Araştırma Makalesi / Research Article

m. Dereceden Cebir Üzerine Bir Not

Atilla AKPINAR*, Fatma ÖZEN ERDOĞAN

Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 16059, Bursa
(ORCID: 0000-0002-7612-2448) (ORCID: 0000-0002-9691-4565)

Öz

Bu makalede, girdileri bir F cisminden alınan $m \times m$ boyutlu özel bir matris cebiri çalışılmıştır. Bu cebir üzerinde tanımlanan bir ek (adjoint) alma dönüşümü (bir matrisin eki), bir norm form (bir matrisin determinantı) ve bir iz form (bir matrisin izi) yardımıyla bu cebir ile ilgili bazı cebirsel özellikler elde edildi. Ayrıca, bu cebirin m. dereceden bir cebir yapısına sahip olduğu gösterildi. Bu sonuç sayesinde kübik cebir tanımı m. dereceden cebir tanımına genişletildi.

Anahtar kelimeler: Matris cebiri, Norm form, İz form, Lokal halka, Projektif Klingenberg düzlemi.

A Note on Algebra of Degree m

Abstract

In this paper, the special matrix algebra of dimensional $m \times m$ whose entries are taken from a field F is studied. By means of an adjoint map (adjoint of a matrix), a norm form (determinant of a matrix) and a trace form (trace of a matrix) defined on the algebra, some algebraic properties related to this algebra are obtained. Moreover, it is shown that the algebra is of an algebraic structure of degree m. By this result, the definition of cubic algebra is extended to the definition of algebra of degree m.

Keywords: Matrix algebra, Norm form, Trace form, Local ring, Projective Klingenberg plane.

1. Giriş

Projektif geometrinin önemli problemlerinden biri koordinat halkasının cebirsel özellikleri ile karşılık gelen düzlemin geometrik özellikleri arasındaki karşılıklı ilişkiyi bulmaktır. Mesela, bir projektif düzlemin Pappus, Dezarg ya da Moufang düzlemi olması için gerek ve yeter şart bu düzlemlerin koordinat halkalarının, sırasıyla, bir cisim, bir bölümlü halka (aykırı cisim) ya da bir alterne cisim (alterne bölümlü halka) olmasıdır [1]. Üstelik, bir geometrik yapının bir projektif Klingenberg düzlemi olması için gerek ve yeter şart koordinat halkasının bir lokal halka olmasıdır [2].

Bix [3], R birimli değişmeli lokal halka olmak üzere girdileri $\mathbb{O}$ octonion R-cebirinden alınarak oluşturulan 3x3 matris uzayının bir kanonik involusyona göre simetrik kalan elemanlarının bir özel alt kümesi ile çalışmıştır. Bu küme üzerinde Jordan çarpımı tanımlanarak bu küme önce bir Jordan R-cebir yapısına ve daha sonra bu küme üzerinde bir norm form (determinant) ve bir iz form (bir matrisin izi) tanımlanarak bu cebir bir kübik cebir yapısına sahip hale getirilmiştir. Bu şekilde elde edilen cebir, 27 boyutlu (exceptional) kuadratik Jordan cebiridir. Bu cebir ile ilgili daha fazla bilgi için [4-9] daki çalışmalara bakılabilir. Bu kuadratik Jordan cebiri ile bir octonion düzlemin koordinatlandığı iyi bilinmektedir [3,7,8].

Jukl [10,11], m. dereceden reel plural cebir üzerine kurulan sonlu boyutlu modüller üzerine çalıştı. Erdogan vd. [12], bu reel plural cebirler üzerine kurulan modüllerin bazı özelliklerini incelediler.

*Sorumlu yazar: aakpinar@uludag.edu.tr
Geliş Tarihi: 19.08.2018, Kabul Tarihi: 04.12.2018

Ciftci ve Erdogan [13], bu reel plural cebir yardımıyla elde edilen $(n+1)$-boyutlu modülden n-boyutlu projektif koordinat uzay elde ettiler.

Bu makalede; F bir cisim, $\eta \notin \mathrm{F}$ ve $\eta^m = 0$ olmak üzere $A := \mathrm{F} + \mathrm{F}\eta + \mathrm{F}\eta^2 + \cdots + \mathrm{F}\eta^{m-1}$ cebiri (ya da lokal halkası) ile çalışılacaktır. Ancak bu cebir yerine izomorf olduğu $M_{mm}(\mathrm{F})$ ile gösterilen özel bir matris cebiri kullanılacaktır. Üzerinde bir norm form (bir matrisin determinantı), bir iz form (bir matrisin izi) ve bir ek alma dönüşümü (bir matrisin adjointi) yardımıyla $M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebiri ile ilgili bazı cebirsel özellikler elde edilecektir ve bu sayede $M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebiri m. dereceden bir cebir yapısına sahip hale getirilecektir. Bu özel örnek sayesinde kübik cebir tanımının bir genelleştirmesini vermek mümkün olacaktır. Bir lokal halka ile bir projektif Klingenberg düzlem sınıfının koordinatlanabileceği gerçeği dikkate alındığında buradan elde edilen cebirsel özelliklerin karşılık gelen düzlemin hangi geometrik özelliğine karşılık gelebileceği ayrı bir çalışma konusu olarak karşımıza çıkacaktır. Ancak, bu çalışmanın kapsamı sadece cebirsel özelliklerin incelenmesi ile sınırlı tutulacaktır.

Bu çalışmanın geri kalan kısmı şu şekilde düzenlenmiştir: 2. bölüm, ihtiyaç duyulan temel bilgilerin tanım ve teoremler olarak verildiği bölümdür. 3. bölümde $M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebiri m. dereceden bir cebir yapısı ile donatılacaktır ve kübik cebir tanımı m. dereceden cebir tanımına genelleştirilecektir.

2. Ön Bilgiler

Çalışmada kullanılacak temel bilgiler tanım, önerme, teorem ve açıklamalar biçiminde bu bölümde takdim edilecektir. Referansları açık olarak verilmeyen cebirsel bilgiler için [14-19] daki çalışmalardan faydalanılmıştır.

Tanım 2.1. R bir halka olsun. R nin her a elemanı için $aI \subseteq I$ ve $Ia \subseteq I$ şartlarını sağlayan bir I alt halkasına R halkasının bir *ideali* denir.

Tanım 2.2. R bir halka ve $M \neq R$, R nin bir ideali olsun. Eğer $M \subset I \subset R$ şartını sağlayan hiçbir I ideali yoksa M ye R nin *maksimal ideali* denir.

Tanım 2.3. Aşağıda birbirine denk olarak verilen şartlardan bir tanesini sağlayan birimli (özdeşlikli) bir R halkasına *lokal halka* denir:

a) R nin bir tek maksimal ideali vardır.
b) R nin tüm tersinir olmayan elemanları bir tek has idealde kapsanır.
c) R nin tersinir olmayan elemanları bir has ideal oluşturur.
d) $\forall\ r \in R$ için ya r ya da $1-r$ tersinirdir.

Tanım 2.4. R bir birimli halka olsun. $M_1, M_2, ..., M_n$ ve M' $R-$modülleri verilsin. i, $1 \leq i \leq n$ özelliğinde seçilmiş bir tamsayı, $x, y \in M_i$, $1 \leq j \leq n$ ve $j \neq i$ için $\alpha_j \in M_j$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f : M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \to M'$ dönüşümüne bir *n-lineer dönüşüm* denir:

NL1) $f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x+y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) + f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, y, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ dir.

NL2) $f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \lambda x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = \lambda f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ dir.

Burada sadece i. bileşen göz önüne alınırsa f nin bu bileşen için lineer olduğu görülür. n tane bileşen için lineerlik şartlarının sağlanması istendiğinden f ye n-lineer dönüşüm adı verilmektedir. Özel olarak $n=2$ alınırsa f ye *2-lineer* (*bilineer*) *dönüşüm* denir.

Tanım 2.5. R bir birimli halka ve M bir $R-$modül olsun. $M^n = M \times M \times \cdots \times M$ olmak üzere $f: M^n \to R$ dönüşümü n-lineer ise f ye M *üzerinde n-lineer dönüşüm* ya da kısaca *n-lineer form* adı verilir.

Tanım 2.6. f, M üzerinde bir n-lineer dönüşüm olsun. Eğer her $(\alpha_1,....,\alpha_n)$ sıralı n-lisi ve $1 \le i, j \le n$ olmak üzere her $i \ne j$ için

$$f(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = f(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

ise f ye *simetrik n-lineer dönüşüm,*

$$f(\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_j,...,\alpha_n) = -f(\alpha_1,...,\alpha_j,...,\alpha_i,...,\alpha_n)$$

ise f ye *anti-simetrik n-lineer dönüşüm* denir.

Tanım 2.7. R bir birimli halka ve M ile M' iki $R-$modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $Q: M \to M'$ dönüşümüne bir *kuadratik dönüşüm* denir:

KU1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $Q(\lambda y) = \lambda^2 Q(y)$ dir (yani, Q 2. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KU2) Her $x, y \in M$ için $Q(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right]$ özelliğinde $M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 2-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken Q kuadratik dönüşümüne M üzerinde bir kuadratik dönüşüm denir. $M' = R$ iken Q kuadratik dönüşümüne bir *kuadratik form,* bu durumda $Q(x,y)$ ye de *birleştirilmiş 2-lineer form* denir (Burada $Q(x,x) = Q(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

Tanım 2.8. R bir birimli halka ve M ile M' iki $R-$modül olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $N: M \to M'$ dönüşümüne bir *kübik dönüşüm* denir:

KÜ1) Her $\lambda \in R$ ve her $y \in M$ için $N(\lambda y) = \lambda^3 N(y)$ dir (yani, N 3. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

KÜ2) Her $x, y, z \in M$ için

$$N(x,y,z) = \frac{1}{6}\left[N(x+y+z) - N(x+y) - N(y+z) - N(x+z) + N(x) + N(y) + N(z)\right]$$

özelliğinde $M \times M \times M$ den M' ye bir simetrik ve 3-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M' = M$ iken N kübik dönüşümüne M üzerinde bir kübik dönüşüm denir. $M' = R$ iken N kübik dönüşümüne bir *kübik form* [20], bu durumda $N(x,y,z)$ ye de *birleştirilmiş 3-lineer form* denir (Burada $N(x,x,x) = N(x)$ olduğuna dikkat ediniz.).

Thomas [21] tarafından verilen bir sonuç yardımıyla Tanım 2.7 ve Tanım 2.8 in genelleştirilmesi aşağıdaki biçimde yapılabilir.

Tanım 2.9. R bir birimli halka ve M ile M' iki $R-$modül olsun. $n\geq 1$ bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $f:M\to M'$ dönüşümüne bir *n. dereceden dönüşüm* denir:

ND1) Her $\lambda\in R$ ve her $y\in M$ için $f(\lambda y)=\lambda^n f(y)$ dir (yani f n. dereceden homojen polinom fonksiyondur).

ND2) Her $x_1,x_2,...,x_n\in M$ ve $H\subseteq\{1,2,3,...,n\}$ için

$$n!B_f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{\substack{H,\\|H|=k}} f(S_H),\ S_H:=\sum_{i\in H}x_i$$

özelliğinde $M^n=M\times M\times\cdots\times M$ den M' ye bir B_f simetrik ve n-lineer dönüşüm vardır (Linerizasyon ya da polarizasyon özelliği).

$M'=M$ iken n. dereceden dönüşüme M *üzerinde n. dereceden dönüşüm* denir. $M'=R$ iken n. dereceden dönüşüme bir *n. dereceden form*, bu durumda $B_f(x_1,x_2,...,x_n)$ ye de *birleştirilmiş n-lineer form* denir (Burada $B_f(x,x,...,x)=f(x)$ olacağına dikkat ediniz.).

Özel olarak; M üzerindeki bir 1. dereceden form bir lineer form olarak isimlendirilir. $n=2$ için Tanım 2.7 de kuadratik ve $n=3$ için Tanım 2.8 de kübik ifadeleri daha önce kullanılmıştı.

Tanım 2.10. $(R,+,\cdot)$ ve $(R',+',\cdot')$ iki halka olsun. $\Phi:R\to R'$ birebir ve örten bir homomorfizm (veya anti-homomorfizm) ise Φ dönüşümüne R den R' ye bir *izomorfizm* (veya *anti-izomorfizm*) denir. R nin kendisi üzerine bir izomorfizmine (veya anti- izomorfizmine) R üzerinde bir *otomorfizm* (veya *anti-otomorfizm*) denir.

Tanım 2.11. R bir halka olsun. i, R üzerinde özdeşlik dönüşümü olmak üzere mertebesi 2 olan bir f otomorfizmine (veya anti-otomorfizmine) R nin bir *involusyonu* (veya *anti-involusyonu*) denir.

Tanım 2.12. R bir halka ve f de R nin bir involusyonu (ya da anti-involusyonu) olsun. R nin f involusyonu (ya da anti-involusyonu) altında değişmez kalan elemanlarına R nin *simetrik elemanları* denir.

Şimdi, [3] den kübik cebir tanımını verebiliriz.

Tanım 2.13. R bir birimli halka ve M de bir birimli $R-$modül olsun. M üzerinde $x\to x^{\#}$ biçiminde bir kuadratik dönüşüm, M üzerinde bir N kübik form ve M üzerinde bir T simetrik 2-lineer dönüşüm tanımlansın. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye bir *kübik* $R-$*cebir* denir:

1) $x^{\#\#}=N(x)x$ dir.

2) $N(1)=1$ dir.

3) $T(x^{\#},y)=N(x,y)$ dir.

4) $1^{\#}=1$ dir.

5) $x\times y=\frac{1}{2}\left[(x+y)^{\#}-x^{\#}-y^{\#}\right]$ ve $T(y)=T(y,1)$ olmak üzere $1\times y=\frac{1}{2}\left[T(y)1-y\right]$ dir.

1-5) şartlarının hepsi R nin tüm skalar genişlemeleri altında sağlanır.

Bu tanımdaki N dönüşümü x de kuadratik y de lineer olan bir dönüşüm olarak ifade edilebilir [7]. Bu durum, yukarıdaki tanımda N yerine, x ve y sırasında, $N_{2,1}$ yazılarak $N_{2,1}(x,y)$ olarak da belirtilebilirdi.

Bir kübik cebir $U_x y = T(x,y)x - 2\left(x^{\#} \times y\right)$ eşitliği altında bir birimli kuadratik Jordan cebiridir [7].

Tanım 2.14. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, $\eta \notin \mathbb{R}$ ve $\eta^m = 0$ olmak üzere $A := \left\{ x = x_0 + x_1\eta + x_2\eta^2 + \cdots + x_{m-1}\eta^{m-1} \,\middle|\, \forall x_i \in \mathbb{R} \right\}$ kümesi, bileşen bileşene toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir bazı $\left\{1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{m-1}\right\}$ olan bir reel vektör uzayıdır. A vektör uzayı aşağıdaki çarpma işlemi altında

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(x_0 + x_1\eta + x_2\eta^2 + \cdots + x_{m-1}\eta^{m-1}\right)\left(y_0 + y_1\eta + y_2\eta^2 + \cdots + y_{m-1}\eta^{m-1}\right) \\ &= x_0y_0 + \left(x_0y_1 + x_1y_0\right)\eta + \left(x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0\right)\eta^2 + \cdots + \left(x_0y_{m-1} + x_1y_{m-2} + \cdots + x_{m-1}y_0\right)\eta^{m-1} \end{aligned}$$

bir cebir yapısına sahip olmaktadır. Bu cebire *m. dereceden reel plural cebir* adı verilmektedir [10]. Bu cebir ile ilgili ispatsız iki sonuç ifade edebiliriz.

Önerme 2.15. Bir $x = x_0 + x_1\eta + x_2\eta^2 + \cdots + x_{m-1}\eta^{m-1} \in A$ elemanının tersinir olması için gerek ve yeter şart $x_0 \neq 0$ olmasıdır [10].

Önerme 2.16. A maksimal ideali ηA olan bir lokal halkadır. A nın tüm idealleri $1 \leq j \leq m$ olmak üzere $\eta^j A$ biçimindedir [10].

[10] da A cebirinin aşağıdaki formda elemanlara sahip $M_{mm}(\mathbb{R})$ matris cebirine izomorf olduğu ifade edilmiştir:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & x_0 & x_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0 \end{bmatrix} \in M_{mm}(\mathbb{R}).$$

Bu sonucun detaylı ispatı için [12] ye bakılabilir. Bu çalışma boyunca $\mathbb{R}$ cismi yerine bir F cismi alınarak $M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebiri üzerinde çalışılacaktır. Şimdi, [2] den bazı bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.17. **N** noktalar kümesini, **D** doğrular kümesini, $\in$ üzerinde olma bağıntısını ve $\sim$, **N** ve **D** üzerinde bir denklik (komşuluk) bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $M = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$ yapısına bir projektif Klingenberg düzlemi denir ve kısaca PK ile gösterilir.

PK1) Komşu olmayan herhangi iki $A, B \in \mathbf{N}$ noktasını birleştiren tam olarak bir $d \in \mathbf{D}$ doğrusu vardır,
PK2) Komşu olmayan herhangi iki $c, d \in \mathbf{D}$ doğrusunun tam olarak bir $N \in \mathbf{N}$ arakesit noktası vardır,

PK3) M den bir $M^* = (\mathbf{N}^*, \mathbf{D}^*, \in)$ projektif düzlemi üzerine her $A, B \in \mathbf{N}$ ve $c, d \in \mathbf{D}$ için

$$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$$

şartlarını sağlayacak biçimde bir Ψ epimorfizmi vardır.

Tanım 2.18. (R, I) birimli bir lokal halka olsun. Bu takdirde, $M(R) = (\mathbf{N}, \mathbf{D}, \in, \sim)$ aşağıdaki gibi tanımlanan komşuluk bağıntılı bir üzerinde olma yapısıdır:

$$\mathbf{N} = \{(x, y, 1) \mid x, y \in R\} \cup \{(1, y, z) \mid y \in R,\ z \in I\} \cup \{(w, 1, z) \mid w, z \in I\},$$

$$\mathbf{D} = \{[m, 1, k] \mid m, k \in R\} \cup \{[1, n, p] \mid p \in R,\ n \in I\} \cup \{[q, n, 1] \mid q, n \in I\},$$

$$[m, 1, k] = \{(x, xm + k, 1) \mid x \in R\} \cup \{(1, zk + m, z) \mid z \in I\},$$

$$[1, n, p] = \{(yn + p, y, 1) \mid y \in R\} \cup \{(zp + n, 1, z) \mid z \in I\},$$

$$[q, n, 1] = \{(1, y, yn + q) \mid y \in R\} \cup \{(w, 1, wq + n) \mid w \in I\},$$

$$P = (x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) = Q \Leftrightarrow x_i - y_1 \in I\ (i = 1, 2, 3), \forall P, Q \in \mathbf{N},$$

$$g = [x_1, x_2, x_3] \sim [y_1, y_2, y_3] = h \Leftrightarrow x_i - y_i \in I\ (i = 1, 2, 3), \forall g, h \in \mathbf{D}\ .$$

Teorem 2.19. (R, I) birimli bir lokal halka olsun. $M(R)$ bir PK-düzlemdir ve her bir dezargsel PK-düzlemi bir $M(R)$ ye izomorftur.

3. Temel Sonuçlar

Bu bölümde F bir cisim, $\eta \notin \mathrm{F}$ ve $\eta^m = 0$ olmak üzere $A := \mathrm{F} + \mathrm{F}\eta + \mathrm{F}\eta^2 + \cdots + \mathrm{F}\eta^{m-1}$ kümesi üzerinde bileşen bileşene toplama ve aşağıdaki çarpma işlemi tanımlansın: $0 \le i, j \le m-1$ için $x_i, y_j \in \mathrm{F}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \left(x_0 + x_1\eta + x_2\eta^2 + \cdots + x_{m-1}\eta^{m-1}\right)\left(y_0 + y_1\eta + y_2\eta^2 + \cdots + y_{m-1}\eta^{m-1}\right) \\ &= x_0y_0 + (x_0y_1 + x_1y_0)\eta + (x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0)\eta^2 + \cdots + (x_0y_{m-1} + x_1y_{m-2} + \cdots + x_{m-1}y_0)\eta^{m-1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i+j=k} x_iy_j\right)\eta^k. \end{aligned}$$

Bu takdirde, A maksimal ideali (tüm tersinir olmayan elemanların oluşturduğu küme) $I = \eta A$ olan birimli değişmeli lokal halkadır. Böylece, Teorem 2.19 dan $M(A)$ nın bir PK-düzlem olacağı açıktır. Üstelik, Tanım 2.14 den A m. dereceden plural F -cebir olarak isimlendirilebilir. Dahası bu cebir $M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebirine izomorftur. Bu makalede $\mathbf{J} := M_{mm}(\mathrm{F})$ matris cebiri üzerinde çalışılacaktır. $\mathbf{J}$ kümesi üzerinde, sırasıyla, ek alma dönüşümü, iz form ve norm form tanımlanacak ve bazı cebirsel sonuçlar elde edilecektir. Bu sonuçlar yardımıyla $\mathbf{J}$ kümesi üzerinde bir m. dereceden cebir yapısı kurulmuş olacaktır.

Tanım 3.1. ${}^{\#}:\mathbf{J}\to\mathbf{J}$ için $X \to X^{\#} = Ek(X) = Adj(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *ek* (*adjoint*) *alma dönüşümü*, $X^{\#}$ e de X matrisinin *eki* (*adjointi*) denir.

Böylece, herhangi $X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & x_0 & x_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{J}$ için

$m \geq 3$ için $X_{00} = (x_0)^{m-3}\left(x_0{}^2\right)$ (3.1)

$m \geq 3$ için $X_{10} = (x_0)^{m-3}(-x_1x_0)$,

$2 \leq i \leq m-1$ için

$$X_{i0} = x_0^{m-(i+1)} \left[\begin{array}{l} (-1)^i (x_1)^i + (-1)^{i+1}\left(\dfrac{(i-1)!}{(i-2)!1!}(x_1)^{i-2}\, x_2 \right) x_0 + \\ (-1)^{i+2}\left(\dfrac{(i-2)!}{(i-3)!1!}(x_1)^{i-3}\, x_3 + \dfrac{(i-2)!}{(i-4)!2!}(x_1)^{i-4}\, x_2^2 \right) x_0^2 + \\ (-1)^{i+3}\left(\dfrac{(i-3)!}{(i-4)!1!}(x_1)^{i-4}\, x_4 + \dfrac{(i-3)!}{(i-5)!1!1!}(x_1)^{i-5}\, x_2x_3 + \dfrac{(i-3)!}{(i-6)!3!}(x_1)^{i-6}\, x_2^3 \right) x_0^3 + \\ \vdots \\ +(-1)^{i+(i-3)}\left(\sum\limits_{\substack{r+s+t=i \\ r\neq s\neq t}} \left(\dfrac{3!}{1!1!1!}\right) x_r x_s x_t + \sum\limits_{\substack{2s+t=i \\ r=s\neq t}} \left(\dfrac{3!}{2!1!}\right) x_s^2 x_t + \sum\limits_{\substack{3r=i \\ r=s=t}} \left(\dfrac{3!}{3!}\right) x_r^3 \right) (x_0)^{i-3} + \\ (-1)^{i+(i-2)}\left(\sum\limits_{\substack{j+k=i \\ j\neq k}} \left(\dfrac{2!}{1!1!}\right) x_j x_k + \sum\limits_{\substack{2j=i \\ j=k}} \left(\dfrac{2!}{2!}\right) (x_j)^2 \right) (x_0)^{i-2} + \\ (-1)^{i+(i-2)} (x_i)(x_0)^{i-1} \end{array} \right]$$

olmak üzere $X^{\#}=adj(X)=\begin{bmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{20} & \cdots & \cdots & \cdots & X_{(m-2)0} & X_{(m-1)0} \\ 0 & X_{00} & X_{10} & X_{20} & \cdots & \cdots & X_{(m-3)1} & X_{(m-2)0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & X_{20} \\ \vdots & & & & & & \ddots\ X_{00} & X_{10} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X_{00} \end{bmatrix}\in \mathbf{J}$

olduğu görülür. Burada, $\alpha\in\mathrm{F}$ için $(\alpha X)^{\#}=\alpha^{(m-1)}X^{\#}$ olduğuna dikkat ediniz. Yani, adjoint alma dönüşümü $(m-1)$. dereceden homojen bir fonksiyondur. Üstelik $\mathbf{J}$ nin herhangi $X_1,X_2,...,X_{m-1}$ elemanları ve $H\subseteq\{1,2,3,...,m-1\}$ için $\mathbf{J}^{m-1}$ den $\mathbf{J}$ ye

$$Q(X_1,X_2,...,X_{m-1})=X_1\times X_2\times\cdots\times X_{m-1}:=\frac{1}{(m-1)!}\left(\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{(m-1)-k}\sum_{\substack{H,\\ |H|=k}}(S_H)^{\#}\right),\ S_H:=\sum_{i\in H}x_i \qquad (3.2)$$

biçiminde bir $(m-1)$-li işlem tanımlansın. Burada, $Q(X,X,...,X)=X\times X\times\cdots\times X=X^{\#}$ olacağına dikkat ediniz.

$Q(X_1,X_2,...,X_{m-1})$, $\mathbf{J}$ üzerinde bir simetrik ve $(m-1)$- lineer dönüşümdür. Böylece, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.2. $^{\#}$ ek alma dönüşümü $\mathbf{J}$ üzerinde bir $(m-1)$. dereceden dönüşümdür.

Şimdi, $Q(X_1,X_2,...,X_{m-1})$ olarak tanımlanan dönüşüm ile ilgili bazı sonuçlar vermek istiyoruz:

$\mathbf{J}$ nin herhangi $X_1, X_2,...,X_{m-1}$ elemanları verilsin ve $X_1, X_2,...,X_{m-1}$ matrislerinin esas köşegen üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10},x_{20},...,x_{(m-1)0}$ olsun. (3.2) de $m=3$ alınırsa $^{\#}$ dönüşümü kuadratik bir dönüşüm olmak üzere $X_1\times X_2=\frac{1}{2}\left[(X_1+X_2)^{\#}-X_1^{\#}-X_2^{\#}\right]$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları $\frac{1}{2}\left[(x_{10}+x_{20})^2-(x_{10})^2-(x_{20})^2\right]=\frac{1}{2}2x_{10}x_{20}=x_{10}x_{20}$ olarak, $m=4$ alınırsa $^{\#}$ dönüşümü kübik bir dönüşüm olmak üzere $X_1\times X_2\times X_3=\frac{1}{6}\left[(X_1+X_2+X_3)^{\#}-(X_1+X_2)^{\#}-(X_1+X_3)^{\#}-(X_2+X_3)^{\#}+X_1^{\#}+X_2^{\#}+X_3^{\#}\right]$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanları

$$\frac{1}{6}\left[(x_{10}+x_{20}+x_{30})^3-(x_{10}+x_{20})^3-(x_{10}+x_{30})^3-(x_{20}+x_{30})^3+(x_{10})^3+(x_{20})^3+(x_{30})^3\right]$$

biçiminde olup burada gerekli sadeleşmeler yapılırsa $\frac{1}{6}6x_{10}x_{20}x_{30}=x_{10}x_{20}x_{30}$ olarak elde edilir. $m=5$ için $X_1\times X_2\times X_3\times X_4$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanların

$\frac{1}{24}24x_{10}x_{20}x_{30}x_{40} = x_{10}x_{20}x_{30}x_{40}$ olacağı görülebilir. Tümevarım ile $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{m-1}$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanlarının $x_{10}x_{20}x_{30}\cdots x_{(m-1)0}$ olacağı sonucuna varılır. Bu durumda, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Sonuç 3.3. $\mathbf{J}$ nin herhangi $X_1,\ X_2,...,X_{m-1}$ elemanları verilsin ve $X_1,\ X_2,...,X_{m-1}$ matrislerinin esas köşegen üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10}, x_{20},...,x_{(m-1)0}$ olsun. Bu takdirde $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{m-1}$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanları $x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}$ dır.

Tanım 3.4. $T:\mathbf{J} \to \mathrm{F}$ için $X \to T(X) = iz(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *iz form,* $T(X)$ e de X matrisinin *izi* denir.

Bu tanıma göre, $X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & x_0 & x_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{J}$ için $T(X) = m(x_0)$ olur.

Teorem 3.5. T iz formu lineerdir.

İspat: İspatı, kolayca elde edilebilir.

Tanım 3.6. $N:\mathbf{J} \to \mathrm{F}$ için $X \to N(X) = \det(X)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme *norm form,* $N(X)$ e de X matrisinin *determinantı* denir.

Teorem 3.7. Her $X, Y \in \mathbf{J}$ için $N(XY) = N(X)N(Y)$ dir (yani, norm form çarpımsaldır).

İspat: $N(XY) = \det(XY) = \det(X)\det(Y) = N(X)N(Y)$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Herhangi bir $X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & x_0 & x_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbf{J}$ için $N(X) = (x_0)^m$ dir. Ayrıca, $\alpha \in \mathrm{F}$ için

$N(\alpha X) = \alpha^m N(X)$ olduğuna dikkat ediniz. Bu sebeple, N dönüşümü m. dereceden homojen bir fonksiyondur. Üstelik, $\mathbf{J}$ nin herhangi $X_1,\ X_2,...,X_m$ elemanları ve $H \subseteq \{1,2,3,...,m\}$ için $\mathbf{J}^m$ den F ye

$$N\left(X_1,\, X_2,\ldots,X_{m-1},X_m\right)=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}\left(-1\right)^{m-k}\sum_{\substack{H,\\ |H|=k}}N\left(S_H\right),\; S_H:=\sum_{i\in H}x_i \tag{3.3}$$

olarak tanımlanan dönüşüm **J** üzerinde bir simetrik ve m-lineer dönüşümdür. Şimdi, bu dönüşüm hakkında bazı sonuçlar vermek istiyoruz:

$X_1,\, X_2,\ldots,X_m$ matrislerinin esas köşegen üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10},x_{20},\ldots,x_{m0}$ olmak üzere (3.3) de $m=2$ alınırsa, $N\left(X_1,X_2\right)=\frac{1}{2}\left[N\left(X_1+X_2\right)-N\left(X_1\right)-N\left(X_2\right)\right]$ eşitliğinden $N\left(X_1,X_2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(x_{10}+x_{20}\right)^2-\left(x_{10}\right)^2-\left(x_{20}\right)^2\right]=x_{10}x_{20}\in \mathrm{F}$ ve $m=3$ alınırsa

$$N\left(X_1,X_2,X_3\right)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}N\left(X_1+X_2+X_3\right)-N\left(X_1+X_2\right)-N\left(X_1+X_3\right)\\ -N\left(X_2+X_3\right)+N\left(X_1\right)+N\left(X_2\right)+N\left(X_3\right)\end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$N\left(X_1,X_2,X_3\right)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}\left(x_{10}+x_{20}+x_{30}\right)^3-\left(x_{10}+x_{20}\right)^3-\left(x_{10}+x_{30}\right)^3\\ -\left(x_{20}+x_{30}\right)^3+\left(x_{10}\right)^3+\left(x_{20}\right)^3+\left(x_{30}\right)^3\end{bmatrix}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $N\left(X_1,X_2,X_3\right)=x_{10}x_{20}x_{30}\in \mathrm{F}$ bulunur. Böyle devam edilerek, tümevarımdan, $N\left(X_1,X_2,X_3,\ldots,X_m\right)=x_{10}x_{20}x_{30}\cdots x_{m0}\in \mathrm{F}$ olacağı açıktır. Böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.8. $N:\mathbf{J}^m\to \mathrm{F}$ dönüşümü $N\left(X_1,\, X_2,\ldots,X_{m-1},X_m\right)=x_{10}x_{20}\cdots x_{m0}\in \mathrm{F}$ özelliğinde bir m. dereceden formdur.

Tanım 3.9. $X\to T\left(X\right)=iz(X)$ lineer fonksiyonu yardımıyla $\mathbf{J}\times\mathbf{J}$ den F ye

$$\left(X_1,X_2\right)\to T\left(X_1,X_2\right):=T\left(X_1X_2\right)=iz(X_1X_2)$$

biçiminde tanımlanan T dönüşümüne *jenerik iz form* adı verilir.

Sonuç 3.10. **J** nin herhangi $X_1,\, X_2$ elemanları verilsin ve X_1,X_2 matrislerinin esas köşegeni üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10},\, x_{20}$ olsun. Bu takdirde, $T\left(X_1,X_2\right)=m\left(x_{10}x_{20}\right)$'dir.

İspat: **J** deki çarpma işlemi dikkate alınırsa X_1X_2 matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanların $x_{10}x_{20}$ biçiminde olacağı açıktır. Dolayısıyla $T\left(X_1,X_2\right)=T\left(X_1X_2\right)=m\left(x_{10}x_{20}\right)$ olur.

Sonuç 3.11. T jenerik iz formu simetriktir.

İspat: Sonuç 3.10 yardımıyla $T\left(X_2,X_1\right)=T\left(X_2X_1\right)=m\left(x_{20}x_{10}\right)=m\left(x_{10}x_{20}\right)=T\left(X_1,X_2\right)$'dir.

Teorem 3.12. **J** nin herhangi $X_1,\, X_2,\ldots,X_m$ elemanları verilsin. Bu takdirde, $mN\left(X_1,\, X_2,\ldots,X_{m-1},X_m\right)=T(X_1\times\left(X_2\times\cdots\times X_{m-1}\right),X_m)$ dir.

İspat: $X_1, X_2, \ldots, X_m$ matrislerinin esas köşegeni üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}$ olsun. Teorem 3.8 den $N\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m\right) = x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}x_{m0}$ dir. Hipotezdeki eşitliğin sağ tarafındaki $X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)$ matrisinin esas köşegen üzerindeki elemanlarının $x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}$ olduğu Sonuç 3.3 den açıktır. Üstelik, Tanım 3.9 dan $T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m) = T(\left[X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)\right] X_m)$ yazılabilir ki Sonuç 3.10 yardımıyla $\left[X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)\right] X_m$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlarının $\left(x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}\right)x_{m0}$ olduğunu kolayca görülebilir. Böylece, $T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m) = m\left[\left(x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}\right)x_{m0}\right]$ bulunmuş olur. Buradan $T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m) = mN\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m\right)$ sonucuna varılmış olur.

Teorem 3.12 de $m = 3$ seçilirse Tanım 2.13 ün 3. şartı yardımıyla $3N\left(x, x, y\right) = N\left(x, y\right)$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.13. **J** nin herhangi $X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}$ elemanları verilsin. Bu takdirde, $T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m) = T(X_1, \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right) \times X_m)$ dir.

İspat: Teorem 3.12 den $N\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m\right) = \dfrac{1}{m}T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m)$ ve N de X_1 ile X_m bileşenlerinin yerleri değiştirerek yine Teorem 3.12 $N\left(X_m,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, X_1\right) = \dfrac{1}{m}T(X_m \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_1)$ eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda N simetrik olduğundan her iki eşitliğin sağ tarafındaki terimler birbirine eşittir, yani $m \neq 0$ olduğundan $T(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_m) = T(X_m \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_1)$ dir. Bu eşitliğin sağ tarafında T nin simetrik bir dönüşüm olduğu kullanılırsa $T(X_m \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), X_1) = T(X_1, X_m \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right))$ elde edilir. Son eşitliğin sağ tarafında $\times$ işleminin simetrik olduğu kullanılırsa $T(X_1, X_m \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)) = T(X_1, \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right) \times X_m)$ bulunur. Böylece istenen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.13 deki eşitliğe T nin birleşme özelliği de denir.

Sonuç 3.14. $X_1, X_2, \ldots, X_{m-1} \in \mathbf{J}$ matrislerinin esas köşegeni üzerindeki elemanları, sırasıyla, $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{(m-1)0}$ olsun. Bu takdirde, $T\left(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)\right) = m\left(x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}\right)$ dir.

İspat: Bu sonucun ispatı Sonuç 3.3 den açıktır. Buradaki ispat, Teorem 3.12 ve Tanım 3.9 yardımıyla verilecektir. $N\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, X_m\right)$ de X_m yerine I_m birim matrisi alınırsa, $N\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, I_m\right) = \dfrac{1}{m}T\left(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right), I_m\right) = \dfrac{1}{m}T\left(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)\right)$ olup bu eşitlikten $T\left(X_1 \times \left(X_2 \times \cdots \times X_{m-1}\right)\right) = mN\left(X_1,\ X_2, \ldots, X_{m-1}, I_m\right) = m\left(x_{10}x_{20}\cdots x_{(m-1)0}1\right)$ elde edilir.

Sonuç 3.15. $X_1 \in \mathbf{J}$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanı x_{10} ve $^{\#}$ dönüşümü $(m-1)$. dereceden bir dönüşüm olmak üzere olmak üzere $T\left(X_1^{\#}\right) = m\left(x_{10}\right)^{m-1}$ dir.

İspat: İspat için Sonuç 3.14 de $X_{m-1} = \cdots = X_2 = X_1$ seçilmesi yeterlidir. Böylece, $T\left(\underbrace{X_1 \times X_1 \times \cdots \times X_1}_{m-1 \text{ tane}}\right) = T\left(X_1^{\#}\right) = m\left(x_{10}x_{10}\cdots x_{10}\right) = m\left(x_{10}\right)^{m-1}$ elde edilir.

Sonuç 3.16. $X_1 \in \mathbf{J}$ için $N\left(X_1^{\#}\right) = \left[N\left(X_1\right)\right]^{m-1}$ dir.

İspat: (3.1) yardımıyla ve X yerine X_1 alarak (yani $x_0 = x_{10}$),
$N\left(X_1^{\#}\right) = \left(X_{00}\right)^m = \left[\left(x_{10}\right)^{m-3}\left(x_{10}{}^2\right)\right]^m = \left[\left(x_{10}\right)^{m-1}\right]^m = \left[\left(x_{10}\right)^m\right]^{m-1} = \left[N\left(X_1\right)\right]^{m-1}$ olduğu görülür.

Teorem 3.17. $X \in \mathbf{J}$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanı x_0 olmak üzere $\frac{1}{\left(m^{m-2}-1\right)}\left[\left(T\left(X\right)\right)^{m-1} - T\left(X^{m-1}\right)\right] = T\left(X^{\#}\right)$ dir.

İspat: $\left(T\left(X\right)\right)^{m-1} = \left(mx_0\right)^{m-1}$ ve $T\left(X^{m-1}\right) = T\left(\underbrace{XX\cdots X}_{m-1 \text{ tane}}\right) = T\left(X, X, \ldots, X\right) = m\left(x_0\right)^{m-1}$ eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa
$\left(T\left(X\right)\right)^{m-1} - T\left(X^{m-1}\right) = \left(mx_0\right)^{m-1} - m\left(x_0\right)^{m-1} = \left(m^{m-1} - m\right)\left(x_0\right)^{m-1} = m\left(m^{m-2}-1\right)\left(x_0\right)^{m-1}$ elde edilir. $T\left(X^{\#}\right) = m\left(x_0\right)^{m-1}$ olduğundan $\frac{1}{\left(m^{m-2}-1\right)}\left[\left(T\left(X\right)\right)^{m-1} - T\left(X^{m-1}\right)\right] = T\left(X^{\#}\right)$ bulunur.

[10, s.158] de, N dönüşümü X_1 de $(m-1)$. dereceden ve X_2 de lineer olan bir dönüşüm olmak üzere $X_2 \to N_{m-1,1}\left(X_1, X_2\right)$ bir lineer dönüşüm ve T 2-lineer formu non-dejenere iken $N_{m-1,1}\left(X_1, X_2\right) = T\left(X_1^{\#}, X_2\right)$ olacak biçimde bir tek $X_1^{\#} \in \mathbf{J}$ var olduğu belirtilmektedir. Şimdi, benzer özellikte olan bu çalıştığımız dönüşümler için bu sonucu buraya uyarlamak istiyoruz. Şayet, $mN\left(\underbrace{X_1, X_1, \ldots, X_1}_{m-1 \text{ tane}}, X_2\right)$ yerine $N_{m-1,1}\left(X_1, X_2\right)$ alırsak Teorem 3.12 nin bir özel durumu aşağıdaki biçimde bir sonuç olarak ifade edilebilir.

Sonuç 3.18. $X_1, X_2 \in \mathbf{J}$ matrisleri için $T(X_1^{\#}, X_2) = N_{m-1,1}\left(X_1, X_2\right)$ dir.

İspat: Teorem 3.12 de X_m yerine X_2 ve diğerleri X_1 olarak seçilirse $T(X_1 \times \left(X_1 \times \cdots \times X_1\right), X_2) = mN\left(X_1, X_1, \ldots, X_1, X_2\right)$ eşitliği bulunur. Buradan, $T(X_1^{\#}, X_2) = mN\left(X_1, X_1, \ldots, X_1, X_2\right) = N_{m-1,1}\left(X_1, X_2\right)$ sonucuna varılır.

Sonuç 3.19. $X_1 \in \mathbf{J}$ için $T\left(X_1^{\#}, 1\right) = T\left(X_1^{\#}\right)$ dir.

İspat: $1 = I_m$ olmak üzere Tanım 3.9 dan $T\left(X_1^{\#}, I_m\right) = T\left(X_1^{\#} I_m\right) = T\left(X_1^{\#}\right)$ elde edilir.

Şimdi, $XX^{\#}$ çarpımını hesaplayalım:

$$XX^{\#}=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & x_2 \\ \vdots & & & \ddots & x_0 & x_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{20} & \cdots & \cdots & \cdots & X_{(m-2)0} & X_{(m-1)0} \\ 0 & X_{00} & X_{10} & X_{20} & \cdots & \cdots & X_{(m-3)1} & X_{(m-2)0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & X_{20} \\ \vdots & & & & & & X_{00} & X_{10} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & X_{00} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_0X_{00} & \left(x_0X_{10}+x_1X_{00}\right) & \cdots & \cdots & \left(x_0X_{(m-1)0}+x_1X_{(m-2)0}+\cdots+x_{m-2}X_{10}+x_{m-1}X_{00}\right) \\ 0 & x_0X_{00} & \left(x_0X_{10}+x_1X_{00}\right) & \cdots & y_{m-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & y_2 \\ \vdots & & \ddots & x_0X_{00} & \left(x_0X_{10}+x_1X_{00}\right) \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 & x_0X_{00} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_0\left(x_0\right)^{m-3}\left(x_0{}^2\right) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_0\left(x_0\right)^{m-3}\left(x_0{}^2\right) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & x_0\left(x_0\right)^{m-3}\left(x_0{}^2\right) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & x_0\left(x_0\right)^{m-3}\left(x_0{}^2\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(x_0\right)^m & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \left(x_0\right)^m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \left(x_0\right)^m & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \left(x_0\right)^m \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \det(X) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \det(X) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \det(X) & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \det(X) \end{bmatrix}=\det(X)\,I_m$$

elde ederiz. Böylece, aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.20. $X\in\mathbf{J}$ için $XX^{\#}=X^{\#}X=\det\left(X\right)=N\left(X\right)$ dir.

[22, Lemma 11.13 (b)] de, $\left(X^{\#}\right)^{\#}=N\left(X\right)^{m-2}X$ olarak verilen sonucun burada geçerli olduğunu belirtmekle yetiniyoruz. Ayrıca, $1:=I_m$ olmak üzere $N\left(1\right)=1$ ve $1^{\#}=1$ olduğunu görmek de çok kolaydır.

Böylece bir M $R-$modülü üzerinde Tanım 2.13 de verilen kübik cebir tanımını, aşağıdaki tanım yardımıyla genelleştirebiliriz:

Tanım 3.21. M, birimi 1 olan bir R-modül olsun. M üzerinde $X \to X^{\#}$ biçiminde bir $(m-1)$. dereceden dönüşüm, M üzerinde m. dereceden bir N form ve M üzerinde simetrik 2-lineer bir T dönüşümü tanımlansın. Eğer M üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa M ye bir *m. dereceden $R-$ cebir* denir:

1) $\left(X^{\#}\right)^{\#} = N(X)^{m-2} X$ dir.

2) $N(1) = 1$ dir.

3) $T(X_1^{\#}, X_2) = N_{m-1,1}(X_1, X_2)$ dir (Bu durumda N dönüşümü X_1 de $(m-1)$. dereceden ve X_2 de 1. dereceden bir dönüşüm olarak tanımlanır.).

4) $1^{\#} = 1$ dir.

5) $H \subseteq \{1,2,3,...,m-1\}$ ve $S_H := \sum_{i\in H} x_i$ için $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{(m-1)-k}\sum_{\substack{H,\\ |H|=k}}\left(S_H\right)^{\#}\right)$ dir.

m. dereceden $R-$cebirin bir $(m-1)$. dereceden bir Jordan cebiri ya da başka bir cebir olmasıyla ilgili önce gerekli olan bağıntı belirlenmeli ve daha sonra Tanım 2.13 5) deki diğer ifadelerin buradaki karşılıkları yazılmalıdır. Mesela, $m=3$ iken bir kübik cebirin bir kuadratik Jordan cebiri olması $U_X Y = T(X,Y)X - 2\left(X^{\#} \times Y\right)$ bağıntısı ile verilmişti ve bu bağıntı da $X=1$ alınarak $U_1 Y = Y$ ve $T(Y) = T(Y,1)$ ($m=3$ iken Tanım 3.9 daki jenerik iz formun özelliği) oldukları kullanılarak $1 \times Y = \frac{1}{2}\left[T(Y)1 - Y\right]$ eşitliği elde edilmiştir.

4. Sonuç

Bu çalışmada, $m=3$ durumu için kübik cebir olarak ifade edilen bir kavramın $m>3$ için m. dereceden bir cebir tanımına nasıl genişletileceği gösterilmiştir. Bu genelleştirmeyi yapabilmek için özel bir matris cebirinden faydalanılmıştır. Bu matris cebiri üzerinde bir norm form (bir matrisin determinantı), bir iz form (bir matrisin izi) ve bir ek alma dönüşümü (bir matrisin adjointi) tanımlanmış ve bu dönüşümler yardımıyla bu matris cebirinin bir m. dereceden cebir yapısına sahip olması için gerekli şartlar tespit edilmiştir.

Kaynaklar

[1] Hughes D.R., Piper F.C. 1973. *Projective Planes*, Springer-Verlag, New York.

[2] Baker C.A., Lane N.D., Lorimer J.W. 1991. A coordinatization for Moufang-Klingenberg Planes. Simon Stevin, 65: 3-22.

[3] Bix R. 1980. Octonion planes over local rings, Trans. Amer. Math. Soc., 261 (2): 417-438.

[4] Jordan P. 1949. Über Eine Nicht-Desarguessche Ebene Projektive Geometrie, Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg, 16: 74-76.

[5] Jacobson N. 1968. *Structure and Representations of Jordan Algebras*, Colloq. Publ., 39, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[6] Jacobson N. 1969. *Lectures on Quadratic Jordan Algebras*, Lecture Notes. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[7] McCrimmon K. 1969. The Freudenthal-Springer-Tits Constructions of Exceptional Jordan Algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 139: 495-510.

[8] Faulkner J.R. 1970. *Octonion planes defined by quadratic Jordan algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., 104.

[9] McCrimmon K. 2004. *A Taste of Jordan Algebras*, Springer, New York.

[10] Jukl M. 1993. Linear forms on free modules over certain local rings. Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math., 32: 49-62.

[11] Jukl M. 1995. Grassmann formula for certain type of modules, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math., 34: 69-74.

[12] Erdogan F.O., Ciftci S., Akpınar A. 2016. On Modules over Local Rings. Analele Univ. "Ovidius" din Constanta, Math Series, 24 (1): 217-230.

[13] Ciftci S., Erdogan F.O. 2017. On projective coordinate spaces. Filomat, 31 (4): 941-952.

[14] Beachy J.A. 1999. *Introductory Lectures on Rings and Modules*, London Mathematical Society Student Texts 47, Cambridge Univ. Press, UK.

[15] Blyth T.S., Robertson E.F. 2002. *Further Linear Algebra*, Springer, UK.

[16] Çiftçi S. 2015. *Lineer Cebir*, Dora Basın Yayın Dağıtım, Bursa.

[17] Elman R., Karpenko N., Merkurjev A. 2008. *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms*. Amer. Math. Soc., Colloguium Publications, 56.

[18] Malik D.S., Mordeson J.M., Sen M.K. 1997. *Fundementals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill, New York.

[19] McDonald B.R. 1976. *Geometric Algebra over Local Rings*, Marcel Dekker, New York.

[20] Schafer R.D. 1959. On Cubic Forms Permitting Composition. Proc. of the Amer. Math. Soc., 10 (6): 917-925.

[21] Thomas E.G.F. 2014. A Polarization Identity for Multilinear Maps. Indagationes Mathematicae, 25: 468-474.

[22] Faulkner J.R. 2014. *The Role of Nonassociative Algebra in Projective Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, 159, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.