

İ.Ü. İktisat Fakültesi
Maliye Araştırma Merkezi Konferansları
Prof. M. Orhan Dikmene Armağan

DURBIN - WATSON TESTİNİNİRDELENMESİ

Prof. Dr. Mehmet GENÇELİ

DURBİN - WATSON TESTİNİN İRDELENMESİ

Prof. Dr. Mehmet Genceli

İ.Ü. İktisat Fakültesi

1- Giriş:

Regresyon modellerinde diğer varsayımların yanısıra hata paylarının birbirleri ile ilişkili olmadıkları varsayımı yer almakta ve bu varsayımdan sapma haline de otokorrelasyon veya serial korrelasyon denilmektedir. Hata paylarının aynı zamanda normal dağıldıkları da varsayılsa otokorrelasyon bulunmama hali, $E(u_i u_j) = 0$ $i \neq j$, aynı zamanda hata paylarının birbirinden bağımsız olduğu anlamına da gelmektedir (1).

Zaman serilerinin doğal bir sıra izlemelerinden ötürü daha çok bu tip serilerde rastlanabilen otokorrelasyon, kesit verilerde de bunların ancak herhangi bir şekilde doğal bir sıralanmaya uymaları ve rastlantısal olmayan bir örnek oluşturmaları halinde ortaya çıkabilmektedir (2). Örneğin iktisadi büyümeyi inceleyen bölgesel bir modelde birimler coğrafi olarak birbirleri ile ilişkili bulunabileceklerinden otokorrelasyon saptanabilir. Ayrıca kesit verilerde otokorrelasyona rastlanabilmesinin başka bir nedeni de model ile ilgili olup fakat modele alınmayan bağımsız değişkenlerdir (3). Hata payları arasında pozitif otokorrelasyon bulunmasının sonucunda belirginlik katsayısı R^2 olduğundan daha yüksek çıkacaktır. Yüksek bir R^2 ve düşük bir Durbin - Watson değeri modele spesifikasyon hatası olduğunun göstergesidir (4).

İster zaman serilerinde, isterse kesit verilerinde rastlanılsın, otokorrelasyon sonucunda E.K.K. yöntemi ile hesaplanan parametre tahmin edicileri gene sistematik hatasız ve tutarlı olmakla beraber artık etkin tahmin edici olma özelliğini yitirmektedirler. Hele modelde gecikmeli açıklanan değişkenin yer alması, diğer bir deyişle modelin otoregresif olması, sorunu daha da önemli hale getirmektedir.

Diğer taraftan otokorrelasyon halinde parametre tahmin edicilerinin standart hataları bağlı olarak küçüleceklerinden bu durum $\beta_i = 0$ şeklindeki sıfır hipotezinin olması gerekenden daha fazla reddine yol açacaktır (5).

Bu yazıda birinci mertebeden otokorrelasyonu saptamada kullanılan Durbin - Watson testi ve varsayımlarını Türkçe yazından farklı bir biçimde ele alıp varsayımlardan sapma halindeki çözüm almasıklarını belirlemek istiyorum. Diğer bir amacım ise testteki kararsızlık bölgelerini ortadan kaldırabilmek için çözüm önerilerini Türkçe yazıma aktarmaktır.

2- Model:

$$Y = X\beta + u$$

şeklinde tanımlanan Klasik Normal Doğrusal Redresyon Modelin'de Y, T Yıllık $t=1,2,\dots,T$ dönemin veya T birimin eleman olduğu $T \times 1$ boyutlu açıklanan değişken vektörü, u ise gene $T \times 1$ boyutunda gözlenemeyen hata payları vektörüdür.

X ise $T \times K$ boyutlu açıklayıcı değişkenler matrisi olup k adet açıklayıcı değişkenin ve l adet te $X_{it}=1$ görünüşteki değişkenin değerlerinden oluşmaktadır: $K = k+l$

u hata payları vektörü için

$$E(u) = 0 \quad E(uu') = \sigma^2 I_T \quad u \sim N(0, \sigma^2 I_T)$$

dir. $E(u) = 0$ olması $E(uu')$ 'yi varyans matrisine dönüştürmektedir (6).

Otokorrelasyon bulunmadığı varsayımından sapma halinde I_T geçerliliğini yitirecektir. Bu durumu için otokorrelasyon matrisini göstermek üzere

$$E(uu') = \Phi = \sigma^2 \gamma$$

yazılabilir. Ayrıca hata paylarının

$$AR(1) = u_t = \rho \cdot u_{t-1} + v_t \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$$

biçiminde birinci mertebeden otoregressif şemaya ve $|\rho| < 1$ alınarak durağan süreç uydukları varsayılabilir.

3- Durbin - Watson Testi:

Durbin ve Watson birinci mertebeden otokorrelasyonu saptamak amacıyla T.W. Anderson'un çalışmasından (7) esinlenerek kendi adları ile anılan otokerrelasyon testini geliştirmişlerdir (8). Bu teste kalıntılara dayanan d test istatistiği

$$d = \frac{\sum_{t=1}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \quad 0 < d < 4$$

şeklinde tanımlanmaktadır. d'nin 0'a yakın değerleri pozitif, 4'e yakın değerleri ise negatif otokorrelasyona göstergedir. 2 civarındaki değerler için birinci mertebeden otokorrelasyonun bulunmadığı söylenebilecektir.

Alternatif olarak d:

$$Y = \beta + e \quad e = Y - X\beta$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ : & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{e' A e}{e' e} \quad [1]$$

biçiminde de ifade edilebilir (9). A; simetrik, üç köşegenli, T boyutlu bir kare matristir.

[1]'de verilen test istatistiği d'ye göre ana kütle otokorrelasyon katsayısı için $H_0: \rho=0$ hipotez testinin yapılabilmesi $P(d/\rho = 0)$ olasılık dağılımının bilinmesine ve buradan da d'nin kritik değerlerinin bulunabilmesine bağlıdır (10).

AR(1) şemasında ρ hata payları cinsinden ifade edilirken test istatistiği için [1]'de kalıntılar vektörü kullanılmaktadır. Bu durum ise bazı sakıncaları ortaya çıkartmaktadır (11).

Bir düzeltme önerisi olarak hata payı vektörü ile kalıntılar vektörü arasında bağlantı sağlanarak d test istatistiği u vektörü cinsinden gösterilebilir:

$$e = Y - X\beta \quad Y = X\beta + U \quad \beta = (X' X)^{-1} X' Y$$

$$e = X\beta + u - X [(X' X)^{-1} X' (X\beta + u)]$$

$$e = X\beta + u - X\beta - X(X' X)^{-1} X' u$$

$$e = (I - X(X' X)^{-1} X') u \quad M = I - X(X' X)^{-1} X'$$

$$e = Mu \quad [2]$$

M; T boyutlu simetrik ve idempotent bir matristir: $M' M = M$

$$M' M = [I - X(X' X)^{-1} X'] [I - X(X' X)^{-1} X']$$

$$= I - X(X' X)^{-1} X' - X(X' X)^{-1} X' + X(X' X)^{-1} X'$$

$$= I - X(X' X)^{-1} X' = M \quad M' M = M^2 = M$$

Diğer taraftan M matrisinin bu özelliği dolayısıyla $\text{rank } M = \text{iz } M$ olmaktadır. Böylece M'in rankı

$$\text{rank } M = \text{iz } M = \text{iz } I_T - \text{iz } [X(X' X)^{-1} X'] = T - K \text{ dir.}$$

Başka bir deyişle M'in rankı M'in köşegen elemanlarının toplamıdır. Ayrıca M'in özdeğerleri I veya 0'dır.

Bu nedenle de $e'e = u'M' M U = U'M^2 U = U' Mu$ olacaktır (12). Sonuçlar [1]'de yerine konulursa

$$d = \frac{e' Ae}{e'e} = \frac{u'MAMu}{u'Mu} \quad [3]$$

sonucuna ulaşılacaktır.

[3] pay ve paydasında hata payları vektörünün yer aldığı iki kareli ifadenin birbirine oranıdır. Bununla beraber pay khi - kare dağılımına uymadığı gibi pay ve payda bağımsız da değildir (13). Dolayısıyla de F dağılımı söz konusu olmamakta ve $P(d/\rho = 0)$ dağılımı da hesaplanamamaktadır.

Durbin ve Watson olaya başka bir açıdan yaklaşarak d'yi

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{T-K} z_i^2} \quad [4]$$

şeklinde tanımlamışlardır (14).

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{T-K}$ MA'nın sıfır olmayan özdeğerleri, z_i ise bağımsız standart normal değişkenlerdir. Dolayısıyla z_i^2 1 serbestlik derecesinde khi - kare değişkeni olmaktadır.

d'nin olasılık dağılımının matematik ümit ve varyansı ise

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_i}{T-K} = \bar{\theta} \quad [5]$$

$$\text{var}(d) = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_i^2 - (T-K)\bar{\theta}^2}{(T-K)(K-K+2)} \quad [6]$$

dır (15).

[4] formülü herbirinin kendi özdeğeri ile tartıldığı (T-K) sayıdaki khi - kare değişkeni toplamının tartısız khi - kare değişkenleri toplamına bölümüdür. Veri θ_i için de d'nin olasılık dağılımı hesaplanabilir. Burada ortaya çıkan tek sorun θ_i 'nin açıklayıcı değişkenler matrisinden bulunmasıdır. Böylece her mümkün X için ayrı bir özdeğerler kümesi buna bağlı olarak ta her defasında farklı bir olasılık dağılımı ve nihayet farklı kritik değerler elde edilmektedir. Kısaca tüm problemler için geçerli kritik değerler belirlememektedir (16).

Durbin - Watson A matrisinin özdeğerleri ρ 'nin x matrisine bağlı olmadığından hareketle θ_i 'xı ϕ i cinsinden ifade ederek tüm için geçerli bir çözüm bulmuşlardır (17).

K^* açıklayıcı değişken A matrisinin K^* özdeğer vektörü ile çıkışıyor ve bu K^* özdeğer vektörlerinin doğrusal bağlantıları ise ve A'nın geri kalan $(T-K^*)$ vektörlerine ilişkin ϕ 'leri

$$\phi_i \leq \phi_{i+1} \quad i=1,2,\dots, T-K^*-1$$

şeklinde sıralanırsa

$$\phi_i \leq \theta_i \leq \phi_{i+K-K^*} \quad i=1,2,\dots, T-K$$

yazılabilir. Böylece de [4] için

$$\tilde{d}_l = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \phi_i^2 Z_i^2}{\sum_{i=1}^{T-K} Z_i^2} \quad \text{ve} \quad \tilde{d}_u = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \phi_{i+K^*}^2 Z_i^2}{\sum_{i=1}^{T-K} Z_i^2} \quad d_l \leq d \leq d_u$$

elde edilecektir. Diğer taraftan A'nın özdeğerlerinin

$$\theta_i = 2-2 \cos \{ \pi(i-1) / T \} \quad i=1,\dots, T$$

olduğu gözüntüne alınarak

$$d_l = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_{i+1}^2 Z_i^2}{\sum_{i=1}^{T-K} Z_i^2} \quad d_u = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_{i+K}^2 Z_i^2}{\sum_{i=1}^{T-K} Z_i^2}$$

bulunur (18). d_l ve d_u 'nun dağılımı X'e bağımlı olmadığı gibi aynı zamanda

$$d_l \leq d \leq d_u$$

özelliği de taşımaktadır

D-W, d_l ve d_u 'nun olasılık dağılımlarını hesaplayarak çeşitli anlamlılık düzeyinde ve veri T ve K için kritik değerleri bulmuşlardır. Özgün D-W tablolarının kullanılması için en az 15 yıllık bir dönem ve 1 açıklayıcı değişkenin bulunması koşulu ise artık geçerliliğini yitirmiştir. Günümüzde D-W tabloları yerine çok daha geniş kapsamlı Savin - White tabloları kullanılmaktadır. Savin - White tabloları, k regresyon sabiti dışındaki açıklayıcı değişken sayısını göstermek üzere $T-k > 3$ için dahi geçirlidir.

4- Testin Varsayımları:

D-W testinin uygulanabilmesi sıralanan şu varsayımlara bağlıdır:

- a) Modelde regresyon sabiti yer almalıdır.
- b) Test sadece sabit veya rastlantısal olmayan açıklayıcı değişkenler için geçerlidir.
- c) Hata payları birinci mertebeden otoregressif modele, AR(1)'e uymalıdır.

d) $Y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \dots + \gamma Y_{t-1} + u_t$ gibi Y'nin hem açıklanan hem de bir dönem öncesi açıklayıcı değişken olduğu otoregressif modellerde d uygulandığı takdirde yukarı doğru sistematik hatalı sonuçlar vermektedir (19).

e) Bir dönemin verileri veya doğal bir dizilişi izleyen veriler arasında dönem içinde veya dizide eksik veri bulunmamalıdır. Sözelimi 1975 - 89 dönemine ilişkin bir zaman serisinde herhangi bir yıla ilişkin veri eksikliği kabul edilmemektedir.

Sıralanan bu varsayımlardan şu sonuçlar çıkarılabilir:

- D-W testi

$$Y = \beta_1 X_1 + u$$

gibi regresyon sabiti olmayıp orijinden geçen modellere uygulanamamaktadır.

-Test aynı zamanda açıklayıcı değişkene sahip olmayan

$$Y = \beta_0 + u$$

modelleri için de geçerli değildir. Modelde en az 1 açıklayıcı değişken yer almalıdır. Zaten D-W tabloları da açıklayıcı değişken sayısına göre düzenlenmiştir.

- Zaman serileri için veriler yıllık olmalı, mevsim etkisi taşımamalıdır, çünkü sadece AR(1) şema incelenmektedir. Böylece aylık ve üçer aylık verilerden elde edilen regresyonda D-W testi olarak dışı kalmaktadır.

-Otoregressif modellerde D-W uygulanmakla birlikte 2 değer doğrultusunda hatalı sonuçlar vereceğinden otokorrelasyon bulunmadığı şeklinde bir sonuca varmak da kolaylaşmaktadır.

Bütün bu eksikliklerin dışında kalan bir hususta modelin sayılan varsayımları gerçeklemeleri durumunda bile belirsizlik bölgeleri ortadan kalkmaması, özellikle düşük serbestlik derecelerinde daha da genişlemesidir (20).

Henüz aşılanamış bir test olmasına rağmen sayılan bu sakıncalarından dolayı D-W testi için bazı almaşıklar da getirilmiştir.

5- Varsayımlardan Sapmalar İçin Çözüm Önerileri:

-Örijinden geçen, dolayısıyla regresyon sabiti olmayan modellerde Kramer

$$d_i \leq d \leq d_n$$

yerine

$$d_m \leq d \leq d_n$$

geçerliliğini kanıtlayarak d_m 'i de

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^{T-K} \theta_i^2 z_i}{\sum_{i=1}^{T-K} z_i}$$

olarak tanımlamıştır (21).

Görüldüğü gibi d_i ile d_m arasındaki tek ayrıcalık d_i 'de X matrisinde regresyon sabiti için birim vektör bulunmasından ötürü d_i 'in paydasında $(i+1)$ sayıda özdeğerin yer alması buna karşın d_m 'de i özdeğer söz konusu olmasıdır. d_m kritik değerlerinin dağılımı önce Kramer sonra ise Farebrother (22) tarafından hesaplanmıştır. Ancak Farebrother'in bulguları Kramer'in önceki sonuçlarını kanıtladığından burada sadece Kramer tabloları sunulacaktır.

TABLO: 1a

Tek Açıklayıcı Değişkenli Regresyon İçin d_t ve d_u Sınırları

a	0.05		0.01		a	0.05		0.01	
	d_t	d_u	d_t	d_u		T	d_t	d_u	d_t
10	0.706	1.062	0.457	0.752	31	1.301	1.427	1.088	1.207
11	0.768	1.097	0.515	0.792	32	1.313	1.436	1.103	1.218
12	0.823	1.128	0.568	0.828	33	1.325	1.444	1.117	1.229
13	0.872	1.156	0.617	0.862	34	1.336	1.452	1.130	1.239
14	0.916	1.182	0.662	0.893	35	1.347	1.459	1.143	1.249
15	0.955	1.205	0.703	0.922	36	1.357	1.466	1.155	1.259
16	0.992	1.227	0.741	0.949	37	1.367	1.473	1.167	1.268
17	1.024	1.247	0.776	0.975	38	1.376	1.480	1.178	1.277
18	1.055	1.266	0.808	0.998	39	1.385	1.486	1.189	1.285
19	1.082	1.283	0.839	1.020	40	1.394	1.492	1.200	1.293
20	1.108	1.300	0.867	1.041	45	1.432	1.520	1.247	1.331
21	1.132	1.315	0.893	1.060	50	1.464	1.544	1.287	1.363
22	1.154	1.329	0.918	1.079	55	1.492	1.564	1.321	1.391
23	1.175	1.343	0.942	1.096	60	1.516	1.582	1.351	1.415
24	1.194	1.355	0.964	1.112	65	1.537	1.598	1.378	1.437
25	1.212	1.367	0.984	1.128	70	1.555	1.612	1.401	1.457
					75	1.572	1.625	1.423	1.474
26	1.229	1.378	1.004	1.143	80	1.587	1.637	1.442	1.490
27	1.245	1.389	1.023	1.157	85	1.600	1.647	1.459	1.505
28	1.260	1.399	1.040	1.170	90	1.613	1.657	1.475	1.518
29	1.275	1.409	1.057	1.183	95	1.624	1.666	1.490	1.531
30	1.288	1.418	1.073	1.195	100	1.634	1.674	1.503	1.542

TABLO : 1b

$K \geq 2$ ve $T \leq 14$ İçin Kramer Tablosu

a	K	2		3		4		5		6	
		d_t	d_u	d_t	d_u	d_t	d_u	d_t	d_u	d_t	d_u
0.05	T										
	10	0.539	1.320	0.385	1.641	-	-	-	-	-	-
	11	0.610	1.324	0.460	1.604	0.326	1.928	-	-	-	-
	12	0.674	1.331	0.530	1.579	0.397	1.864	-	-	-	-
	13	0.731	1.340	0.593	1.562	0.464	1.816	0.345	2.094	-	-
14	0.783	1.350	0.651	1.551	0.525	1.779	0.408	1.030	0.302	2.296	
0.01	K										
	T										
	10	0.333	1.001	-	-	-	-	-	-	-	-
	11	0.394	1.010	0.284	1.297	-	-	-	-	-	-
	12	0.451	1.023	0.341	1.274	-	-	-	-	-	-
13	0.504	1.038	0.396	1.261	0.298	1.526	-	-	-	-	
14	0.552	1.054	0.448	1.254	0.350	1.490	0.262	1.757	-	-	

TABLO: 2

Orijinden Geçen Regresyonda $T \geq 15$ İçin Durbin - Watson d_i Değerleri

K a	2		3		4		5		6	
	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
T										
15	0.829	0.598	0.704	0.496	0.583	0.400	0.467	0.311	0.361	0.232
16	0.872	0.640	0.752	0.541	0.635	0.447	0.523	0.358	0.418	0.278
17	0.911	0.679	0.797	0.583	0.684	0.491	0.575	0.404	0.472	0.323
18	0.947	0.715	0.838	0.623	0.729	0.533	0.624	0.447	0.523	0.366
19	0.979	0.749	0.875	0.660	0.771	0.572	0.669	0.488	0.570	0.408
20	1.010	0.781	0.910	0.694	0.810	0.610	0.711	0.527	0.615	0.448
21	1.038	0.810	0.942	0.727	0.846	0.645	0.751	0.564	0.657	0.486
22	1.064	0.838	0.972	0.757	0.879	0.677	0.787	0.599	0.697	0.523
23	1.088	0.864	1.000	0.786	0.911	0.709	0.822	0.632	0.734	0.558
24	1.111	0.889	1.026	0.813	0.940	0.738	0.854	0.664	0.769	0.591
25	1.132	0.912	1.050	0.839	0.967	0.766	0.884	0.693	0.802	0.622
26	1.152	0.934	1.073	0.863	0.993	0.792	0.913	0.722	0.833	0.652
27	1.171	0.955	1.094	0.886	1.017	0.817	0.940	0.749	0.862	0.681
28	1.188	0.975	1.115	0.908	1.040	0.841	0.965	0.774	0.890	0.708
29	1.205	0.993	1.134	0.929	1.062	0.864	0.989	0.799	0.916	0.734
30	1.221	0.011	1.152	0.948	1.082	0.885	1.011	0.822	0.940	0.759
31	1.236	1.028	1.169	0.967	1.101	0.906	1.033	0.844	0.964	0.782
32	1.250	1.044	1.185	0.985	1.120	0.925	1.053	0.865	0.986	0.805
33	1.264	1.060	1.201	1.002	1.137	0.944	1.072	0.885	1.007	0.826
34	1.277	1.075	1.216	1.018	1.153	0.961	1.091	0.904	1.027	0.847
35	1.289	1.089	1.230	1.034	1.169	0.979	1.108	0.923	1.046	0.867
36	1.301	1.103	1.243	1.049	1.184	0.995	1.125	0.940	1.064	0.886
37	1.312	1.116	1.256	1.063	1.199	1.011	1.141	0.957	1.082	0.901
38	1.323	1.128	1.268	1.077	1.212	1.026	1.156	0.974	1.099	0.921
39	1.333	1.140	1.280	1.090	1.225	1.040	1.170	0.989	1.115	0.938
40	1.343	1.152	1.291	1.103	1.238	1.054	1.184	1.004	1.130	0.954
45	1.387	1.204	1.341	1.160	1.294	1.116	1.246	1.071	1.197	1.026
50	1.424	1.248	1.382	1.208	1.340	1.168	1.297	1.128	1.253	1.087
55	1.455	1.286	1.417	1.250	1.379	1.213	1.340	1.176	1.300	1.139
60	1.482	1.319	1.447	1.285	1.412	1.252	1.376	1.218	1.340	1.183
65	1.506	1.348	1.474	1.317	1.441	1.286	1.408	1.254	1.375	1.222
70	1.526	1.373	1.497	1.345	1.467	1.316	1.436	1.286	1.405	1.257
75	1.545	1.396	1.517	1.370	1.489	1.343	1.461	1.315	1.432	1.287
80	1.561	1.417	1.536	1.392	1.509	1.367	1.483	1.341	1.456	1.315
85	1.576	1.436	1.552	1.412	1.528	1.388	1.503	1.364	1.477	1.340
90	1.590	1.453	1.567	1.431	1.544	1.408	1.520	1.385	1.496	1.362
95	1.603	1.469	1.581	1.448	1.559	1.426	1.537	1.405	1.514	1.383
100	1.614	1.483	1.593	1.463	1.572	1.443	1.552	1.422	1.530	1.402

Orijinden geçen regresyonda D-W testi için aşağıdaki veriler kullanılmıştır:

TABLO: 3

Yıllar	X	Y	Y	e
1981	19.5	67.5	21.253	46.247
1982	8.5	19.2	9.264	9.936
1983	-29.3	-35.2	-31.934	-3.266
1984	-26.5	-42.0	-28.883	-13.117
1985	61.9	63.7	67.466	-3.766
1986	45.5	19.3	49.591	-30.291
1987	9.5	3.6	10.354	-6.754
1988	14.0	20.0	15.259	4.741
1989	35.3	40.3	38.474	1.826
1990	31.0	37.5	33.787	3.713
				9.269

Kaynak: Gujarati Damodar, Basic Econometrics, Mc Graw Hill, 1988, s. 139.

Bu verilere göre regresyon denklemi de

$$\hat{Y} = 1.089912 X \quad T=10 \text{ yıl} \quad d = 0.896 \\ (0.19551)$$

hesaplanmıştır. Problem için d_l ve d_u değerleri ise aşağıda verilmektedir.

TABLO: 4

	Savin - White		T= 10	Kramer	
	d_l	d_u		d_m	d_u
%5	0.879	1.32		0.539	1.32
%1	0.604	1.001		0.333	1.001

Tablo 4'den görüldüğü gibi S-W ve Kramer tablolarında d_u aynı fakat d_l farklıdır. Buna rağmen d her iki halde de kararlılık bölgesinde kalmaktadır.

- Açıklayıcı değişkene sahip olmayan tek değişkenli

$$Y_t = \beta_0 + u_t$$

modelinde sadece regresyon sabiti ve hata payı yer almaktadır. $Y_t = \beta_0$ eşitliğinden dolayı model aynı zamanda

$$Y_t = \mu + u_t$$

şeklinde de yazılabilir (23). Bu modeller için Nelson'un önerdiği M test istatistiği, n birim sayısı olmak üzere

$$M = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_{t+1} - Y_t) / (n-1)}{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_{t+1} - Y_t) / (n-1)}$$

olarak tanımlanmaktadır (24).

$$M = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - Y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - Y_{t-1})^2} \cdot \frac{n-1}{n-1}$$

yazılır. Öte yandan Von - Neumann oranının da

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - Y_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T-k} (Y_t - Y_{t-1})^2} \cdot \frac{n}{n-1}$$

olduğu anımsanırsa M ile (δ^2 / s^2) arasında

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{n}{n-1} \cdot M$$

ilişkisi ortaya çıkar. Bu ilişki de aslında d ile (δ^2 / s^2) arasındaki

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{n}{n-1} \cdot d$$

ilişkisinin aynıdır. Dolayısıyla de M'in $k=0$ için d'nin özel bir hali olduğu ileri sürülebilir. Zaten Draper ve Smith de M'i $k=0$ için D-W test istatistiği olarak kabul etmektedirler (525).

Ancak M'in test istatistiği olarak kabul edilebilmesi kritik değerlerin olasılık dağılımının bilinmesine bağlıdır. Bunun için de Nelson %10, %5 ve %1 anlamlılık düzeyinde ve n veya $t \geq 10$ için Woods ve Posten algoritmasına göre aşağıdaki tabloyu düzenlemiştir:

TABLO 5:

M₁ Alt Kritik Değerleri İçin Nelson Tablosu

T	α 0.10	0.05	0.01	T	α 0.10	0.05	0.01	T	α 0.10	0.05	0.01
10	1.251	1.062	0.752	30	1.543	1.418	1.195	100	1.745	1.674	1.542
11	1.280	1.096	0.792	32	1.557	1.436	1.218	110	1.757	1.689	1.563
12	1.306	1.128	0.828	34	1.569	1.451	1.239	120	1.767	1.702	1.581
13	1.329	1.156	0.862	36	1.581	1.466	1.259	130	1.776	1.714	1.597
14	1.351	1.182	0.893	38	1.592	1.480	1.277	140	1.784	1.724	1.611
15	1.370	1.205	0.922	40	1.602	1.492	1.293	150	1.792	1.733	1.624
16	1.388	1.227	0.949	42	1.611	1.504	1.309	160	1.798	1.741	1.636
17	1.405	1.247	0.974	44	1.620	1.515	1.324	170	1.804	1.749	1.647
18	1.420	1.266	0.998	46	1.628	1.525	1.338	180	1.810	1.756	1.656
19	1.434	1.283	1.020	48	1.635	1.534	1.351	190	1.815	1.763	1.665
20	1.447	1.300	1.041	50	1.642	1.544	1.363	200	1.819	1.768	1.674
21	1.460	1.315	1.060	55	1.659	1.564	1.391	250	1.838	1.793	1.708
22	1.471	1.329	1.078	60	1.673	1.582	1.415	300	1.852	1.811	1.733
23	1.482	1.342	1.096	65	1.685	1.598	1.437	350	1.863	1.825	1.752
24	1.492	1.355	1.112	70	1.697	1.612	1.457	400	1.872	1.836	1.768
25	1.502	1.367	1.128	75	1.707	1.625	1.474	450	1.879	1.845	1.781
26	1.511	1.378	1.143	80	1.716	1.636	1.490	500	1.886	1.853	1.793
27	1.520	1.389	1.157	85	1.724	1.647	1.505	600	1.895	1.866	1.811
28	1.528	1.399	1.170	90	1.732	1.657	1.518	800	1.909	1.884	1.836
29	1.535	1.409	1.183	95	1.739	1.666	1.531	1000	1.919	1.896	1.853

Tablo 5'de M₁ alt kritik değerleri yer almakta M_α üst kritik değerler ise (4-M₁) ile hesaplanmaktadır.

Nelson'a göre M₁ < M < M_α için otokorrelasyon olmadığına hükmedilebilir. M test istatistiğinin (M₁, M_α) aralığının dışında kalması durumunda otokorrelasyondan söz edilebilecektir.

$$\sum(Y_t - Y_{t-1})^2 = 31.7348$$

$$\sum(Y_t - Y_t)^2 = 26.4005$$

$$T = 26$$

$$M = 31.7348 / 26.4005 = 1.20$$

%10 için M₁ = 1.511 M_α = 2.489; %5 M₁ = 1.378 M_α = 2.622; %1 için M₁ = 1.143 M_α = 2.897 %10 ve %5 anlamlılık için M₁ > M dir. Ancak %1'de M₁ < M olmaktadır. Buna göre de %5 ila %1 arasında anlamlılığa erişildiğinden otokorrelasyona hükmedilebilir.

Durbin - Watson testi için ise d hesaplanmalıdır:

$$\sum_2 (e_t - e_{t-1})^2 = 31.7349 \quad \sum_1 e_t^2 = 26.4005$$

$$d = 31.7349 / 26.4005 = 1.20$$

Görüldüğü gibi M ve d aynı sonucu vermektedir. Bu yüzden de $k=0$ için kritik değerlerin belirlenmesine bağlı olarak D-W testi yapılabilir. Bu kritik değerler de Fare brother tarafından hesaplanmıştır (26).

Hata paylarının AR (1)'e uyma koşulu da D-W testini yıllık verilere kısıtlamaktadır. Halbuki mevsim etkisi taşıyan üçer aylık veya aylık veriler günümüzde sıkça kullanılmaktadır. Üçer aylık verilerde sadece birinci değil aynı zamanda dördüncü mertebeden otokorelasyon aranmalıdır, çünkü birinci mertebeden otokorelasyon bulunmadığı şeklindeki bir hüküm otokorelasyonun bir sorun olmadığı anlamına gelmemektedir (27).

Wallis de bu olgudan hareketle verilerin üçer aylık olmaları halinde birinci mertebe yerine dördüncü mertebeden otokorelasyon aranması gerektiğini savunmuş ve bunun nedeni olarak ta otokorelasyonun aslında büyük bir olasılıkla mevsim etkisini gösteren değişkenin model kapsamı dışında bırakılmasından ortaya çıktığını öne sürmüştür (28). Dördüncü mertebeden otokorelasyon testinde ise test istatistiği d yerine

$$d_4 = \frac{\sum_{t=5}^T (e_t - e_{t-4})^2}{\sum_1 e_t^2}$$

ikame edilmelidir. $H_0: \rho_4 = 0$ şeklinde sıfır hipotezinin kabul veya reddi D-W testinin aynı, buna karşılık d_{11} ve d_{10} kritik değerleri farklıdır (29). Verilerin olması halinde ise test istatistiği bu kez

$$d_{12} = \frac{\sum_{t=13}^T (e_t - e_{t-12})^2}{\sum_1 e_t^2}$$

şeklinde düzenlenecektir.

Başkaca bir sorun ise zaman serilerinde eksik veri bulunmasıdır. Bu konuda yazında bir uyum yoktur. Pindyck - Rubinfeld eksik veri halinde testin yapılabileceği görüşündedirler (30). Gujarati ise karşı fikirdedir (31). Wallis ise bu konuda bir çözüme ulaşmamıştır (32). Savin ve White ise eksik veri için D-W testinin uygulanabileceği, d'nin kararsızlık bölgesinde çıkması durumunda da kesin D-W testinin çözüm olabileceğini öne sürmektedirler (33).

En son olarak ta otoregressif modellere Durbin'in h testinin daha uygun olduğuna ve daha kesin sonuçlar verdiğiğine değinilmelidir.

6- Testte Kararsızlık Bölgeleri:

d test istatistiğinin kararsızlık bölgesinde çıkması halinde, Ertek, ya hiçbir şey yapılamayacağını ya da daha fazla veri toplanıp regresyon çalışmasının tekrarlanabileceğini savunmaktadır (34). Verileri kesit veriler olmaları halinde öneri geçerli olabilir, ama Türkiye gibi veri sıkıntısı çekilen veya tutarlı veri elde edilemeyen yerlerde zaman serileri nasıl uzatılacaktır? Bunun için de sadece eldeki veriler ile D-W testinden bir sonuç alınmasını irdelemek istiyorum.

D-W testindeki kararsızlık bölgelerinin ortadan kaldırılmasında en kolay yöntem Aigner'in daha 1970 yıllarının başında öngördüğü gibi (35) bilgisayar programlarından yararlanmaktadır. White tarafından geliştirilen Shazam programı (36) $P(d \leq d / \rho = 0)$ olasılığını hesaplamaktadır. Buna göre $P(d \leq d / \rho = 0) < \alpha$ için $\alpha = 0.05$ veya $\alpha = 0.01$, birinci mertebeden, otokorrelasyon bulunmadığı şeklindeki H_0 reddedilerek pozitif otokorrelasyonlu $H_1: \rho > 0$ 'a karar verilecektir. Bunun için de Shazam programında Householder dönüşümü uygulanarak kesin olasılığın hesaplanması gerekmektedir.

Diğer taraftan kararsızlık bölgelerini ortadan kaldırmak için çeşitli öneriler getirilmiştir (37). Burada ise sadece Gujarati'nin önerisi ile Durbin - Watson yaklaşımı (38) irdelenecektir.

Gujarati d'nin kararsız bölgesi içinde çıkması durumunda d_u 'nun gerçek kritik değeri olduğundan hareketle $d < d_u$ 'yu H_0 'ın reddi için yeter kabul etmektedir (39).

D-W yaklaşımında ise d'nin dağılımı pozitif otokorrelasyon için $a + b d_u$ ile negatif otokorrelasyonda da $a + b (4 - d_u)$ ile ikame edilmektedir.

Pozitif otokorrelasyonun daha önemli olması dolayısıyla $d^* = a + b d_u$ ele alınacaktır. Kuşkusuz benzer durum negatif otokorrelasyon için geçerlidir.

d^* 'nin ortalamasını bulmak için matematik ümit alınırsa $E(d^*) = a + b E(d_u)$ olacaktır. Diğer taraftan a ve b katsayı olduklarından $\text{Var}(d^*)$ de

$$\text{Var}(d^*) = b^2 E(d_u)$$

dır. Dolayısıyla a ve b'nin hesaplanabilmesi için

$$a = E(d) - b E(d_u) \quad [7] \quad b = (\text{Var } d / \text{Var } d_u)^{1/2} \quad [8]$$

yazılabilir. Böylece a ve b'nin değerleri

$$d = (\sum \theta_i z_i^2 / \sum z_i^2) \quad \text{ve} \quad d_u = (\sum \theta_{i+k} z_i^2 / \sum z_i^2)$$

dağılımlarının birinci ve ikinci momentlerinin bulunmasına bağlı kalmaktadır. Bunlar ise

$$E(d) = \frac{\text{iz (MA)}}{T-K} \quad [9] \quad \text{ve} \quad \text{Var } d = \frac{2 \text{ iz (MA)}^2 - (T-K) [E(d)]^2}{(T-K)(T-K+2)} \quad [10]$$

dır (40). $E(d_u)$ ve $\text{Var}(d_u)$ ise tablo 8'de verilmektedir. Bu tablonun kullanılabilmesi için modelde regresyon sabitinin bulunması da bir koşuldur.

TABLO: 8

E(d_n) ve Var (d_n) Değerleri

T	K=2		K=3		K=4		K=5		K=6	
	E	V	E	V	E	V	E	V	E	V
6	2.433	0.35417								
7	2.360	0.34878	2.762	0.23951						
8	2.308	0.33403	2.652	0.25473	3.007	0.16209				
9	2.268	0.31630	2.569	0.25754	2.882	0.18448	3.190	0.11154		
10	2.238	0.29824	2.503	0.25377	2.783	0.19613	3.063	0.13445	3.328	0.07842
11	2.213	0.28098	2.450	0.24663	2.702	0.20081	2.957	0.14941	3.205	0.09919
12	2.193	0.26491	2.407	0.23791	2.635	0.20111	2.868	0.15842	3.099	0.11456
13	2.177	0.25016	2.371	0.22857	2.579	0.19871	2.793	0.16318	3.008	0.12331
14	2.162	0.23668	2.341	0.21918	2.532	0.19468	2.729	0.16497	2.929	0.13243
15	2.150	0.22440	2.315	0.21002	2.491	0.18971	2.674	0.16472	2.860	0.13676
16	2.140	0.21311	2.293	0.20125	2.456	0.18425	2.626	0.16310	2.800	0.13903
17	2.131	0.20296	2.274	0.19294	2.425	0.17859	2.584	0.16056	2.747	0.13977
18	2.123	0.19360	2.257	0.18510	2.399	0.17289	2.547	0.15743	2.700	0.13941
19	2.116	0.18501	2.242	0.17776	2.375	0.16728	2.514	0.15394	2.658	1.13825
20	2.110	0.17712	2.228	0.17087	2.354	0.16182	2.485	0.15024	2.621	0.13652
21	2.104	0.16984	2.216	0.16442	2.335	0.15656	2.459	0.14645	2.587	0.13440
22	2.099	0.16311	2.205	0.15839	2.318	0.15151	2.435	0.14264	2.557	0.13201
23	2.094	0.15688	2.195	0.15274	2.302	0.14669	2.414	0.13887	2.530	0.12945
24	2.090	0.15110	2.186	0.14744	2.288	0.14210	2.394	0.13517	2.505	0.12679
25	2.086	0.14571	2.178	0.14247	2.275	0.13773	2.377	0.13156	2.482	0.12408
26	2.083	0.14069	2.171	0.13780	2.264	0.13357	2.360	0.12806	2.461	0.12136
27	2.079	0.13599	2.164	0.13340	2.253	0.12962	2.345	0.12468	2.441	0.11866
28	2.076	0.13159	2.157	1.12927	2.243	0.12587	2.332	0.12142	2.424	0.11599
29	2.074	0.12746	2.152	0.12537	2.233	0.12230	2.319	0.11829	2.407	0.11337
30	2.071	0.12358	2.146	0.12169	2.225	0.11891	2.307	0.11527	2.392	0.11081
31	2.069	0.11992	2.141	0.11821	2.217	0.11569	2.296	0.11238	2.378	0.10832
32	2.066	0.11647	2.136	0.11491	2.209	0.11262	2.286	0.10960	2.365	0.10590
33	2.064	0.11321	2.132	0.11179	2.203	0.10969	2.276	0.10694	2.352	0.10355
34	2.062	0.11013	2.128	0.10882	2.196	0.10691	2.267	0.10439	2.341	0.10128
35	2.060	0.10721	2.124	0.10601	2.190	0.10425	2.259	0.10194	2.330	0.09908
36	2.059	0.10443	2.120	0.10333	2.184	0.10172	2.251	0.09958	2.320	0.09695
37	2.057	0.10180	2.117	0.10079	2.179	0.09929	2.243	0.09733	2.310	0.09490
38	2.055	0.09929	2.113	0.09836	2.174	0.09698	2.236	0.09516	2.301	0.09292
39	2.054	0.09691	2.110	0.09604	2.169	0.09476	2.230	0.09308	2.292	0.09100
40	2.052	0.09463	2.107	0.09383	2.164	0.09264	2.223	0.09108	2.284	0.08915
45	2.046	0.08468	2.095	0.08411	2.145	0.08328	2.196	0.08218	2.250	0.08082
50	2.042	0.07661	2.085	0.07620	2.129	0.07559	2.175	0.07479	2.222	0.07379
55	2.038	0.06994	2.077	0.06963	2.117	0.06917	2.158	0.06857	2.200	0.06782
60	2.034	0.06433	2.070	0.06410	2.106	0.06374	2.144	0.06328	2.182	0.06270
65	2.032	0.05956	2.064	0.05937	2.098	0.05909	2.132	0.05873	2.167	0.05827
70	2.029	0.05544	2.060	0.05529	2.090	0.05507	2.122	0.05477	2.155	0.05441
75	2.027	0.05185	2.055	0.05173	2.084	0.05155	2.114	0.05131	2.144	0.05101
80	2.026	0.04870	2.052	0.04860	2.079	0.04845	2.106	0.04826	2.134	0.04801
85	2.024	0.04591	2.049	0.04583	2.074	0.04570	2.099	0.04554	2.126	0.04534
90	2.023	0.04342	2.046	0.04335	2.070	0.04325	2.094	0.04311	2.118	0.04294
95	2.021	0.04119	2.043	0.04113	2.066	0.04104	2.089	0.04092	2.112	0.04078
100	2.020	0.03918	2.041	0.03912	2.062	0.03905	2.084	0.03895	2.106	0.03882
150	2.014	0.02630	2.027	0.02629	2.041	0.02627	2.055	0.02624	2.069	0.02620
200	2.010	0.01980	2.020	0.01979	2.031	0.01978	2.041	0.01977	2.051	0.01975

Kaynak: Judge ve diğerleri, Introduction..., s. 995 - 996. K> 6 için bkz.: a.g.k., s.997 - 1000.

Sonuç olarak birinci mertebeden otokorrelasyon için yapılan kesin D-W testi için

$$d < d^*$$

olması halinde $H_0: \rho = 0$ şeklindeki H_0 reddedilerek $H_1: \rho > 0$ kabul edilecek böylece de pozitif otokorrelasyona hükmedilecektir.

$$d > d^*$$

için ise H_0 'ın reddi için bir neden bulunmamaktadır.

Nihayet gerek d gerekse d^* ile elde edilen otokorrelasyon testlerini tamamlayıcı bir unsur olarak parametrik olmayan khi - kare testi de önerilebilir (41). Otokorrelasyonu saptamak amacıyla burada 2×2 'lik bir tablo düzenlenmektedir:

TABLO: 9

Kalıntılar İçin Kontenjans Tablosu

	<u>t'de pozitif</u>	<u>t'de negatif</u>	<u>toplam</u>
(t-1)'de pozitif	a	a	a+b
(t-1)'de negatif	c	d	c+d
toplam	a+c	b+d	T-1

$$\chi^2 = \frac{[(a.d) - (b.c)]^2 \cdot (T-1)}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

$\chi^2_{0.05;1}=3.841$ ve $\chi^2_{0.01;1}=6.6349$ dir. $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$ için hatapaylarının birbirinden bağımsız oldukları şeklindeki H_0 reddedilerek otokorrelasyonun varlığına hükmedilecektir.

Khi - kare bağımsızlık testi ile ilgili olarak bu testin D-W testinin tamamlayıcısı olduğu ve D-W ile her zaman aynı sonucu vermeyebileceğine de değinilmelidir.

7- Uygulama:

TABLO: 10

Geniş Para

<u>Yıllar</u>	<u>Arzı: M₂</u>	<u>Baz Para: H</u>
1971	28.29	35.87
1972	25.17	33.19
1973	27.43	20.51
1974	25.38	24.53
1975	29.45	33.55
1976	23.54	26.75
1977	34.43	47.79
1978	34.69	42.56
1979	60.91	49.77
1980	67.10	47.86
1981	85.63	70.29
1982	56.01	45.94
1983	28.75	32.04
1984	57.49	73.16
1985 (Eylül)	36.33	42.17

Kaynak: Alkin E.; Demirgil D., Özmucur S, Türkiye'de Enflasyon ve Enflasyon ile Savaşta Başarı Koşulları, TÜSIAD 1986, s. 43.

Tablo 10'daki verilere göre şu sonuçlar bulunmuştur:

$$M = -2.5324226 + 1.0532663 H \quad r^2 = 0.6982 \quad T = 15$$
$$(8.4851218) \quad (0.1920735) \quad s_e = 10.87947$$
$$t = -0.298 \quad 5.483 \quad d = 0.93264$$

T=15 ve K=2 için %5 ve %1 d₁ değerleri sırasıyla d₁=1.077 ve d₁=0.611 dir. %5'e göre pozitif otokorrelasyona karar verilirken %1 için d kararsızlık bölgesi içinde yer almaktadır. M ve H değerleri ile kalıntıların değerleri ve serpilme diagramı aşağıda verilmektedir:

TABLO: 11
M ve \hat{M} Değerleri

Yıllar	M	\hat{M}	e_t	$e_t - e_{t-1}$
1971	28.29	34.5110	-6.22095	-
1972	25.17	32.4255	-7.25548	-1.03453
1973	27.43	19.0701	8.35993	15.61541
1974	25.38	23.3042	2.07580	-6.28413
1975	29.45	32.8047	-3.35466	-5.43046
1976	23.54	25.6425	-2.10245	1.25221
1977	34.43	47.8032	-13.3732	-11.27075
1978	34.69	42.2946	-7.60549	5.76771
1979	60.91	49.8886	11.0214	18.62689
1980	67.10	47.8769	19.2231	-8.2017
1981	85.63	71.5017	14.1283	-5.0948
1982	56.01	45.8546	10.1554	-3.9729
1983	28.75	31.2142	-2.46423	-12.61963
1984	57.49	74.5245	-17.0345	-14.57027
1985	36.33	41.8838	-5.55381	11.48069

$$\sum e_t^2 = 1538.717$$

$$\sum (e_t - e_{t-1})^2 = 1435.0797$$

$$d = \frac{1435.0797}{1538.717} = 0.9364$$

Residual Plot

obs	RESIDUAL	ACTUAL	FITTED
1971	-6.22095	28.2900	34.5110
1972	-7.25548	25.1700	32.4255
1973	8.35993	27.4300	19.0701
1974	2.07580	25.3800	23.3042
1975	-3.35466	29.4500	32.8047
1976	-2.10245	23.5400	23.6425
1977	-13.3732	34.4300	47.8032
1978	-7.60459	34.6900	42.2946
1979	11.0214	60.9100	49.8886
1980	19.2231	67.1000	47.8769
1981	14.1283	85.6300	71.5017
1982	10.1554	56.0100	45.8546
1983	-2.46423	28.7500	31.2142
1984	-17.0345	57.4900	74.5245
1985	-5.55381	36.3300	41.8838

ŞEKİL: 1

Kalıntıların Dağılımı

Şekil 1'deki kalıntılar gelişigüzel dağılmakta, sistematik bir yönelme ortaya koymamaktadırlar. Bu nedenle de otokorelasyonun varlığına karar verebilmek olası değildir.

Alternatif olarak Khi - Kare testine başvurulmuştur:

TABLO: 12

Tablo 10'un Kalıntılarına İlişkin Kontenjans Tablosu

	<u>t'de poz.</u>	<u>t'de neg.</u>	<u>top.</u>
(t-1)'de poz..	5	2	7
(t-1)'de neg.	1	6	7
	<u>6</u>	<u>8</u>	<u>14</u>

$\chi^2=4.67$

Khi-kare testinde de, D-W testine koşul olarak %5'e göre hata paylarının birbirinden bağımsız olmadıklarına, %1'e göre ise olduklarına karar verilmektedir. Bundan ötürü kesin D-W testine başvurulması öngörülmüştür.

d* için de önce $M = -I_{15} - H(H'H)^{-1}H'$ hesaplanmıştır.

$$H'H = \begin{vmatrix} 15 & 625.98 \\ 625.98 & 29323.073 \end{vmatrix} \quad |H'H| = 47995.1346$$

$$(H'H)^{-1} = \frac{1}{47995.1346} \begin{vmatrix} 29323.073 & -625.98 \\ -625.98 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.010959282 & -0.0130442572 \\ -0.013042572 & 0.000312531679 \end{vmatrix}$$

$$H(H'H)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 35.87 \\ 1 & 33.19 \\ 1 & 20.51 \\ 1 & 24.53 \\ 1 & 33.55 \\ 1 & 26.75 \\ 1 & 47.79 \\ 1 & 42.56 \\ 1 & 49.77 \\ 1 & 47.86 \\ 1 & 70.29 \\ 1 & 45.94 \\ 1 & 32.04 \\ 1 & 73.16 \\ 1 & 42.17 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0.010959282 & -0.013042572 \\ -0.0130422572 & -0.000312531679 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.143122 & -0.00183 \\ 0.178076 & -0.00266 \\ 0.343456 & -0.00663 \\ 0.291024 & -0.00537 \\ 0.173380 & -0.00255 \\ 0.262070 & -0.00468 \\ -0.01234 & 0.001893 \\ 0.055867 & 0.000258 \\ -0.03816 & 0.002512 \\ -0.01325 & 0.001915 \\ -0.30580 & 0.008925 \\ 0.011783 & 0.001315 \\ 0.193075 & -0.00312 \\ -0.34323 & 0.009822 \\ 0.060954 & 0.000136 \end{vmatrix}$$

1.0049403	-0.98167	-0.12877	0.10554	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
-0.99283	2.026688	-1.15716	0.12332	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.01778	-0.93367	1.889224	-1.15407	0.18075	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.18075	-1.20235	1.973104	-1.06215	0.11065	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.11065	-1.13371	2.04044	-1.12235	0.10497	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.10497	-1.07312	1.869634	-0.93978	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0383	-0.99846	1.950256	-0.13646	0.09823	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.06823	-1.06957	1.934978	-1.07059	0.06874	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.06874	-1.05062	1.97708	-1.07726	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.08206	-1.08571	2.046614	-0.168	-0.02808	0.07472	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.46111	-0.88688	0.10422	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.46111	-0.88688	0.10422	-0.09482	0.04075	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.13623	2.013738	-0.92764	-0.78158	-0.09386	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.05392	-1.01181	1.83334	-0.56757	1.291708	-0.69559	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

MA=

olmaktadır. E(d) için [9]'da verilen formül altında, [5]'in aynıdır. MA'nın köşegeni üzerinde yer alan θ_i 'nin, $i=1, \dots, 15$, toplamı alınırsa

$$\sum_{i=1}^{15} \theta_i = 26.31705$$

ve

$$e(d) = \frac{26.31705}{13} = 2.024 = \bar{\theta}$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan E(d) almaşık olarak

$$E(d) = \frac{2(T-1) - iz H'AH (H'AH)^{-1} (H'H)^{-1}}{T-K}$$

ile de hesaplanabilir (42). Bu hesaplama yolu ile ise E(d) bu şekilde, bağıl olarak daha kolay hesaplanmak isteniliyorsa şöylece bir yol izlenebilir:

$$H'AH = \sum_{i=1}^{T-1} \Delta X_{ii} \Delta X_{ij} \quad \Delta X_{ii} = X_{i+i,i} - X_{ii}; \quad \Delta X_{ij} = X_{i+j,j} - X_{ij}$$

$$(\Delta H)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.68 & -12.68 & 4.02 & 9.02 & -6.8 & 21.04 & -5.23 & 7.21 & -1.91 & 22.43 & -24.35 & -13.9 & 41.12 & -30.99 \end{bmatrix}$$

$$H'AH = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4777.8642 \end{bmatrix} \quad iz \{ H'AH (H'H)^{-1} \} = (4777.8642) (0.000312531679) = 1.493230676$$

$$P = 2(15-1) - 1.493230676 = 26.50676932$$

$$E(d) = \frac{P}{13} = 2.0389$$

Var d için de [6] ve bunun aynı olan [10] formülü yerine

$$\text{Var}(d) = \frac{2(Q - PE(d))}{(T-K)(T-K+2)}$$

$$Q = 2(3T-4) - 2 \text{ iz } [H'A^2H (H'H)^{-1}] + \text{ iz } [(H'AH (X'X)^{-1})^2]$$

$$H'AH = \sum_{i=1}^{T-2} \Delta X_{ii} \Delta X_{ij} + (X_{ji} - X_{ij}) (X_{ij} - X_{ji}) + (X_{Ti} - X_{T-i,j}) (X_{Tj} - X_{T-i,j})$$

kullanılabilir (43). Burada uygulanacak olursa:

$$(\Delta^2 H)' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 16.7 & 5 & -15.82 & 27.84 & -15.81 & 12.44 & -9.12 & 24.34 & -46.78 & 10.45 & 55.02 & -72.11 \end{bmatrix}$$

$$H'A^2H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 14001.7336 \end{bmatrix} \quad \text{iz}[H'A^2H(H'H)^{-1}] = (14001.7336) (0.00031253) = 4.375985311$$

$$\text{iz } [H'AH(H'H)^{-1}]^2 = (1.493230676)^2 = 2.229747541$$

$$Q = 2(45-4) - 2(4.375985311) + 2.229747541 = 75.4777692$$

$$\text{Var } d = \frac{2}{13.15} (75.4777692) - (26.50676608) (2.03) = 0.222246582$$

$$E(du) = 2.15 \quad \text{Var}(du) = 0.2244$$

Bulgular [7] ve [8] 'de yerlerine konulursa

$$b = \frac{\left[\frac{0.222247^{1/2}}{0.2244} \right]}{0.2244} = 0.9951912 \quad a = -0.10067$$

$$d^* = -0.10067 + 0.9951912 (1.07) = 0.9642$$

$d = 0.93264 < d^* = 0.9642$ dür. Dolayısıyla de %1 için de pozitif otokorrelasyonun varlığına karar verilebilecektir.

8- Sonuç:

Burada Dürbin - Watson Testi'ni Türkçe yazından farklı bir yaklaşım içinde ele alarak varsayımlardan sapma halleri için çeşitli almasılar ileri sürmeye çalıştım. Ayrıca konu ile ilgili olarak varsayımların gerçekleşmesi halinde dahi testin sonuç vermediği durumlara da değinerek kesin D-W testini de tanıtmayı da amaçladım. Bütün bunlara

rağmen çalışmanın konunun tümünü kapsamadığı, sadece yıllık nicel verilere kısıtlı kaldığı da bir gerçek. Günümüzde ekometrik araştırmaların çoğu kez aylık veya üçer aylık veriler ile yapıldığı düşünülürse daha yüksek mertebeden, örneğin dördüncü mertebeden otokorrelasyona sadece değinmiş olmak fakat uygulamada yer vermemek sanırım buradaki en büyük eksikliğim.

Nihayet eklemek istediğim son bir husus ta değişkenler arasında kabul edilemeyen verinin (outlyer) bulunmasının testin sonucunu önemli ölçüde değiştirebildiğidir.

KAYNAKLAR

- 1) Goldberger A.S., Econometric Theory, John Wiley, New York, 1964, s. 107.
- 2) Judge George - Hill R. Carter - Griffiths William E. ve diğerleri, The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley, New York, 1985, s. 275.
- 3) Maddala G.S., Econometrics, Mc Graw Hill ISE, Singapore, 1977, s. 274.
- 4) Kar.: Kennedy Peter, A Guide to Econometrics, MIT Press, Cambridge, 1979, s. 87.
- 5) Pindyck R.S. and Rubinfeld D.L., Econometric Models and Econometric Forecasts, Mc Graw Hill ISE, Singapore, 1985, s. 153.
- 6) Johnston J., Econometric Methods, Mc Graw Hill ISE, Singapore, 1985, s. 169.
- 7) Anderson T.W., "On the Theory of Testing Serial Correlation", Skandinavisk Aktuarietidskrift, 31(1948), s.88 - 116.
- 8) Durbin J.-Watson G. S., "Testing for Serial Correlation in Least - Squares Regression", Biometrika, 37 ve 38 (1950 ve 1951), s. 409 - 428 ve s. 159 - 178.
- 9) Maddala, s. 284
- 10) Kar.: Judge, s. 395.
- 11) Johnston, s. 314.
- 12) Merrill W.- Fox K.A., Introduction to Economic Statistics, John Wiley, New York, 1970, s. 389.
- 13) Judge, s. 396.
- 14) Durbin - Watson, s.416.
- 15) Judge George, Griffiths W.E., Cartel Hill R. ve diğerleri, s. 333.
- 16) Johnston, s.315.
- 17) D-W., a.g.m.
- 18) Farebrother R.W., "The Durbin - Watson Test for Serial Correlation when there is no Intercept in the Regression", Econometrica 48 (1980), s. 1553.
- 19) Gujarati Damodar, Basic Econometrics, Mc Graw Hill ISE- Singapore, 1988, s.375.
- 20) Johnston, s. 316.
- 21) Kramer Giselbert, "On the Durbin - Watson Bounds Test in the Case of Regression Through the Origin", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik,

- 185(1971), s. 348.
- 22) Farebrother R.W., "Durbin - Watson Test for Serial Correlation When There is No Intercept in the Regression," *Econometrica* 48(1980), s. 1553-1563.
 - 24) Nelson Lloyd S., "The Mean Square Successive Difference Test", *Journal of Quality Control*, 12(1980), s. 174-175.
 - 25) Draper Norman - Smith Harry, *Applied Regression Analysis*, John Wiley, New York, 1981, s. 190.
 - 26) Farebrother, tablo II ve III, s. 1556 - 1559.
 - 27) Kar.: Maddala, s. 283 - 84.
 - 28) Wallis Kenneth, "Testing for Fourth Order Autocorelation in Quarterly Regression Equations," *Econometrica* 40(1972), s. 617-636.
 - 29) Wallis tabloları için bkz.: Genceli Mehmet, *Ekonometride İstatistik İlkeler*, Filiz Kitabevi, İstanbul, 1989, s. 597.
 - 30) Pidyck -Rubinfeld, s.159.
 - 31) Gujarati, s. 376.
 - 32) Wallis, a.g.m.
 - 33) Savin N.E. -White K., "Testing for Autocorrelation withs Missing Observations," *Econometrica* 46 (1978), s.65
 - 34) Ertek Tümay, *Ekonometriye Giriş*, ODTÜ Yayını, Ankara, 1979, s. 188.
 - 35) Aigner Dennis, *Basic Econometrics*, Prentice Hall, New Jersey, 1971, s. 136.
 - 36) White Kenneth, "A General Computer Program for Econometric Methods - Shazam," *Econometrica* 46(1978), s. 239 - 240.
 - 37) Maddala, s. 285.
 - 38) Durbin J. Watson G.S., "Testing for Serial Correlation in Least - Squares Regression III" *Biometrika* 58(1970), s. 1-42.
 - 39) Gujarati, s. 379.
 - 40) Maddala, s. 286.
 - 41) Maddala, s.88, "Gujarati, s. 373.
 - 42) Judge, s.398.
 - 43) ———, s. 400.

$$H(H'H)^{-1}H' =$$

$$M = I_n - H(H'H)^{-1}H' =$$