



## İKİLİ AĞAÇ VE İÇSEL METRİKLE DONATILMIŞ SIERPİNSKİ ÜÇGENİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Mustafa SALTAN\*

Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

### ÖZET

Fraktallerin temel örneklerinden biri olan Sierpinski üçgeni, birçok ilginç özelliği ile çeşitli araştırmalar için çalışma alanı olmaktadır. Son yılların önemli araştırma konularından biri olan içsel metrikler ise fraktal kümeler üzerinde ilginç formüllerle elde edilebilmektedir. Sierpinski üçgeninin kod kümesi üzerinde tanımlanan formül sayesinde birçok ilginç geometrik özellik ispatlanabilir. Bu çalışmada, köklü ikili ağaç ve Sierpinski üçgeni arasındaki ilişki ele alınmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Sierpinski üçgeni, İçsel metrik, Kod temsili, Köklü ikili ağaç

### THE RELATION BETWEEN BINARY TREE AND THE SIERPINSKI TRIANGLE WHICH IS EQUIPPED WITH THE INTRINSIC METRIC

#### ABSTRACT

The Sierpinski triangle, which is fundamental examples of fractals, has become a field of study for various investigations with many interesting features. Intrinsic metrics, one of the important research topics of recent years, can generate interesting formulas on fractals. Thanks to the formula defined on the code set of the Sierpinski triangle, many interesting geometric features can be proven. In this paper, the relationship between the rooted binary tree and the Sierpinski triangle is addressed.

**Keywords:** Sierpinski triangle, Intrinsic metric, Code representation, Binary rooted tree

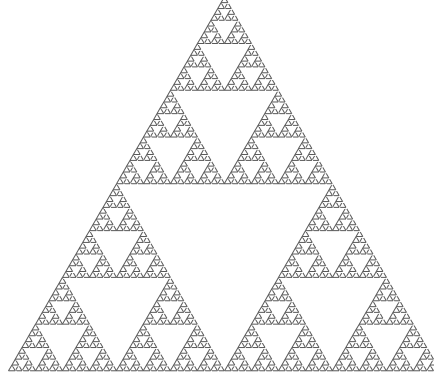
## 1. GİRİŞ

Doğanın geometrisi olarak bilinen fraktaller üzerine birçok farklı bilim dalında son yıllarda önemli çalışmalar yapılmaktadır [1-3]. Fraktallerin kesin bir tanımı olmamakla beraber genel olarak kendine benzerlik özelliği olan ve Hausdorff boyutunun topolojik boyutundan büyük olduğu kümeler olarak tanımlanabilir. Kendine benzerlikte, şeklin küçük parçalarında şeklin bütünü görülmesi kastedilmektedir. En önemli örnekleri olarak Cantor kümesi, Sierpinski üçgeni, Sierpinski halısı, Menger süngeri, Koch eğrisi gibi kümeler verilebilir. Bu kümelerin çoğunluğu ilk olarak farklı matematiksel problemlerin çözümünde model olarak tanımlanmıştır. 1975’ de Mandelbrot tarafından fraktal kelimesi ilk kez kullanıldıktan sonra bu kümeler fraktallerin temel örnekleri haline gelmiştir. Fraktalleri inşa etmenin farklı yolları vardır. Fraktallerin büyük bir kısmı yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) kavramı yardımı ile elde edilebilir.  $X$  tam metrik uzayı üzerinde bir yinelemeli fonksiyon sistemi büzülme dönüşümlerinin sonlu kümesidir.  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ,  $X$  kümesi üzerinde bir YFS ise,

$$\bigcup_{i=1}^n f_i(S) = S$$

olacak şekilde  $X$  in boş kümeden farklı bir tek kompakt alt kümesi vardır. Bu  $S$  kümesi ilgili YFS nin atraktörü olarak adlandırılır.

Bu çalışmada fraktallerden kısaca  $S$  ile göstereceğimiz ve köşeleri  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  ve  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  olan eşkenar üçgen üzerinde tanımlanan klasik Sierpinski üçgenini ele alınmaktadır (Şekil 1). Bu küme, 1915 yılında adını aldığı Polonyalı Matematikçi Waclaw Sierpinski tarafından tanımlanmış ve daha sonra fraktallerin en tipik örneklerinden biri haline gelmiştir. Alanının sıfır olması, Hausdorff boyutunun tamsayı olmaması ve kendine benzerlik gibi birçok ilginç özelliği ile üzerinde son yıllarda farklı özellikleri üzerine bir çok araştırma yapılmaktadır.



Şekil 1. Sierpinski üçgeni

Klasik Sierpinski üçgeni, aşağıda büzülme dönüşümleri açık olarak ifade edilen  $\mathbb{R}^2$  de  $\{f_1, f_2, f_3\}$  yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right), \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right). \end{aligned}$$

Son yılların popüler konularından biri ise bir kümenin üzerinde onun içsel yapısıyla uyumlu bir metrik tanımlamaktır.  $A$  boştan farklı bir küme ve  $x, y \in A$  olmak üzere,  $A$  üzerinde içsel metrik:

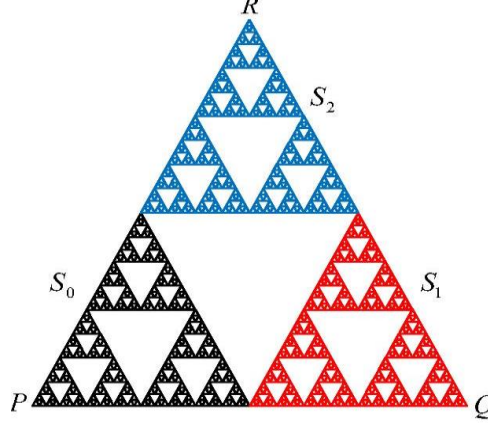
$$d(x, y) = \inf\{ \delta \mid \delta, A \text{ da } x \text{ ve } y \text{ noktaları arasındaki kabul edilebilir yolların uzunluğu} \}$$

olarak tanımlanır [4]. Burada kabul edilebilir bir yol ile sonlu uzunluklu yol kastedilmektedir. Kendine benzer yapılar üzerindeki içsel metrikler, farklı şekillerde ifade edilebilmektedir. Örneğin, Sierpinski üçgenini tanımlamanın farklı yolları olduğundan dolayı bu metrik farklı yollardan ifade edilebilir [5-12]. Bu kümenin noktalarının kod temsilleri kullanılarak açık olarak formüle edilen içsel metrik, [8] de tanımlanmaktadır. Bu metrik formülü sayesinde Sierpinski üçgeninin birçok önemli özelliği ispatlanmaktadır. Ayrıca, [12] de Sierpinski üçgeninin jeodezileri sınıflandırılmaktadır. [13] de ise Sierpinski üçgeninin topolojik özellikleri incelenmekte, [14] de Sierpinski üçgeninin çeşitkenar ve ikizkenar üçgen üzerinde inşa edildiğinde bu formülün genelleştirilmesi verilmekte ve bu üçgenlerin geometrik özellikleri karşılaştırılmaktadır. Bu çalışmada ise, Teorem 2.2 de içsel metrikle donatılmış klasik Sierpinski üçgeninin bir köşesinden bu köşeyi içermeyen kenarına çizilebilecek en kısa yolların kümesinin bir köklü düzgün ikili ağaç belirttiği gösterilmektedir. Ayrıca bu yollar üzerindeki noktaların kod temsilleri açık olarak ifade edilmektedir. Son olarak birkaç öğretici örnek verilmektedir.

### 1.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde, ilk olarak Tanım 1.1 için gerekli olan kavramlar kısaca hatırlanıp, daha sonra köklü düzgün ikili ağaç tanımı ifade edilecektir.

**Sierpinski üçgeninin üzerindeki noktalarının kod temsilleri:** Köşeleri  $P = (0,0)$ ,  $Q = (1,0)$  ve  $R = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  olan eşkenar Sierpinski üçgenini düşünelim.  $S_0 = \{0a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,1,2\}\}$ ;  $S$  nin sol alt parçası,  $S_1 = \{1a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,1,2\}\}$ ;  $S$  nin sağ alt parçası ve  $S_2 = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,1,2\}\}$ ;  $S$  nin üst parçasıdır ve Şekil 2 de görüldüğü gibi  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_0$  olur.



Şekil 2. Sierpinski üçgeninin  $S_0$ ,  $S_1$  ve  $S_2$  alt üçgenleri

Benzer bir yolla,  $S_{a_1}$  in sol alt, sağ alt ve üst üçgenleri sırasıyla  $S_{a_10}$ ,  $S_{a_11}$  ve  $S_{a_12}$  belirtilir. Genelleme yaparsak,  $S_{a_1a_2\dots a_n}$  ( $a_i \in \{0,1,2\}$  ve  $i = 1,2, \dots, n$ )  $S$  nin küçük bir alt üçgeni olmak üzere,

$$S_{a_1}, S_{a_1a_2}, S_{a_1a_2a_3}, \dots, S_{a_1a_2\dots a_n}, \dots$$

küme dizisi için  $S_{a_1} \supset S_{a_1a_2} \supset S_{a_1a_2a_3} \dots \supset S_{a_1a_2\dots a_n} \supset \dots$  ilişkisi geçerlidir ve Cantor arakesit teoreminden

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{a_1a_2\dots a_n} = \{A\}$$

olacak şekilde  $A \in S$  vardır.  $a_1a_2 \dots a_n \dots$ ,  $A$  noktasının kod temsili olarak adlandırılır. Eğer  $A \in S$  noktası  $S$  nin aynı seviyedeki iki alt üçgeninin tek kesişim noktası ise bu durumda  $a_1a_2 \dots a_n \alpha \beta \beta \beta \dots$  ve  $a_1a_2 \dots a_n \beta \alpha \alpha \alpha \dots$  ( $\alpha, \beta \in \{0,1,2\}$  ve  $\alpha \neq \beta$ ) olacak şekilde iki farklı kod temsiline sahiptir. Aksi takdirde,  $A$  bir tek kod temsiline sahiptir. Sierpinski üçgeninin  $S_\sigma$  alt üçgeninin köşe noktalarının kodları,  $P_\sigma = \sigma 000 \dots$ ,  $Q_\sigma = \sigma 111 \dots$ ,  $R_\sigma = \sigma 222 \dots$  ile belirlenir. Ayrıca,  $S_\sigma$  nin  $P_\sigma Q_\sigma$ ,  $P_\sigma R_\sigma$  ve  $Q_\sigma R_\sigma$  kenarları, üzerindeki noktaların kod temsilleri tarafından

$$P_\sigma Q_\sigma = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0,1\}\}$$

$$P_\sigma R_\sigma = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{0,2\}\}$$

$$Q_\sigma R_\sigma = \{\sigma a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots : a_i \in \{1,2\}\}$$

kümeleri olarak ifade edilir.

**Tanım 1.1.**  $i = 1,2,3, \dots$  için  $a_i, b_i \in \{0,1,2\}$  ve  $i = 1,2,3, \dots, k-1$  için  $a_i = b_i$  ve  $a_k \neq b_k$  olmak üzere  $a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k a_{k+1} \dots$  ve  $b_1b_2 \dots b_{k-1}b_k b_{k+1} \dots$  Sierpinski üçgeninin sırasıyla  $A$  ve  $B$  noktalarının kod temsilleri olsunlar.  $a_k \neq c_k \neq b_k$ ,  $c_k \in \{0,1,2\}$  ve

$$\alpha_i = \begin{cases} 0 & a_i = b_k \text{ ise} \\ 1 & a_i \neq b_k \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta_i = \begin{cases} 0 & b_i = a_k \text{ ise} \\ 1 & b_i \neq a_k \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & a_i = c_k \text{ ise} \\ 1 & a_i \neq c_k \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \delta_i = \begin{cases} 0 & b_i = c_k \text{ ise} \\ 1 & b_i \neq c_k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere,  $S$  üzerindeki içsel metrik;

$$d(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}, \frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} \right\} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir.  $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{k-1}$  olmak üzere,

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i}$$

değeri  $S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma b_k}$  noktasından geçen en kısa yolun uzunluğu,

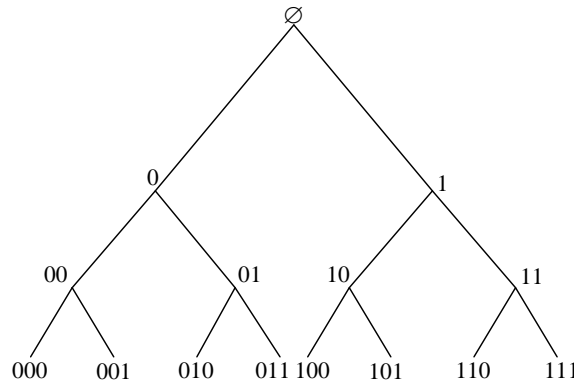
$$\frac{1}{2^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i}$$

değeri ise  $S_{\sigma c_k}$  alt üçgeninin ( $S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k}$ ) ( $S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k}$ ) kenarından geçen en kısa yolun uzunluğunu ifade etmektedir. Burada  $\frac{1}{2^k}$  değeri ise ( $S_{\sigma a_k} \cap S_{\sigma c_k}$ ) ( $S_{\sigma b_k} \cap S_{\sigma c_k}$ ) kenarının uzunluğudur.

**Köklü düzgün ikili ağaç:** Ağaç, genel olarak hiçbir döngü içermeyen bağlantılı bir çizgedir. Köklü düzgün ikili ağaç ise sadece bir köşesinin derecesi iki, diğer köşelerinin derecesi üç olan ağaçtır. Derecesi iki olan köşe ağacın köküdür. Burada bir köşenin derecesi ile bu köşeye gelen ve bu köşeden çıkan kenar sayılarının toplamı kastedilmektedir. Bu yapıda, her bir köşe noktasından çıkan kenar sayısı iki, kök hariç diğer köşelere gelen kenar sayısı birdir. Örnek vermek gerekirse,  $X = \{0,1\}$  kümesi için, boş kelimeyi içeren  $X$  üzerindeki bütün sonlu kelimelerin kümesi,

$$X^* = \{x_0 x_1 x_2 \dots x_m \mid x_i \in X, m \geq 0\}$$

tarafından belirtilsin. Açık olarak,  $X^*$  kümesi sonlu ağacın köşe kümesidir. Bu ağaçta iki köşenin bir kenar tarafından bağlantılı olması için gerek ve yeter şart  $v \in X^*$  ve  $x \in X$  olmak üzere bu iki köşenin  $v, vx$  formunda olmasıdır.  $\emptyset$ ,  $X^*$  ağacının köküdür ve bu ağacın  $m$ . seviyesi ise  $X^m$  ile gösterilir. Her bir seviyedeki köşe noktasından çıkan kenar sayısı iki olduğundan bu bir köklü düzgün ikili ağaç modelidir (Şekil 3).



Şekil 3. Köklü düzgün ikili ağacın ilk üç seviyesi

## 2. SIERPİNSKİ ÜÇGENİ VE KÖKLÜ DÜZGÜN İKİLİ AĞAÇ ARASINDAKİ İLİŞKİ

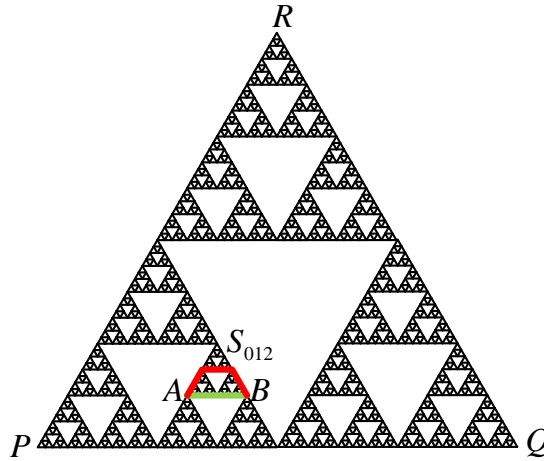
Bu bölümde, köklü ikili ağaç ile Sierpinski üçgeni arasındaki bir ilişkidenden bahsedilmektedir. Bu ilişkiyi vermeden önce Teorem 2.2 in ispatında sıklıkla kullanacağımız aşağıdaki özellik ispatlanacaktır.

**Yardımcı Teorem 2.1.**  $A$  ve  $B$  noktaları, Sierpinski üçgeninin bir  $S_\sigma$  alt üçgeninin farklı iki köşe noktası ise bu iki nokta arasındaki en kısa yol bu alt üçgenin bu noktalarını birleştiren  $AB$  kenarıdır.

**İspat:**  $\sigma = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ,  $a_i \in \{0,1,2\}$  olmak üzere Sierpinski üçgeninin  $S_\sigma$  alt üçgenini düşünelim.  $A$  ve  $B$  noktaları  $S_\sigma$  alt üçgeninin farklı iki köşe noktası olsun. Bu durumda  $a_i, b_i \in \{0,1,2\}$ ,  $a_n \neq b_n$  olmak üzere,  $A$  ve  $B$  noktalarının kod temsilleri sırasıyla,  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_n a_n a_n \dots$  ve  $a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n b_n b_n b_n \dots$  olur. Açık olarak  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki en kısa yol

$$S_{\sigma a_n} \cap S_{\sigma b_n} = \{\sigma a_n b_n b_n b_n \dots\} = \{\sigma b_n a_n a_n a_n \dots\}$$

noktasından geçmelidir.



Şekil 4.  $S_{012}$  alt üçgeninin  $A$  ve  $B$  köşelerinden en kısa yol (yeşil)

Çünkü,  $a_n \neq b_n$  olduğundan  $i = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$  için  $\alpha_i = \beta_i = 1$  olup,

$$d(A, B) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1+1}{2^i} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilir. Aksi taktirde,  $a_n \neq c_n$  ve  $b_n \neq c_n$  olup  $i = n + 1, n + 2, n + 3, \dots$  için  $\gamma_i = \delta_i = 1$  olduğundan,

$$d(A, B) = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1+1}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

elde edilirdi (özel bir örnek için Şekil 4 e bakınız). Diğer alt üçgenler için de benzer yol geçerli olup  $A$  ve  $B$  noktaları arasındaki en kısa yol Sierpinski üçgeninin  $S_\sigma$  alt üçgeninin

$$AB = \{\sigma x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots : x_i \in \{a_n, b_n\}\}$$

kenarından geçer.

**Teorem 2.2.** Sierpinski üçgeninin  $R$  köşe noktasından  $PQ$  kenarına olan en kısa yolların kümesi, kökü  $R$  olan köklü düzgün ikili ağaç belirtir.

**İspat:** Sierpinski üçgeninin kod temsili  $222 \dots$  olan  $R$  köşe noktasını alalım. İlk olarak, Sierpinski üçgeninin  $R$  köşesinden  $PQ$  kenarı üzerindeki keyfi bir noktaya en kısa yoldan ulaşmak için kullanılan Sierpinski üçgeninin alt üçgenlerinin köşe noktalarını ve bu köşelerin kod temsillerini, kenarları ve kenarlar üzerindeki noktaların kod temsillerini ifade edeceğiz. Son olarak, bu köşe noktalarından iki kenar çıktığını gösterip köklü düzgün ikili ağaç ile olan ilişkisini belirteceğiz.

Açık olarak,  $PQ$  kenarı üzerindeki noktaların kod temsilleri tarafından

$$\{r_1 r_2 r_3 \dots : r_i \in \{0,1\}\}$$

kümesi olarak ifade edilir. Bu kenar üzerinde bulunan ve kod temsili  $x_1 x_2 x_3 \dots$  olan Sierpinski üçgeninin keyfi bir  $X$  noktasını alalım.  $X \in PQ$  olduğundan dolayı  $i = 1, 2, 3, \dots$  için  $x_i \in \{0,1\}$  dir.

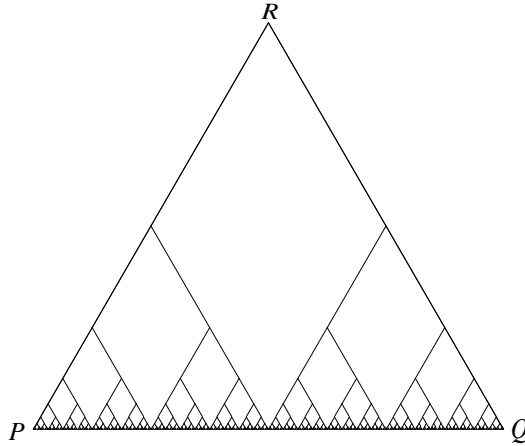
Şimdi  $d(X, R) = 1$  olduğunu gösterelim.  $x_1 \neq 2$  olduğundan dolayı  $k = 1$  elde edilir. Ayrıca,  $i = 2, 3, 4 \dots$  için  $x_i \neq 2$  olduğundan dolayı  $\alpha_i = 1$  elde edilir.  $x_1 \neq 2$  olduğundan,  $i = 2, 3, 4 \dots$  için  $\beta_i = 1$  elde edilir. Böylece;

$$\mu = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\alpha_i + \beta_i}{2^i} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{2^i} = 1$$

olur.  $R$  noktasının kod temsilinin ilk terimi 2 olduğundan,  $x_1 = 0$  ise  $c_1 = 1$  ve  $x_1 = 1$  ise  $c_1 = 0$  dir. Her iki durumda da  $c_1 \neq 2$  dir. Böylece  $i = 2, 3, 4 \dots$  için  $\gamma_i = 1$  elde edilir.

$$\rho = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\gamma_i + \delta_i}{2^i} = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1 + \delta_i}{2^i} \geq 1$$

olduğundan,  $d(X, R) = \min\{\mu, \rho\} = 1$  bulunur.



Şekil 5.  $R$  köşesinden  $PQ$  kenarına en kısa yolların kümesi

Eğer  $X$  noktası  $P$  veya  $Q$  ye eşitse bu iki nokta  $S$  nin köşe noktaları olup bu noktalar arasındaki en kısa yol Yardımcı Teorem 2.1 de dolayı  $RX$  kenarıdır ve kod temsili

$$RX = \{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\}$$

dir.  $X, S$  nin  $P$  ve  $Q$  köşe noktalarından farklı olsun. İlk olarak  $S_{x_1} \cap S_2$  noktasından geçen en kısa yolu düşünelim.  $S_{x_1} \cap S_2 = \{X_1\}$  noktasının iki kod temsili  $2x_1x_1x_1 \dots$  ve  $x_1222 \dots$  dir. Kod temsilleri sırasıyla  $222 \dots$  ve  $2x_1x_1x_1 \dots$  olan  $R$  ve  $X_1$  noktaları  $S_2$  alt üçgeninin iki köşe noktası olup Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı bu noktalar arasındaki en kısa yol bu alt üçgenin köşe noktalarını birleştiren kenardır ve bu kenarın kod kümesi:

$$RX_1 = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\}$$

ile ifade edilir. Şimdi  $X_1$  ve  $X$  noktalarından geçen en kısa yolu bulalım. Eğer  $X_1$  ve  $X$  aynı alt üçgenin iki köşe noktası ise Yardımcı Teorem 2.1 gereğince en kısa yol direk olarak bulunur. Yani;  $x_1 \neq c_1 \neq 2$  olmak üzere bu yol  $S_{x_1}$  alt üçgeninin  $X_1X$  kenarındır ve kod temsili

$$X_1X = \{x_1a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{c_1, 2\}\}$$

olarak elde edilir. Bu ise  $X$  in kod temsili  $0111..$  veya denk olarak  $1000 \dots$  olan noktada geçerlidir. Dikkat edelim ki, bu durumda  $i = 2,3,4 \dots$  için  $\delta_i = 0$  olduğundan  $\rho = 1$  bulunur ve böylece  $\mu$  ve  $\rho$  nun hesabında görüldüğü gibi iki en kısa yol vardır. En kısa yollardan biri  $S_{x_1} \cap S_2$  noktasından diğeri ise  $(S_{x_1} \cap S_{c_1}) (S_2 \cap S_{c_1})$  kenarından geçmelidir. Burada  $(S_{x_1} \cap S_{c_1}) (S_2 \cap S_{c_1})$  kenarından kod kümesi:

$$(S_{x_1} \cap S_{c_1}) (S_2 \cap S_{c_1}) = \{c_1a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\}$$

ile belirlenir. Bu durumda  $S_2 \cap S_{c_1} = \{X_1'\}$  noktasının kod temsilleri  $2c_1c_1c_1 \dots$  ve  $c_1222 \dots$  olup kod temsilleri sırasıyla  $222 \dots$  ve  $2c_1c_1c_1 \dots$  olan  $R$  ve  $X_1'$  noktaları  $S_2$  alt üçgeninin iki köşe noktası olup Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı bu noktalar arasındaki en kısa yol bu alt üçgenin köşe noktalarını birleştiren kenardır ve bu kenarın kod kümesi,

$$RX_1' = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{c_1, 2\}\}$$

ile gösterilir. Böylece  $R$  ve  $X$  noktaları arasındaki en kısa yollardan diğeri  $RX_1'$  ile  $(S_{x_1} \cap S_{c_1}) (S_2 \cap S_{c_1}) = XX_1'$  kenarlarının birleşimidir.

Şimdi  $X_1$  ve  $X$  noktalarının aynı alt üçgenin iki köşe noktası olmadığı durumu düşünelim. Bu noktalardan geçen en kısa yol az önce yapılabildiği şekilde  $S_{x_1x_2} \cap S_{x_12}$  noktasından geçmelidir. Bu noktayı  $X_2$  olarak adlandıralım. Açık olarak bu noktanın iki kod temsili sırasıyla  $x_12x_2x_2x_2 \dots$  ve  $x_1x_2222 \dots$  dir.  $X_1$  ve  $X_2$  noktaları Sierpinski üçgeninin  $S_{x_12}$  alt üçgeninin köşe noktaları olup bu iki köşe noktası arasındaki en kısa yol Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı bu alt üçgenin bu köşelerini birleştiren kenarıdır ve bu kenar üzerindeki noktaların kod temsilleri ile

$$X_1X_2 = \{x_12b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 2\}\}$$

olarak belirlenir. Eğer  $X_2$  ve  $X$  aynı alt üçgenin iki köşe noktası ise Yardımcı Teorem 2.1 gereğince en kısa yol direk olarak bulunur. Yani;  $x_2 \neq c_2 \neq 2$  olmak üzere bu yol  $S_{x_1x_2}$  alt üçgeninin  $X_2X$  kenarındır ve kod temsili

$$X_2X = \{x_1x_2a_3a_4a_5 \dots : a_i \in \{c_2, 2\}\}$$

olarak elde edilir. Bu ise  $X$  in kod temsili  $x_10111..$  veya denk olarak  $x_11000 \dots$  olan noktada geçerlidir. Benzer şekilde bu durumda da iki en kısa yol vardır.  $\mu$  ve  $\rho$  nun hesabında görüldüğü gibi en kısa yollardan biri  $S_{x_1x_2} \cap S_{x_12}$  noktasından diğeri ise  $(S_{x_1x_2} \cap S_{x_1c_2}) (S_{x_12} \cap S_{x_1c_2})$  kenarından geçmelidir. Burada  $(S_{x_1x_2} \cap S_{x_1c_2}) (S_{x_12} \cap S_{x_1c_2})$  kenarı, üzerindeki noktaların kod temsilleri ile

$$(S_{x_1 x_2} \cap S_{x_1 c_2}) (S_{x_1 2} \cap S_{x_1 c_2}) = \{x_1 c_2 a_3 a_4 a_5 \dots : a_i \in \{x_2, 2\}\}$$

olarak belirlenir. Bu durumda  $S_{x_1 2} \cap S_{x_1 c_2} = \{X_2'\}$  noktasının kod temsilleri  $x_1 2 c_2 c_2 c_2 \dots$  ve  $x_1 c_2 222 \dots$  olup, kod temsilleri sırasıyla  $x_1 222 \dots$  ve  $x_1 2 c_2 c_2 c_2 \dots$  olan  $X_1$  ve  $X_2'$  noktaları  $S_{x_1 2}$  alt üçgeninin iki köşe noktası olup Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı bu noktalar arasındaki en kısa yol bu alt üçgenin köşe noktalarını birleştiren kenardır ve bu kenar üzerindeki noktaların kod temsilleri ile

$$X_1 X_2' = \{x_1 2 a_3 a_4 a_5 \dots : a_i \in \{c_2, 2\}\}$$

olarak gösterilir. Böylece  $X_1$  ve  $X$  noktaları arasındaki en kısa yollardan diğeri  $X_1 X_2'$  ile  $(S_{x_1 x_2} \cap S_{x_1 c_2}) (S_{x_1 2} \cap S_{x_1 c_2}) = X X_2'$  kenarlarının birleşimidir.

Benzer yolla devam edersek,  $X_n$  ve  $X_{n+1}$  noktaları Sierpinski üçgeninin  $S_{x_1 x_2 \dots x_n 2}$  alt üçgeninin köşe noktaları olup bu iki köşe noktası arasındaki en kısa yol Yardımcı Teorem 2.1 den dolayı bu alt üçgenin bu köşelerini birleştiren kenardır ve bu kenar üzerindeki noktaların kod temsilleri ile

$$X_n X_{n+1} = \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n 2 w_{n+2} w_{n+3} \dots : w_i \in \{x_{n+1}, 2\}\}$$

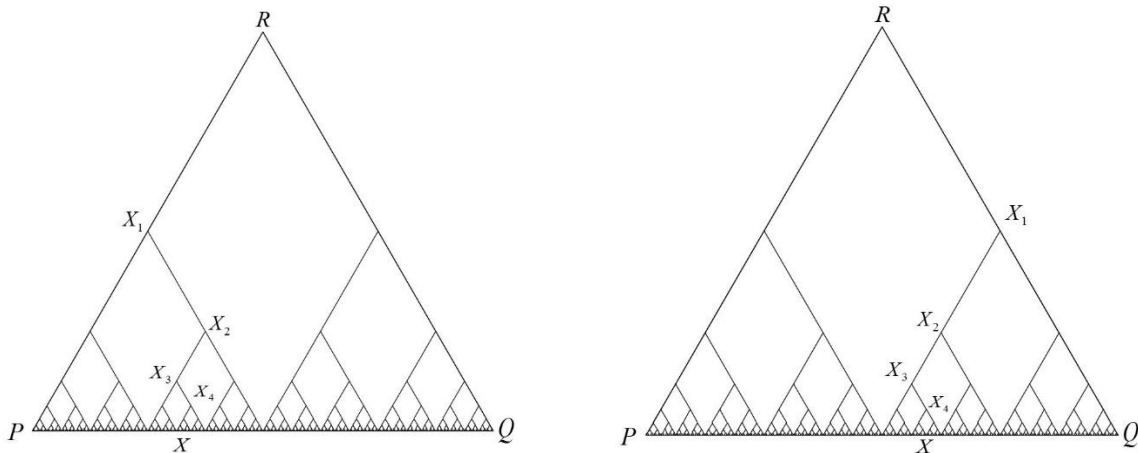
olarak elde edilir.

Böylece  $R = X_0$  ve  $X$  noktaları arasındaki en kısa yolun kod kümesi; eğer  $X$  noktası alt üçgenlerin bir kesişim noktası değilse,

$$\begin{aligned} RX &= \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i X_{i+1} \\ &= R X_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_n X_{n+1} \cup \dots \\ &= \{2 a_2 a_3 a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\} \cup \{x_1 2 b_3 b_4 b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 2\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n 2 w_{n+2} w_{n+3} \dots : w_i \in \{x_{n+1}, 2\}\} \cup \dots \end{aligned}$$

olarak belirlenir (Şekil 6).

Eğer  $X$ , n. adımdaki üçgenlerin kesişim noktası ise,  $x_n \neq c_n \neq 2$  olmak üzere,  $R = X_0$  ve  $X = X_{n+1}$  noktaları arasında iki en kısa yol vardır ve bu yolların kod kümeleri,



Şekil 6. R ve X arasındaki en kısa yol üzerindeki noktalar



$$\begin{aligned} RX &= RX_1 \cup X_1X_2 \cup X_2X_3 \cup \dots \cup X_{n-2}X_{n-1} \cup X_{n-1}X_n \cup X_nX \\ &= \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\} \cup \{x_12b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 2\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1x_2x_3 \dots x_nw_{n+1}w_{n+2} \dots : w_i \in \{c_n, 2\}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} RX &= RX_1 \cup X_1X_2 \cup X_2X_3 \cup \dots \cup X_{n-2}X_{n-1} \cup X_{n-1}X_n' \cup X_n'X \\ &= \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\} \cup \{x_12b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 2\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1x_2x_3 \dots 2w_nw_{n+1} \dots : w_i \in \{c_n, 2\}\} \cup \{x_1x_2x_3 \dots c_nw_nw_{n+1} \dots : w_i \in \{x_n, 2\}\} \end{aligned}$$

olarak formüle edilir. Bu inşada görüldüğü gibi Sierpinski üçgeninin  $R$  köşe noktasından  $PQ$  kenarı üzerindeki keyfi bir  $X$  noktasına ulaşmak için izlenen en kısa yolların kümesinde, Sierpinski üçgeninin alt üçgenlerinin köşe noktalarının kod temsilleri

$$222 \dots, 2x_1x_1x_1 \dots, x_12x_2x_2x_2 \dots, x_1x_22x_3x_3x_3 \dots, \dots, x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}2x_nx_nx_n \dots, \dots$$

olur. Ayrıca, kod temsili  $222 \dots$  olan köşe noktasından geçen kenarlar üzerindeki noktaların kod temsillerin kümesi

$$\{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 2\}\}$$

olup,  $X$  in seçiminden  $x_1 = 0$  veya  $x_1 = 1$  olduğundan  $R$  köşe noktasından çıkan bu iki kenarın kod temsillerin kümesi sırasıyla  $\{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,2\}\}$  yada  $\{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{1,2\}\}$  olmalıdır. Bu köşe noktası dışında alacağımız keyfi bir  $x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}2x_nx_nx_n \dots$  köşe noktasından çıkan kenarlar üzerindeki noktaların kod temsillerin kümesi

$$\{x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n2w_{n+2}w_{n+3} \dots : w_i \in \{x_{n+1}, 2\}\}$$

olup,  $X$  in seçiminden  $x_{n+1} = 0$  veya  $x_{n+1} = 1$  olduğundan  $x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}2x_nx_nx_n \dots$  köşe noktasından çıkan bu iki kenarın kod temsillerin kümesi sırasıyla  $\{x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n2w_{n+2}w_{n+3} \dots : w_i \in \{0,2\}\}$  yada  $\{x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n2w_{n+2}w_{n+3} \dots : w_i \in \{1,2\}\}$  olmalıdır. Böylece,  $R$  köşe noktasından  $PQ$  kenarı üzerindeki keyfi bir  $X$  noktasına ulaşmak için izlenen en kısa yolların kümesi Sierpinski üçgeninin bir alt kümesi olduğundan açık olarak hiçbir döngü içermez, bağlantılıdır ve her köşe noktasından tam olarak iki kenar çıktığı için kökü  $R$  olan köklü düzgün ikili ağaç belirtir.

**Örnek 2.3.**  $X$  noktasının kod temsili  $1100 \dots$  olsun.  $X$  ve  $R$  noktaları arasındaki en kısa yolların kod kümelerini bulalım. Açık olarak  $X$  noktasının iki kod temsili olduğundan, kod kümeleri

$$RX = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{1,2\}\} \cup \{12b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{1,2\}\} \cup \{11w_3w_4w_5 \dots : c_i \in \{0,2\}\}$$

ve

$$RX = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{1,2\}\} \cup \{12w_3w_4 \dots : w_i \in \{0,2\}\} \cup \{10b_3b_4 \dots : b_i \in \{1,2\}\}$$

olacak şekilde Şekil 7 de kırmızı ile gösterildiği gibi iki farklı yol vardır.

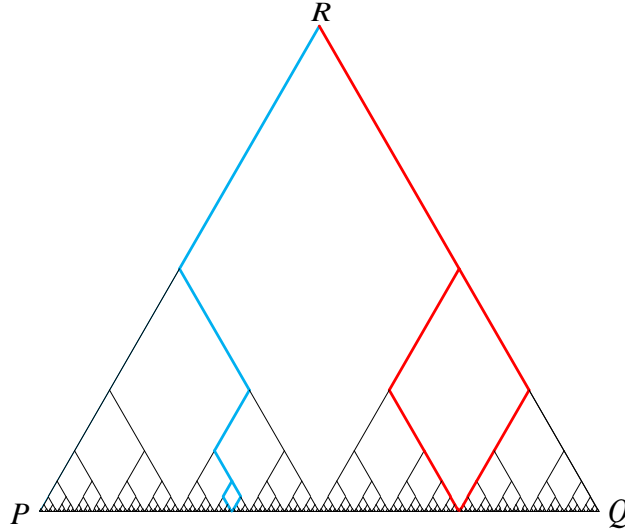
**Örnek 2.4.**  $X$  noktasının kod temsili  $0101100 \dots$  olsun.  $X$  ve  $R$  noktaları arasındaki en kısa yolların kod kümelerini bulalım. Açık olarak  $X$  noktasının iki kod temsili olduğundan, kod kümeleri

$$RX = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,2\}\} \cup \{02b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{1,2\}\} \cup \{012v_4v_5 \dots : v_i \in \{0,2\}\} \\ \cup \{0102y_5y_6 \dots : y_i \in \{1,2\}\} \cup \{01012w_6w_7 \dots : w_i \in \{1,2\}\} \\ \cup \{01011z_6z_7 \dots : z_i \in \{0,2\}\}$$

ve

$$RX = \{2a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{0,2\}\} \cup \{02b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{1,2\}\} \cup \{012v_4v_5 \dots : v_i \in \{0,2\}\} \\ \cup \{0102y_5y_6 \dots : y_i \in \{1,2\}\} \cup \{01012w_6w_7 \dots : w_i \in \{0,2\}\} \\ \cup \{01010z_6z_7 \dots : z_i \in \{1,2\}\}$$

olacak şekilde Şekil 7 de mavi ile gösterildiği gibi iki farklı yol vardır.



Şekil 7.  $R = 222 \dots$  den  $11000 \dots$  (kırmızı) ve  $01011000 \dots$  (mavi) ya kısa yolların kümesi

**Not 2.5.** Benzer şekilde gösterilebilir ki, köşe noktası  $P$  olan Sierpinski üçgeninin  $QR$  kenarına olan en kısa yolların kümesi kökü  $P$  olan bir ikili ağaç belirtir. Eğer  $X$  noktası alt üçgenlerin bir kesişim noktası değilse,  $X, QR$  üzerinde bir nokta olmak üzere,  $P = X_0$  ve  $X$  noktaları arasındaki en kısa yolun kod kümesi;

$$PX = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i X_{i+1} \\ = PX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_n X_{n+1} \cup \dots \\ = \{0a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 0\}\} \cup \{x_1 0b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 0\}\} \cup \dots \\ \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n 0w_{n+2}w_{n+3} \dots : w_i \in \{x_{n+1}, 0\}\} \cup \dots$$

olarak belirlenir. Eğer  $X, n.$  adımdaki alt üçgenlerin kesişim noktası ise,  $x_n \neq c_n \neq 0$  olmak üzere,  $P = X_0$  ve  $X = X_{n+1}$  noktaları arasındaki en kısa yolların kod kümeleri,

$$PX = PX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_{n-2} X_{n-1} \cup X_{n-1} X_n \cup X_n X \\ = \{0a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 0\}\} \cup \{x_1 0b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 0\}\} \cup \dots \\ \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n w_{n+1} w_{n+2} \dots : w_i \in \{c_n, 0\}\}$$

ve

$$PX = PX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_{n-2} X_{n-1} \cup X_{n-1} X_n' \cup X_n' X \\ = \{0a_2a_3a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 0\}\} \cup \{x_1 0b_3b_4b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 0\}\} \cup \dots \\ \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots 0w_n w_{n+1} \dots : w_i \in \{c_n, 0\}\} \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots c_n w_n w_{n+1} \dots : w_i \in \{x_n, 0\}\}$$

olarak formüle edilir.

Ayrıca, köşe noktası  $Q$  olan Sierpinski üçgeninin  $PR$  kenarına olan en kısa yolların kümesinin kökü  $Q$  olan bir ikili ağaç belirttiği benzer yollarla gösterilebilir.  $X$ ,  $PR$  üzerinde bir nokta olmak üzere,  $Q = X_0$  ve  $X$  noktaları arasındaki en kısa yolun kod kümesi; eğer  $X$  noktası alt üçgenlerin bir kesişim noktası değilse,

$$\begin{aligned} QX &= \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i X_{i+1} \\ &= QX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_n X_{n+1} \cup \dots \\ &= \{1a_2 a_3 a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 1\} \cup \{x_1 1 b_3 b_4 b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 1\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n 1 w_{n+2} w_{n+3} \dots : w_i \in \{x_{n+1}, 1\}\} \cup \dots \end{aligned}$$

olarak belirlenir. Eğer  $X$ ,  $n$ . adımdaki üçgenlerin kesişim noktası ise,  $x_n \neq c_n \neq 1$  olmak üzere,  $Q = X_0$  ve  $X = X_{n+1}$  noktaları arasındaki en kısa yolların kod kümeleri,

$$\begin{aligned} QX &= QX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_{n-2} X_{n-1} \cup X_{n-1} X_n \cup X_n X \\ &= \{1a_2 a_3 a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 1\}\} \cup \{x_1 1 b_3 b_4 b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 1\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n w_{n+1} w_{n+2} \dots : w_i \in \{c_n, 1\}\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} QX &= QX_1 \cup X_1 X_2 \cup X_2 X_3 \cup \dots \cup X_{n-2} X_{n-1} \cup X_{n-1} X_n' \cup X_n' X \\ &= \{1a_2 a_3 a_4 \dots : a_i \in \{x_1, 1\}\} \cup \{x_1 1 b_3 b_4 b_5 \dots : b_i \in \{x_2, 1\}\} \cup \dots \\ &\quad \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots 1 w_n w_{n+1} \dots : w_i \in \{c_n, 1\}\} \cup \{x_1 x_2 x_3 \dots c_n w_n w_{n+1} \dots : w_i \in \{x_n, 1\}\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonunca kabul edilen 1605F406 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

## KAYNAKLAR

- [1] Hutchinson JE. Fractals and self-similarity, Indiana Univ Math J 1981; 30: 713–747.
- [2] Falconer KJ. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Application, John Wiley, 2003.
- [3] Barnsley MF. Fractals Everywhere, Academic Press, Boston, 1988.
- [4] Burago D, Burago Y, Ivanov S. A Course in Metric Geometry. USA, AMS, 2001.
- [5] Cristea LL, Steinsky B. Distances in Sierpinski graphs and on the Sierpinski gasket, Aequationes Math 2013; 85: 201-219.
- [6] Denker M, Sato H. Sierpinski gasket as a Martin boundary II (the intrinsic metric), Publ RIMS, Kyoto Univ 1999; 35: 769-794.
- [7] Grabner P, Tichy RF. Equidistribution and Brownian motion on the Sierpinski gasket, Monatsh Math 1998; 125: 147-164.

- [8] Saltan M, Özdemir Y, Demir B. An Explicit Formula of the Intrinsic Metric on the Sierpinski Gasket via Code Representation, *Turk J Math* 2018; 42: 716-725.
- [9] Hinz AM, Schief A. The average distance on the Sierpinski gasket, *Probab Theory Rel* 1990; 87: 129-138.
- [10] Strichartz RS. Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals, *T Am Math Soc* 1999; 351: 1705-1752.
- [11] Romik D. Shortest paths in the Tower of Hanoi graph and finite automata, *SIAM J Discrete Math* 2006; 20: 610-622.
- [12] Saltan M, Özdemir Y, Demir B. Geodesics of the Sierpinski Gasket, *Fractals* 2018; DOI: 10.1142/S0218348X1850024X.
- [13] Saltan M. Some Interesting Code Sets of the Sierpinski Triangle Equipped with the Intrinsic Metric, *IJAMAS* 2018; 57 (4): 152-160.
- [14] Saltan M. Intrinsic Metrics on Sierpinski-Like Triangles and Their Geometric Properties, *Symmetry* 2018; 10, 204; doi:10.3390/sym10060204.