$ temel grupoidi bir topolojik grup-grupoiddir.

G ve H birer topolojik grup-grupoid olsun. $F = (f_0, f): G \rightarrow H$ grupoid morfizmi için $f_0: G_0 \rightarrow H_0$ ve $f: G \rightarrow H$ birer topolojik grup homomorfizmi ise F ye bir *topolojik grup-grupoid morfizmi* denir[7].

Böylece topolojik grup-grupoidler ve onlar arasındaki morfizmler bir kategori oluşturur ve bu kategori *TGpGd* ile gösterilir.

Teorem 2.3: *X,* topolojik uzayı evrensel örtüye sahip bir topolojik grup olsun. Bu durumda X topolojik grubunun topolojik grup örtülerinin kategorisi olan *TGCov/X* kategorisi, $\pi_1 X$ temel grupoidinin grup-grupoid örtülerinin $GpGdCov/\pi_1 X$ kategorisine denktir[5], [6].

Aşağıdaki sonuç İçen vd. tarafından [7] de ispatlanmıştır:

Önerme 2.4: $p: \tilde{X} \rightarrow X$ objeleri için $\tilde{X}$ ve X in her ikisi de birer evrensel örtüye sahip olmak üzere *TGCov/X* kategorisinin bir dolu alt kategorisi *UTGCov/X* olsun. $p: \tilde{G} \rightarrow \pi_1 X$ objeleri için $\tilde{G}_0 = \tilde{X}$ ve X in her ikisi de birer evrensel örtüye sahip olmak üzere $TGpGdCov/\ \pi_1 X$ nin bir dolu alt kategorisi $UTGpGdCov/\pi_1 X$ olsun. Bu durumda $UTGpGdCov/\pi_1 X$ ve *UTGCov/X* kategorileri denk kategorilerdir.

R birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka olsun. Bir *topolojik (sol) R-modül*, bir N toplamsal değişmeli topolojik grubunun $\delta: R \times N \rightarrow N$, $(r, a) \rightarrow ra$ sürekli fonksiyonu ile oluşturduğu bir R-modüldür. Bir topolojik R-modülün, R-modül yapısının evrensel örtüsüne nasıl yükseltildiği Alemdar and Mucuk tarafından [14] de ispatlanmıştır.

R birim elemanı 1_R olan birimli bir halka olsun. N, objelerinin cümlesi ve morfizmlerinin cümlesi birer R-modül olan bir grupoid olmak üzere sırasıyla başlangıç ve bitiş dönüşümleri $s, t: N \rightarrow N_0$, birim dönüşümü $\varepsilon: N_0 \rightarrow N$, inversiyon dönüşümü $\gamma: N \rightarrow N$ ve grupoid kısmi bileşke dönüşümü $\mu: N_s \times_t N \rightarrow N$ birer R-modül morfizmi ise N grupoidine bir *R-modül grupoid* denir [4].

Ayrıca bir N, R-modül grupoidi $r \in R, x \in N_0$ ve $a, b \in N$ için grupoid kısmi bileşke işlemi ab şeklinde tanımlandığında $s(ra) = rs(a)$, $t(ra) = rt(a)$, $(ra)^{-1} = ra^{-1}$, $\varepsilon(rx) = r1_x$ ve $(ra)(rb) = r(ab)$ olan bir grup-grupoiddir[4].

$\tilde{N}$ ve N birer R-modül grupoid olsun. R-modül yapısını koruyan $f: \tilde{N} \rightarrow N$ grup-grupoid morfizmine bir *R-modül grupoid morfizmi* denir. Eğer bir $f: \tilde{N} \rightarrow N$ R-modül grupoid morfizmi grupoid yapıları üzerinde örtü morfizmi ise f ye *R-modül grupoid örtü morfizmi* denir[4].

Örnek 2.5: R birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka ve N bir topolojik R-modül ise $\pi_1 N$ temel grupoidi bir R-modül grupoiddir[4].

Örnek 2.6: Eğer N bir topolojik R-modül ise Örnek 2.1 deki gibi tanımlanan $\mathbf{N} = N \times N$ grupoidi bir grup-grupoiddir. Buna ek olarak $r \in R$, $x, y, z \in N$ ve $a = (x, y)$, $b = (y, z) \in \mathbf{N}$ için $s(ra) = rs(a)$, $t(ra) = rt(a)$, $(ra)^{-1} = ra^{-1}$, $\varepsilon(rx) = r1_x$ dir. Buradan $\mathbf{N}$ bir R-modül grupoiddir[4].

3. Topolojik *R*-Modül Grupoidler ve Örtüleri

Tanım 3.1: R birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka olsun. Bir N, R-modül grupoidinde N_0 ve N birer topolojik R-modül ve grupoid yapısını oluşturan tüm dönüşümler $s, t: N \rightarrow N_0$, $\varepsilon: N_0 \rightarrow N$, $\gamma: N \rightarrow N$ ve $\mu: N_s \times_t N \rightarrow N$ bu topolojilerle uyumlu birer sürekli R-modül morfizmi ise N ye bir *topolojik R-modül grupoid* denir.

Bir başka deyişle bir topolojik R-modül grupoid, topolojik R-modüllerin kategorisinde bir grupoid objedir.

Örnek 3.2: R birim elemanı 1_R olan birimli bir diskre topolojik halka olsun. Eğer N topolojik R-modül ise Örnek 2.1 de $\mathbf{N} = N \times N$ grupoidinin bir topolojik grup-grupoid olduğu gösterilmiştir. Buna ek olarak Örnek 2.6 da $\mathbf{N}$ nın bir R-modül grupoid olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\delta: R \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, (r, a) \mapsto ra$ sürekli dönüşümü ile birlikte $\mathbf{N}$ bir topolojik R-modül grupoiddir.

Önerme 3.3: R birim elemanı 1_R olan birimli bir diskre topolojik halka ve N, topolojik uzayı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik R-modül olsun. Bu durumda $\pi_1 N$ bir topolojik R-modül grupoiddir.

İspat: [7] den $\pi_1 N$ nin bir topolojik grup-grupoid olduğu bilinmektedir. Kabul edelim ki *N,* sürekli olan $m: N \times N \rightarrow N, (a, b) \mapsto a + b$ grup toplamı, sürekli olan $n: N \rightarrow N$, $a \mapsto -a$ invers dönüşümü ve sürekli olan $\delta: R \times N \rightarrow N$, $(r, a) \mapsto ra$ etkimesi ile bir topolojik R-modül olsun. Bu dönüşümlerden

$$\pi_1 m: \pi_1 N \times \pi_1 N \to \pi_1 N, ([a],[b]) \mapsto [a+b],$$

$$\pi_1 n: \pi_1 N \to \pi_1 N, [\,a] \mapsto [-a] = -[a],$$

ve ra eğrisi $t \in [0,1]$ için $(ra)(t) = ra(t)$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$\tilde{\delta}: R \times \pi_1 N \to \pi_1 N, (r,[a]) \mapsto r[a] = [ra]$$

grupoid morfizmlerinin üretildiği ve $\pi_1 N$ nin bir *R*-modül grupoid olduğu Alemdar ve Mucuk tarafından [4] de ispatlanmıştır.

O halde ispatı tamamlamak için $\tilde{\delta}: R \times \pi_1 N \to \pi_1 N$ morfizminin sürekli olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\tilde{U}'$ ve $\tilde{V}'$ sırasıyla $(ra)(0) = ra(0)$ ve $(ra)(1) = ra(1)$ in kanonik komşulukları olmak üzere $[ra]$ nın bir baz komşuluğu $\tilde{V}'[ra]\tilde{U}'^{-1}$ olsun. $\delta: R \times N \to N$ dönüşümü sürekli olduğundan $r, a(0)$ ve $a(1)$ in R ve N de $f(W \times U) \subset \tilde{U}'$ ve $f(W \times V) \subset \tilde{V}'$ olacak şekilde sırasıyla *W*, *U* ve *V* kanonik komşulukları mevcuttur. R diskre uzay olduğundan $r \times \left(\tilde{V}[a]\tilde{U}^{-1}\right)$, $R \times \pi_1 N$ de $(r,[a])$ nın bir kanonik komşuluğudur ve

$$\tilde{\delta}\left(r, \left(\tilde{V}[a]\tilde{U}^{-1}\right)\right) = \mathrm{r}\left(\tilde{V}[a]\tilde{U}^{-1}\right)$$
$$= \mathrm{r}\tilde{V}[ra]r\tilde{U}^{-1} \subset \tilde{V}'[ra]\tilde{U}'^{-1}$$

dir. Bu da $\tilde{\delta}$ nin sürekli olduğunu ispatlar.

$\tilde{N}$ ve N birer topolojik *R*-modül grupoid olsun. *R*-modül yapısını koruyan $f: \tilde{N} \to N$ topolojik grupoid morfizmine bir *topolojik R-modül grupoid morfizmi* denir. Eğer bir $f: \tilde{N} \to N$ topolojik *R*-modül grupoid morfizmi grupoid yapıları üzerinde örtü morfizmi ise f ye *topolojik R-modül grupoid örtü morfizmi* denir.

N bir topolojik *R*-modül grupoid olsun. Objeleri $p: \tilde{N} \to N$ topolojik *R*-modül örtüleri ve $p: \tilde{N} \to N$ den $q: \tilde{M} \to N$ ye bir morfizmi de *p=qf* olacak şekilde bir $f: \tilde{N} \to \tilde{M}$ (burada f bir örtü dönüşümüdür) dönüşümü olan bir kategori elde edilir. Bu kategori *TModCov/N* ile gösterilir. Benzer şekilde bir N topolojik *R*-modülü için objeleri $\pi_1 N$ temel grupoidinin $p: \tilde{G} \to \pi_1 N$ örtü morfizmleri ve $p: \tilde{G} \to \pi_1 N$ den $q: \tilde{H} \to \pi_1 N$ ye bir morfizmi de *p=qf* olacak şekilde bir $f: \tilde{G} \to \tilde{H}$(burada f bir örtü morfizmidir) *R*-modül grupoid morfizmi olan bir kategori elde edilir. Bu kategori *GdMCov/* $\pi_1 N$ ile gösterilir[4].

Aşağıdaki sonuç Alemdar ve Mucuk tarafından [4] de verilmiştir.

Önerme 3.4: R birim elemanı 1_R olan birimli bir topolojik halka ve N, topolojik uzayı evrensel örtüye sahip olan bir topolojik R-modül olsun. N topolojik *R*-modülünün örtü dönüşümlerinin *TModCov/N* kategorisi, $\pi_1 N$ temel grupoidinin grupoid örtü morfizmlerinin *GdMCov/* $\pi_1 N$ kategorisine denktir.

R birim elemanı 1_R olan birimli bir diskre topolojik halka olmak üzere *TModCov/N* kategorisinin bir dolu alt kategorisi $T_d\, ModCov/N$ ve $GdMCov/\, \pi_1 N$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi $T_d GdMCov/\, \pi_1 N$ kategorisini göz önüne alalım.

Ayrıca $p: \tilde{N} \to N$ objeleri için N ve $\tilde{N}$ birer evrensel örtüye sahip olacak şekilde $T_d ModCov/N$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi $UT_d ModCov/N$ olsun. $p: \tilde{G} \to \pi_1 N$ objeleri için N ve $\tilde{N} = \tilde{G}_0$ birer evrensel örtüye sahip olacak şekilde $T_d GdMCov/\, \pi_1 N$ kategorisinin bir dolu alt kategorisi $UT_d GdMCov/\, \pi_1 N$ olsun.

Bu makalede aşağıdaki sonuç ispatlanmıştır.

Teorem 3.5: $UT_d\, ModCov/N$ ve $UT_d\, GdMCov/\, \pi_1 N$ kategorileri denk kategorilerdir.

İspat: Bir

$$\pi_1: UT_d ModCov/N \ \to UT_d GdMCov/\, \pi_1 N$$

fanktoru aşağıdaki şekilde tanımlansın:

Kabul edelim ki $p: \tilde{N} \to N$ bir topolojik R-modül olsun. Bu durumda $p: \tilde{N} \to N$ den üretilen $\pi_1 p: \pi_1 \tilde{N} \to \pi_1 N$ morfizminin bir *R*-modül grupoid morfizmi olduğu Alemdar ve Mucuk tarafından [4] de ispatlanmıştır. Ayrıca N ve $\tilde{N}$ birer topolojik grup olduğundan $\pi_1 p: \pi_1 \tilde{N} \to \pi_1 N$ nin bir topolojik grup-grupoid morfizmi olduğu İçen vd. tarafından [7] ispatlanmıştır. Bunlardan dolayı $\pi_1 p$ bir topolojik *R*-modül grupoid morfizmidir.

Şimdi aşağıdaki şekilde bir

$$\theta: UT_d GdMCov/\, \pi_1 N \to UT_d ModCov/N$$

fanktoru tanımlansın:

Kabul edelim ki $q: \tilde{G} \to \pi_1 N$, N ve $\tilde{N} = \tilde{G}_0$ birer evrensel örtüye sahip olacak şekilde bir topolojik *R*-modül grupoid morfizmi olsun. Buradan $p = q_0: \tilde{N} \to N$ topolojik uzayların bir örtü dönüşümüdür[8].Burada $\tilde{N}$ üzerindeki topolojinin yükseltilmiş topoloji olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca q bir topolojik *R*-modül grupoid morfizmi olduğundan q_0 ve q birer topolojik *R*-modül morfizmidir.

Teorem 2.3 den N topolojik grubunun topolojik grup örtülerinin kategorisi, $\pi_1 N$ temel grupoidinin grup-grupoid örtülerinin kategorisine denk olduğundan aşağıdaki diyagram ispatı tamamlar:

$$\begin{array}{ccc} UT_d ModCov/N & \to & UT_d GdMCov/\pi_1 \mathrm{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ TGCov/N & \to & GpGdCov/\pi_1 \mathrm{N} \end{array}$$

Kaynakça

[1] Brown, R. and Spencer, C.B., 1976. G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group. Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet., 79, 296-302.

[2] Brown, R., 1987. From Groups to Groupoids: A Brief Survey. Bull. London Math. Soc., 19, 113-134.

[3] Mucuk, O., 1998. Coverings and ring-groupoids. Geor. Math. J., 5, 475-482.

[4] Alemdar N. and Mucuk O., 2012. The Liftings of R-Modules to Covering Groupoid. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics; 41(6), 813 - 822.

[5] Brown, R. and Mucuk, O., 1994. Covering groups of non-connected topological groups revisited. Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 115, 97-110.

[6] Mucuk, O., 1993. Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid, PhD Thesis, University of Wales.

[7] İçen, İ., Özcan, F. and Gürsoy, M. H., 2005. Topological group-groupoids and their coverings. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 36(9), 493-502.

[8] Brown, R., 2006. Topology and groupoids. BookSurge LLC, North Carolina.

[9] Mackenzi, K., 1987. Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differantial Geometry. London Math. Soc. Lec. Notes Series. Cambridge uni. Press.

[10] Hardy, J.L.P., 1974. Topological groupoids: Coverings and Universal constructions. PhD Thesis, University College of North Wales.

[11] Brown, R. and Danesh-Naruie, G., 1975. The fundamental groupoid as a topological groupoid. Proc. Edinburgh Math. Soc., 19 (2), 237-244.

[12] Mucuk, O., Şahan,T. and Alemdar, N., 2013. Normality and Quotients in Crossed Modules and Group-groupoids. Appl. Categor. Struct., 23, 415-428.

[13] Mucuk, O., Kılıçarslan, B., Şahan, T., Alemdar, N., 2011. Group-groupoid and monodromy groupoid. Topology Appl., 158, 2034–2042.

[14] Alemdar N. and Mucuk O., 2013. Existence of covering topological R-Modules. Filomat, 27(6), 1121 - 1126.