Kula, F. & Ören Vural, D. (2019). Matematik öğretiminde örnekler: Temel tanım, kavram ve yaklaşımlar. *Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19* (2), 569-586.

Makalenin Türü / Article Type : Araştırma Makalesi / Researh Article
Geliş Tarihi / Date Received : 28.05.2018
Kabul Tarihi / Date Accepted : 28.05.2019
Yayın Tarihi / Date Published : 01.07.2019

https://dx.doi.org/10.17240/aibuefd.20xx.xx.xxxxx-xxxxxx

MATEMATİK ÖĞRETİMİNDE ÖRNEKLER: TEMEL TANIM, KAVRAM VE YAKLAŞIMLAR

Fulya KULA[1], Duygu ÖREN VURAL[2]

ÖZ

Matematikte örnek kullanımı ve örneklerin matematik öğretimine katkısı ulusal ve uluslararası alanyazında son yıllarda ilgi gören çalışma başlıklarıdır. Uluslararası alanyazında örneklerle ilgili sınıflandırmalar ve kuramsal çerçeve oluşturma çalışmaları yaygın olarak mevcuttur. Ulusal alanyazında ise örnek kullanımı sınırlı şekilde incelenmektedir. Bu çalışmada örnek kullanımının matematikte ve matematik öğretimindeki tarihsel gelişimi ve pedagojik sınıflandırma çalışmaları incelenmiştir. Ayrıca matematikte örnekler ile ilgili geliştirilen kuramsal çerçeveler derlenmiş ve konu ile ilgili ulusal çalışmalar incelenmiştir. Bu çalışmanın sonuçlarına göre ulusal alanyazında son yirmi yılda konuya olan ilgi artmış olsa da yapılan çalışmaların sınırlı sayıda olduğu ve genellikle ortaöğretim ve lisans seviyelerinde incelendiği belirlenmiştir. İncelenen ulusal çalışmalarda, matematik öğretiminde sınırlı ve zengin olmayan örnek kullanımı dikkat çekicidir. Ayrıca bu çalışmada elde edilen bulgular doğrultusunda ileride yapılacak çalışmalar için kimi önerilerde bulunulmuştur. En temel öneriler ise çalışmaların daha yaygın olarak kitaplarda ve derste zengin örnek kullanımının ve bunun matematik öğrenmeye katkısının incelenmesi ve ilköğretim seviyesinde yapılacak çalışmaların daha yaygınlaştırılmasıdır.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel örnekler, kişisel örnek alanı, alanyazın derlemesi

USE OF EXAMPLES IN MATHEMATICS TEACHING: BASIC DEFINITIONS, CONCEPTS AND APPROACHES

ABSTRACT

The use of examples in mathematics and its contributions to the learning of mathematics has been receiving both international and national attention recently. Mathematical examples are widely studied in the international literature with their classifications or the development and use of theoretical frameworks. However examples were limitedly studied in the national level. This study aims to review the literature of mathematical examples from a historical and pedagogical approach. The various classifications of examples and the theoretical framework are introduced. In addition the national studies conducted about the topic are reviewed to draw an overview about the trends. According to the results of this study, although there has been increased national interest in the subject in the last two decades, it has been determined that the studies carried out are limited and generally examined at secondary and undergraduate levels. The results of the national studies examined point out the finding of the limited and poor use of examples in the teaching contexts. The current study also gives insights for future research. The most basic suggestions are the extensive use of examples in teaching settings and books and the effects on student learning and widespread studies in the primary level.

Keywords: Mathematical examples, personal example space, literature review

[1] *University of Twente, Faculty of Behavioral Management and Social Sciences, f.wassink @utwente.nl* https://orcid.org/0000-0003-0367-1099

[2] *Kocaeli Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, duygu.oren @kocaeli.edu.tr* https://orcid.org/0000-0002-1676-6348

1. GİRİŞ

Örnekler ve örnek kullanımı, bir disiplin olarak matematiğin ve matematik eğitiminin önemli bir parçasıdır. Günlük hayatta ve diğer disiplinlerde de "örnek", "örnek göstermek", "örnek vermek", "örneklendirmek" gibi ifadelerin kullanımı yaygındır. "Örnek" kelimesi matematik eğitiminde ise farklı şekillerde kullanılabilmektedir; problemlerin çalışılmış çözümlerini ifade ederken (Leinhardt, 2001), kavramları açıklamak için veya öğretmen-öğrenci arasındaki anlam birliğinin sağlanması için (örn., Bruner, Goodnow & Austin, 1956; Peled & Zaslavsky, 1997; Tall & Vinner, 1981) örnekler kullanılabilir.

Matematiksel örnek terimi kavram, ilke ve belirli tekniklerin kullanımını gösteren çözümlü sorular veya bir tekniğin nasıl uygulandığını gösteren çalışma soruları olarak tanımlanmaktadır (Watson & Mason, 2004). Örnekler ilişkilerin sezilmesi, tümevarımsal muhakeme, kavram ve kuralların gösterimi gibi genellemede hammadde olarak kullanılabilen her şeyi içerir (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006). *Örnekleme* (exemplification) ise öğrenenlerin dikkatini genel bir sınıfı temsil eden özel bir duruma yönelten bağlamlar olarak tanımlanmıştır (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006). Matematikteki her türlü uğraşta örnek kullanımı yer almaktadır. Karmaşık işlemlerdeki yöntemlerin gösterimi, kavram edinimi, açıklamalar ve ispatlardaki örnek kullanımı matematiğin doğasını anlamayı sağlar. Tarih boyunca matematiğin bir disiplin olarak gelişimi ve matematik öğretimi yine örneklerle şekillenmiştir. Örnek kullanımı sadece matematiğin tamamlayıcı bir parçası olarak kalmamış aynı zamanda matematik eğitimine de büyük katkılar sağlamıştır. Dolayısıyla örnekler, birçok matematik eğitimi teorisinde de yer almıştır (Bills vd., 2006).

Örnekler ile ilgili uluslararası alanyazında yapılan çalışmalarda örneklerin nasıl sınıflandırıldığı (örn., genel örnekler, örnek olmayanlar, karşıt örnekler, sınır örnekler, vb.) ve örneklerin teorik olarak tanımlanması (örn., Mason & Watson, 2008; Watson & Mason, 2005) ile ilgili teorik çalışmalara rastlanmaktadır. Bununla birlikte, alanyazındaki bu çalışmalarda örnek türlerinin kesin ve net sınırlar ile ayrılmadığı görülmektedir (Bills vd., 2006; Gray & Tall, 1994). Matematikte örnek kullanımı ile ilgili kimi uluslararası çalışmaların ise, öğretmenlerin örnek seçimleri (örn., Charles, 1980; Zaslavsky & Zodik, 2007; Zodik & Zaslavsky, 2008), öğrenciler tarafından oluşturulan örnekler (örn.,Watson & Mason, 2005; Zaskis & Chernoff, 2008), kitaplarda bulunan örneklerin incelenmesi (örn., Sun, 2011), *kişisel örnek alanı* teorisi ve bu teorinin matematik öğrenmeye katkısı (örn., Fukawa-Connelly & Newton, 2014; Sinclair, Watson, Zazkis & Mason, 2011), matematiksel ispatlarda örnek kullanımı (örn., Balacheff, 1988) gibi konulara odaklandığı görülmektedir. Özellikle son yirmi yılda, araştırmacıların matematik öğretiminde örnek kullanımı konusuna ilgilerinin arttığı görülmektedir (örn., Antonini, Presmeg, Mariotti & Zaslavsky, 2011; Bills & Watson, 2008; Breen, O'Shea & Pfeiffer, 2016; Cook & Fukawa-Conelly, 2015).

Ulusal alanyazında yapılan çalışmalar; matematiksel kavramların ediniminde örnek kullanımı (Ubuz & Kırkpınar, 2000), çoklu temsiller ve kavram görüntüsü (Akkoç, 2006), öğretmen adayları tarafından oluşturulan örnekler (Gökbulut & Ubuz, 2013), ders kitaplarındaki örneklerin incelenmesi (İncikabı & Tjoe, 2013), ispat kavramında örnekler (Aylar, 2014) gibi konulara odaklanmıştır. Bu çalışmalarda örnek kullanımı ile ilgili birbirinden farklı terimlerin kullanıldığı görülmektedir. Örneğin, genel örnekler; generik örnekler (Özkaya, Işık & Konyalıoğlu, 2014), jenerik örnekler (Alkan, Güven & Yılmaz, 2017) ve belirleyici-kapsamlı örnekler (Uğurel, 2010) şeklinde isimlendirilerek kullanılmıştır. Bu durum, uluslararası alanyazına nispeten konuya olan ulusal ilginin nadirliği ile birlikte örneklerle ilgili ortak bir akademik dilin gelişimini olumsuz etkilemektedir. Bunlara ek olarak, örneklerle ilgili kimi alanlarda (örneğin, kişisel örnek alanı teorisi, öğrenme varyasyonu teorisi) ulusal çalışmalara nadiren rastlanması ilgi çekicidir.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışma bir derleme çalışması olup, matematikte örnek kullanımı ile ilgili ortak bir ulusal akademik dilin oluşması, örnek kullanımı ile ilgili kuramsal çerçevelerin doğru anlaşılıp ulusal alanyazında kullanılması ve böylece ortaya çıkan derlemenin ulusal alanyazına katkı sağlaması hedeflenmiştir. Ayrıca bu çalışmanın diğer amacı, matematikte örnek kullanımına dair ulusal çalışmaların incelenip bu konudaki ulusal eğilimlerin belirlenmesidir. Bu çalışmayı yönlendiren araştırma soruları şu şekildedir:

1- Örnekler uluslararası alanyazında nasıl sınıflandırılmıştır?
2- Matematik tarihinde örnek kullanımı nasıl şekillenmiştir?
3- Matematikteki ve matematik öğretimindeki teorilerde örneklerin yeri nedir?
4- Örneklerle ilgili geliştirilen kuramsal çerçeveler nelerdir?
5- Matematik eğitiminde örnek kullanımı ile ilgili ulusal alanyazındaki çalışmalar nasıl bir gelişim göstermektedir?

1.2. Araştırmanın Önemi

Matematik öğretiminde örnek kullanımı oldukça yaygındır. Çeşitli öğretim hedefleri doğrultusunda kullanılan örnekler öğrenmeyi zenginleştirmekte ve güçlendirmektedir. Örneklerin önemi uluslararası alanyazında vurgulanmış, matematikte kullanılan örnekler ile ilgili sınıflandırmalar yapılmış ve örneklerin eğitimde kullanımı ile ilgili gerekli yeni teorik çerçeveler yapılandırılmıştır. Buna rağmen ulusal alanyazında bu sınıflandırmaların ve teorik çerçevelerin kısıtlı şekilde kullanıldığı görülmektedir. Bu eksikliğin belirlenmesi ve giderilmesi için bu çalışma iki boyutlu bir yöntem takip etmektedir. Öncelikle, matematiksel örneklerin tarihsel gelişimi, sınıflandırılması, matematik öğretim teorilerindeki yeri ve örneklere dair geliştirilen kuramsal çerçeve çalışmaları kapsamlı olarak derlenmiştir. İkinci olarak ise ulusal alanyazında, matematikte örnekler ile ilgili yapılan çalışmalar taranmıştır. Böylelikle bu çalışmada, matematik alan eğitiminde örnekler konusunda genel bir çerçeve çizmek ve alandaki eğilimleri belirleyerek ilgili konularda çalışma yürütmek isteyen araştırmacılara ışık tutmak hedeflenmiştir.

2. YÖNTEM

Bu çalışmada matematikte ve matematik öğretiminde örnek kullanımıyla ilgili çalışmaları incelemek için sistematik bir alanyazın inceleme yöntemi kullanılmıştır. Sistematik alanyazın inceleme çalışmaları hem alanın genel bir çerçevesini çizmek hem de alandaki eğilimleri belirleyerek ilgili konularda çalışma yürütmek isteyen araştırmacılara rehberlik etmek amacıyla gerçekleştirilir (Cohen, Manion & Morrison, 2007; Minner, Levy & Century, 2010).

Bu çalışmada alanyazın incelemesi iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada tematik bir yaklaşım ile uluslararası ve ulusal alanyazın taranarak ilgili çalışmalar belirlenmiştir.

Uluslararası alanyazın "examples in mathematics", "exemplification", "examples in mathematics teaching" gibi anahtar kelimeler ve bunların kombinasyonları ile taranmıştır. Elde edilen yayınların derlemeye dahil edilme kriteri, konunun tarihsel gelişimine, örneklerin sınıflandırılmasına, örneklerin matematik öğretim teorilerindeki yerine ve ilgili kuramsal çerçeveye dair bilgiler içermesidir. Bu kriterlere göre elde edilen çalışmalar incelenerek çalışması yapılmış ve tarih boyunca matematikte örnek kullanımı ve örneklerin matematik teorilerindeki yeri, örnekler ile ilgili genel sınıflandırmalar ile teorik çerçeve derlenerek okuyucuya aktarılmıştır.

Ulusal alanyazın taramasında ise "matematikte örnekler", "matematik öğretiminde örnekler", "ispatlarda örnekler", "cebirde örnekler", "kümelerde örnekler", "sayılarda örnekler" ve "fonksiyonlarda örnekler", gibi temel matematiksel kavramlar ve örnek anahtar kelimeleri ve bunların kombinasyonları ile taranmıştır. Anahtar kelimelerin seçiminde matematiksel kavramlar ve örnek terimi bir arada ele alınmıştır. Seçilen matematiksel kavramların ilk ve ortaöğretim seviyesinde öğretilen kavramlar olması gibi bir sınırlama tercih edilmiştir. Bu çalışmada ulaşılabilen tüm ulusal kaynaklar ele alınmıştır. Bu çalışmada en son ulusal alanyazın taraması Nisan 2018 tarihinde yapılmıştır. Ulusal alanyazında ulaşılan çalışmalar, hakemli dergilerde Türkçe veya İngilizce dillerinde yayımlanan makaleler, konferanslarda basılan çalışmalar veya yapılmış tezlerdir. Belirtilen çalışmaların alanyazın taramasına dâhil edilme kriterleri; çalışmanın matematikte örnek kullanımını ele alması ve bir kısmının ya da tamamının Türkiye'de gerçekleşmiş olmasıdır. Ele alınan toplam 19 adet ulusal yayınların tümünün çalışma dili Türkçe ve/veya İngilizce'dir. İncelenen ulusal çalışmanın 2000 ve 2017 yılları arasında yapılmış olduğu görülmektedir.

Alanyazın inceleme çalışmasının ikinci aşamasında ise kriterlere göre belirlenen yayınlar her iki araştırmacı tarafından incelenmiş, araştırma soruları bağlamında incelenerek özetlenmiş, elde edilen bulgular raporlanmıştır.

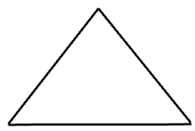
3. BULGULAR

Bu bölümde her bir araştırma sorusuna yönelik bulgular bölümler halinde verilmektedir. İlk bölümde matematiksel örneklerin uluslararası alanyazında nasıl sınıflandırıldığına yer verilmiştir. İkinci bölümde matematik tarihinde örnek kullanımı açıklanırken, üçüncü bölümde matematik ve matematik eğitimi teorilerinde örneklerin nasıl kullanıldığı betimlenmektedir. Dördüncü bölümde matematik eğitiminde örnekler ile ilgili geliştirilen kuramsal çerçeveler ele alınmıştır. Son bölümde ise matematik eğitiminde örnek kullanımını içeren ulusal çalışmalarda sıkça kullanılan metodolojik yaklaşımlar ve bu çalışmalardaki eğilimler incelenmiştir.

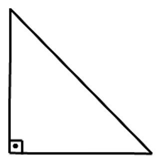
3.1. Örnek Sınıflandırmaları

Matematik öğretiminde örneklere dair en temel ayrım; i) bir kavrama yönelik örnekler (örneğin polinomlar, 3 ile kalansız bölünme, paralelkenar kavramı, vbg.) ve ii) bir yöntemin uygulamasına yönelik örnekler (örneğin bir polinomun köklerini bulmak, bir tamsayının 3 ile kalansız bölünüp bölünmediğini belirlemek, bir paralelkenarın alanını bulma yöntemi, vbg.) olarak belirtilebilir. Bu ayrımı netleştirmek için Sowder (1980) "*örnekler*" ve "*açıklamalar"* (illustrations) tanımlarını yapmıştır. Bu tanımdaki *açıklamalar*, bir yöntemin uygulanmasına yönelik örnekler olarak belirlenmiş ve a) öğretmen, kitap yazarı ya da müfredat yazarının açıklamış olduğu yöntemler ve b) öğrencinin tamamlaması gereken alıştırmalar, şeklinde ikiye ayrılmıştır. Bahsedilen şekilde sınıflandırılan örneklerin kesin ayrımları ve net sınırları hala yoktur. Bu tanıma göre aynı örnek kimi zaman bir süreç (process) kimi zaman ise bir nesne (object) olarak kullanılabilir (Gray & Tall, 1994). Öğretmen ve öğrencilerin kullanılan örnekleri süreç veya nesne olarak aynı doğrultuda algılamaları önemlidir. Örneğin, bir öğretmen lineer fonksiyon örneğini bir süreç olarak anlatmak isterken y=2x+3 fonksiyonundan bahsettiğinde, öğrenci bunu bir eşitliğin grafiğinin çizimi dolayısıyla bir nesne olarak algılayabilir.

Örnekleri daha net sınıflandırmak için üç özel tanımlayıcı sınıf belirlenmiştir: "*genel örnekler*" (*generic examples*), "*karşıt örnekler*" (*counter-example*) ve "*örnek olmayanlar*" (*non-examples*) (Balacheff, 1988; Mason & Pimm, 1984; Michener, 1978; Watson & Mason, 2004). *Genel örnekler* (bu örnek türü için ulusal alanyazında *genel, generik, jenerik, belirleyici-kapsamlı örnek* tanımları ile karşılaşılabilmektedir) genel bir ispatın özüne yönelik ya da bir kavram veya yönteme dair verilen örneklerdir (Michener, 1978). *Genel örnekler* konuya açıklık getirmeyi amaçlamaktadır. Bunlar, bir kavramın ayırt edici bir özelliği üzerinde yapılan işlemlerle bir düşüncenin doğruluk sebeplerini açığa çıkarmaktadır (Balacheff, 1988; Mason & Pimm, 1984). Genel örneklerin kullanım amacı, henüz öğretilmiş olan kavramın anlaşılması için gerekli açıklama veya netleştirmeyi sağlamaktır (Balacheff, 1988). Cebirsel topolojide Mobius şeridi bir genel örnek olarak belirlenmiştir (Zeeman, 1965). Üçgen kavramının tanıtımında Şekil 1'deki gibi bir örnek ikizkenar ya da eşkenar üçgenler gibi kimi üçgenler için geçerli değildir. Şekil 1'deki üçgen ikizkenar veya eşkenar üçgen gibi özel üçgenlerin ayırt edici özelliklerini belirtmediği için genel örnek olarak verilemez. Bunun yanında, dik üçgen kavramı için çizilen Şekil 2'deki üçgen bir genel örnektir.



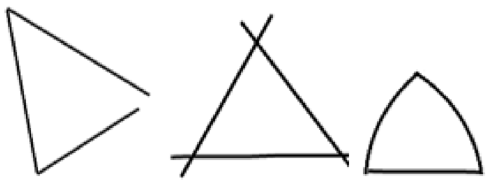
Şekil 1. Üçgen Örneği



Şekil 2. Dik Üçgen için Genel Örnek

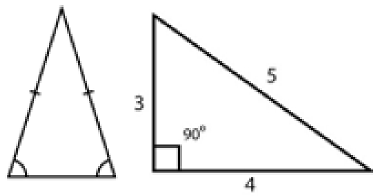
Karşıt örnekler (bu örnekler ulusal alanyazında ters örnek veya zıt örnek olarak da adlandırılmıştır) bir ifadenin, önerme, hipotez, kural veya genellemenin, yanlış olduğunu gösteren örneklerdir (Balacheff, 1988). Örneğin, her sürekli fonksiyonun türevlenebilir olduğu iddiası için mutlak değer fonksiyonu bir karşıt örnek olarak gösterilebilir (Watson & Mason, 2004).

Örnek olmayanlar ise tanımla belirlenmiş sınırları ve işlem yapılabilecek aralığı fark ettiren örneklerdir. Bu örnek türü genellikle bir kavrama ait olduğu düşünülen fakat kavrama örnek teşkil etmeyen örneklerdir. Şekil 3'teki gibi örnekler, üçgen kavramına ait örnek olmayanlardır.



Şekil 3. Üçgenler için Örnek Olmayanlar

Alanyazında bu üç temel tanımlayıcı sınıf dışında farklı örnek sınıflandırmaları da önerilmiştir. Örneğin, başlangıç örnekleri (start-up examples) öğretilen konunun basit ve anlamlı bir resmini çizer (Michener, 1978), bu örneklerden tüm konu ile ilgili kimi genellemeler yapılabilir (Bogomolny, 2006). Açık ve kapalı kümeler konusunda verilen birim daire örneği bir başlangıç örneğidir (Michener, 1978). Referans örnekleri (reference examples) ise kavram, sonuç veya modellerin açıklamaları olan ve tekrar tekrar başvurulan örneklerdir (Michener, 1978). Bunlar temel bir yapıya sahip olan, yaygın olarak uygulanan ve birçok kavram ve sonucun birbirine bağlandığı örneklerdir. Standart üçgenler için verilen ikizkenar üçgen, 3-4-5 üçgeni, 30°-60°-90° üçgeni gibi kimi örnekler referans örnekleri sınıfındadır (Michener, 1978).



Şekil 4. İkizkenar Üçgen ve 3-4-5 Üçgeni için Referans Örnekleri

Bir sınıf nesneyi temsil etmek üzere kullanılan örnekler, özel örnekler (specific examples) olarak adlandırılmıştır (Mason & Pimm, 1984). Özel örnekler genellenebilen ya da genellenemeyen fakat bir kereye mahsus örnekler olarak belirlenmiştir (Edwards, 2011). Özel örnekler diğer örneklere göre nispeten daha az açıklayıcıdırlar (Peled & Zaslavsky, 1997). Kimi örnek tiplerindeki kesin olmayan durumları netleştirmek için kullanılan örnekler ise belirli örnekler (particular examples) olarak tanımlanmıştır (Mason & Pimm, 1984). Örneğin sürekli olup türevlenemeyen mutlak değer fonksiyonu örneği uygun bağlamda belirli örnek olarak kullanılabilir. Alanyazında özel ve belirli örnekler arasındaki farkın çok net olmadığı belirtilmiştir (Edwards, 2011). Sınır örnekleri (boundary examples) ise bütün konuyu temsil etmek için yeterli olmayan, ancak özel durumları gösteren örneklerdir. Bu örnekler kavramın amacı dışında kullanımını engeller niteliktedir (Watson & Mason, 2004). Örneğin sadece monoton artan ya da monoton azalan dizilerle karşılaşan öğrenciler, hiçbir dizinin kendi limit değerine ulaşamayacağını düşünebilirler. Bu durum için verilen {2, 2, 2, ...} gibi dizilerin sınır örnekler olarak kullanımı belirtilen yanılgıyı giderir (Mason & Watson, 2001). Belirtilen örnek sınıflandırmalarının her biri farklı bir işleve sahip olup öğrenmeyi farklı şekillerde etkilemekte ve zenginleştirmektedir.

3.2. Matematik Tarihinde Örneklerin Yeri

Matematikte ve öğretiminde örnek kullanımına oldukça eski kaynaklardan itibaren rastlanmaktadır. Mısır papirüsleri, Babil tabletleri ve Çin el yazmalarından elde edilen ilk matematiksel kayıtlarda, işlem veya kuralları açıklamak için belirli çözümlü problemlerin kullanıldığı görülmektedir (Bell, 1967; Bentley, 2008). Hindistan ve Çin kaynaklarındaki matematik ispatlarında, genel örnek kullanımı standart hale gelmiştir (Burn, 2002). Zenon'un paradoksları yine örnekler yardımı ile ifade edilmiştir (örn., Boyer, 1949). Pisagor teoremine dair rastlanan ilk kaynaklarda ise teoremin çeşitli uygulamalarında örnek kullanımına rastlanmaktadır (Boyer, 1968).

Ortaçağ ve Rönesans dönemi kaynaklarında karşılaşılan algoritmalarda yine örnek kullanımına rastlanmaktadır. Bu kaynaklarda özelden genele örnek kullanımına işaret edilmektedir. Bu kaynaklarda paradokslar açıklanırken çeşitli örnekler kullanılmaktadır. Aynı zamanda örnekler verilerek 'şu şekilde çözünüz:…' (Gillings, 1972) ya da 'aynı yöntemle benzer soruları çözünüz' (Treviso Arithmetic 1478, aktaran Swetz, 1987: s.151) gibi ifadelerin kullanımı dikkat çekicidir (Boyer, 1949). En önemli matematik eserlerinden biri olarak gösterilen Euclid'in Elementler kitabında, yine çeşitli örneklere önemle yer verilmektedir. 16. yüzyıldan itibaren örnekler Avrupalı matematikçilerin metinlerinde de vurgulanmaktadır. Örneğin, Cardano (1545) (aktaran Witmer, 1968) örnek kullanımı ile birlikte teorem, ispat, kanıt gibi uygulamaların daha anlaşılır olduğunu belirtmiştir. Kimi kaynaklarda ise belli bağlamda birkaç örnek verilip, bundan yola çıkarak genel kuralın belirlenebileceği belirtilmiştir (Witmer, 1968). Örneğin, Newton'un çeşitli örneklerden yola çıkarak sonsuz seriler ile ilgili kanıtlar yaptığı bilinmektedir (Boyer, 1968).

Örnekler ilk kez 18. yüzyılda iki temel yaklaşım ile sınıflandırılmıştır. Bu iki yaklaşım analitik ve sentetik olarak adlandırılmıştır (Kant, 1998). Bu yaklaşımların farkı; ilkinde genel kuralın çözümlü örneklerden önce, ikincisinde ise genel kuralın çözümlü örneklerden sonra sunulması ya da hiç sunulmamasıdır. Matematik öğretiminde ayrıca basit örneklerden yola çıkılıp tümevarımsal bir yaklaşım izlenmesi de önerilmiştir (Pestalozzi, Holland, Turner & Cooke, 1898). Kimi kaynaklarda ise öğrencilerin zorlandıkları konularda basit örnek çözümlerinden yardım alınabileceği belirtilmiştir (Colburn, 1826). Kuralların öğretimi için önce konuya özel örnekler vermek bundan sonra genellemelerde bulunmak gibi yöntemler de kullanılmıştır (Spencer, 1878). Örneklerden yola çıkarak matematiksel fikirlerin öğretimi ve tümevarımsal yöntem gibi bilimsel yöntemlerin öğretimi de araştırmacılar tarafından ele alınmıştır (Pólya, 1945; Whitehead, 1911). Bu çalışmalarda kullanılan tümevarımsal ya da tümdengelimli yöntemlerin ikisi de örneklere dayanmaktadır: tümevarımsal yöntemde, öğrenen kimi örnekler üzerinde çalışarak genellemelerde bulunurken, tümdengelimli yöntemde genellemeleri algılayıp uygulamaları örnekler üzerinden yapmaktadır.

19. ve 20. yüzyılların sonlarında ise örnek kullanımının artık pedagojik ilkeler doğrultusunda ele alındığı görülmektedir. Bazı kaynaklarda örneklerin tam ve dikkatli seçiminin, öğrenmeyi garanti ettiği ifade edilmektedir (MacVicar, 1879). Kimi yazarların öğrenmeyi desteklemek için farklı problem çeşitlerini ele aldıkları ya da belirli tekniklerin kazandırılması amacıyla birçok alıştırma örneği kullandıkları görülmektedir (örn., Pólya, 1962; Record, 1632). Matematik eğitimi tarihinde de örnek seçimi ve düzenlenmesinin önemi vurgulanmaktadır.

Örneğin Pólya (1962) basit bir fikir üzerine genellemeler yapmaya yardımcı olan birçok alıştırma dizisi kullanmıştır. Genel örnekler doğrulama yapmak amacıyla kullanılmaktadır (Polya, 1954, 1962). Cardano ve Pólya'nın öğrenenleri kendi örneklerini oluşturmaları konusunda cesaretlendikleri görülmektedir. Aynı amaçla, Polya kitabında belirli bölümlerin sonunda benzer örnekler oluşturulmasını önermektedir (Pólya, 1962). Cardano, kimi zaman genel yöntemin karışıklığa sebep olduğunu ve dolayısıyla açıklamalarda örnek kullanımının önemini belirtmiştir. Açıklamalar için örnek kullanımı fikri yüzyıllar boyunca birçok yazar tarafından öğrenme ve öğretme bağlamlarında benimsenmiştir. Örneğin, Richard Feynman, kendi öğrenmesine atıfta bulunarak, konuya özel örneklerin yardımı olmadan genel kuralı öğrenemediğini belirtmiştir (Feynman, 1985, 1986). Bunun dışında zorlanılan bir problem örneğini temel yapıyı bozmadan alt basamaklarına ayırma stratejisi de önerilmiştir (Courant, 1981). Her teorem için genel örneklerin dikkatlice seçilip incelenmesi gerektiği matematikçiler tarafından belirtilmiştir (Zeeman, 2005). Bununla beraber, Zaskis (2001) öğrenmeye basit olmayan problem durumları ile başlamanın hem öğrenme durumunu basitleştirme hem de özel örneklerden genellemeye daha net ulaşma olanağı sağladığını gözlemlemiştir.

Görüldüğü gibi matematikte ve öğretiminde örnek kullanımı konusunda tarih boyunca çeşitli yaklaşımlar sergilenmiştir. Kimi durumlarda bir dizi halinde örnek kullanımı önemlidir. Örneklerin belirgin olan ve olmayan benzerlikleri ve farklılıkları, sergilenen çeşitlilik ve zorluk seviyesinin artması tümevarımsal öğrenmenin gelişimine destek olarak kullanılmıştır. Kimi diğer durumlarda ise tek bir örnek, genel bir ifade ya da kavramı anlamak için kullanılmış ve tümdengelimli düşünmeyi desteklemiştir. Matematik tarihi genel olarak ele alındığında örnek kullanımının önemli bir yeri olduğu anlaşılmaktadır.

3.3. Teorilerde Matematiksel Örnekler

Örneklerin matematik yapmada ya da teorileri anlama ve üretmede önemi bilinmektedir (Bills vd., 2006; Mason & Watson, 2008). Matematikçiler genellikle farklı görünen birçok durumun temelindeki özü tanımlamaya ya da bulmaya çalışırlar. Böyle durumlardan bütünleştirici yeni bir kavram, ilgili tanım veya teoremler türer. Kimi zaman belirli bir örneğin değişebilen bir özelliği, daha zengin ve bütünleştirici bir kavramı veya teoremlerle belirtilen nesneler sınıfının daha güçlü algısını ortaya çıkarır. Matematikçiler için sadece örneklerin kendisi değil, aynı zamanda örneklerle ne yapıldığı, nasıl soruşturulduğu, genellendiği ve algılandığı önemlidir. Örneklerin matematiksel fikirleri anlamadaki önemi Feynman, Halmos, Hilbert, Polya gibi birçok matematikçi tarafından vurgulanmıştır. İlk anda hemen anlaşılmayan bir açıklamada, yapılacak en doğal ve temel şey özelden geneli gösteren bir örnek oluşturmak ya da hatırlatmaktır (Courant, 1981). Bir varsayım ile karşılaşıldığında alternatif bir karşıt örnek aramak ve genel olarak algılanan bir örneği kullanarak varsayımın neden doğru olduğunu anlamak olağan uygulamalardır (Davis & Hersh, 1981).

Matematik öğretim teorilerinde ve araştırma çalışmalarında örneklerin önemi belirtilmiştir. Kişilerin belirli durumlara örnek oluşturan ve oluşturmayan durumları sezmeleri ile bir kavramı soyutlaştırabilmeleri ya da anlamlandırabilmeleri olgusu, kimi psikoloji (örn., Bruner vd., 1956; Charles 1980, Petty & Jansson 1987; Wilson, 1986, 1990) ve yapay zekâ çalışmalarında da ele alınmıştır (örn., Minsky, 1975; Winston, 1975). Davranışçı bir yaklaşım benimseyen Thorndike (1922) doğru matematiksel *zihinsel zincirler* (*mentalbonds*) oluşturmak için örneklerin önemini vurgulamıştır. Davranışçı yaklaşımı benimseyen kimi araştırmacılar ise Thorndike'ın *zihinsel zincirler* teorisini reddetse de, örneklerin önemini benimsemişlerdir (örn., Skinner 1938). Thorndike örnekleri, öğrenmeye tepki oluşturmak üzere kullanılan uyaranlar olarak ele almıştır (Thorndike, Cobb, Orleans, Symonds, Wald, & Woodyard, 1924). Bu fikir Gagne (1985) tarafından *artan zorluktaki davranış hiyerarşisi* olarak geliştirmiştir. 1960 yılında Dienes, zekice kurgulanmış oyunları ve yapılandırılmış durumları matematiksel yapılara örnekler olarak kullanmıştır (Dienes, 1960). Bu şekilde öğrenenlerin gelişmiş matematiksel kavramları kendi deneyimleri ile algılamaları sağlanmıştır. Öğrenenlerin yeni matematiksel kavramı nasıl anlamlandırdığını araştırmak için tarihsel örnekler (Davis, 1984) ve çözümlü sorular (Anthony, 1994) üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Piaget tarafından ortaya atılan *genetik epistemoloji* teorisi bireylerin kendi dünya deneyimlerini anlamlandırmak için içinde bulundukları sosyal grupta aktif oldukları varsayımına dayanır (Confrey 1991; Evans, 1973; Piaget, 1970). Bu teori, yeni örneklerin var olan zihinsel şemalar üzerindeki etkisini özümseme (assimilation) ve düzenleme (accommodation) kavramları ile açıklamaktadır. Genetik epistemoloji kuramı birçok matematik öğrenme teorisine de dayanak oluşturmuştur. Örneğin, Skemp (1969) örneklerin soyutlanması ile matematiksel kavramların edinildiği fikrini, Piaget'nin bilişsel teorisinde yer alan şema fikri üzerine inşa etmiştir. Skemp'e göre öğrenenlerin matematiği anlamaları için öğretmenin örnek seçimi oldukça önemlidir. Matematiksel bir kavram için temel oluşturmayan örneklerin dikkat çekici özelliklerinin ve örnek olmayanların kullanımı ile kavramın içeriğinin, önemli olan ve olmayan yönlerinin ve dolayısıyla sınırlarının belirtilmesi önerilmektedir. Kavram oluşturulduktan sonra örneklerle zenginleştirilir (Skemp, 1979) ve sonrasında edinilen bu zemin ile daha da gelişmiş bir kavram görüntüsü oluşturulabilir (Tall &Vinner, 1981).

Vinner bir kavramın matematikçiler tarafından benimsenen tanımını ifade eden *kavram tanımı* (concept definition) ve öğrenenlerin *kavram görüntüsü* (*concept image*) arasındaki farka değinmiştir (Vinner, 1983, 1991). Sosyal, psikolojik ve çevresel farklılıklar bireylerin herhangi bir zamanda erişiminin olduğu örnekleri ve *kavram görüntülerini* (Vinner, 1983) etkiler. Kavram görüntüsü öğrencinin bir kavram ile ilgili sahip olduğu tüm nesne, süreç ve şemalarını ifade etmekte ve farklı zihinsel modelleri ve kavram yanılgılarını da içerebilmektedir (Dreyfus, 1991). Kavram görüntüsü birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve örneklerle de ilişkilendirilerek çalışılmıştır (örn., Thompson, 1994). Vinner'a göre kavram görüntüsü karşılaşılan örneklerin keşfi ile kısıtlı olarak kurulmaktadır. Çünkü bu örneklerdeki kavrama özgü olmayan özellikler de kavram görüntüsü içinde yer alır. Bu fikir Fischbein (1987) tarafından *şekilsel kavram* (*figural concepts*) fikri olarak tanıtılmış ve detaylandırılmıştır. Kavram görüntüsü üzerine yapılan birçok çalışmada öğrenenlerin yanlış, alternatif ya da kısmi olarak edindikleri kavramların varlığı belirlenmiştir. Bu çalışmalarda kavram görüntüsü ve kavram tanımı arasındaki keskin fark belirlenmiş ve bu farkın kapatılmasında örneklerin önemi vurgulanmıştır (örn., Moore, 1994; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983).

Matematiksel bilginin kökeni ile öğrenme süreçleri arasında bağlantı kuran çalışmalara göre örnekler süreçlerin genelleştirilmesi ve yeni nesnelerin kavramsallaştırılmasının hammaddesidir. Freudenthal (1983), öğrenenlerin işlevsel anlamadan yapısal anlamaya ve daha sonra somutlaştırmaya giden bir dizi içselleştirme ve özetleme süreçlerinden geçtiklerini belirtmiştir. Bu fikir diğer araştırmacılar tarafından destek görmüştür (örn., Sfard, 1991). İçselleştirme ve özetleme yavaş ve aşamalı ilerleyen süreçlerdir. Araştırmacılara göre bu süreçler, zamanla ve sürekli örneklerle karşılaşma ile edinilir.

Dubinsky ve arkadaşları tarafından ileri sürülen APOS teorisi, Piaget tarafından geliştirilen yansıtıcı soyutlama fikrine dayanmakta ve matematiksel bilginin lisans seviyesindeki gelişimini incelemektedir (aktaran, Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). APOS teorisine göre birey tarafından algılanan nesnelerin işlem basamaklarınca dönüştürülmesi eylem (Action) süreci olarak tanımlanmıştır. Bir eylem tekrarlandığında ve birey bu eylem üzerinde iyice düşündüğünde ve işlemler için artık yol gösterme gibi dış uyaranlara ihtiyaç duymadığında gerçekleşen zihinsel yapı süreç (Process) olarak adlandırılmıştır. Birey bir bütün olarak sürecin farkına varıp süreç üzerinde dönüştürmeler yaptığında nesne (Object) seviyesindedir. Son olarak şema (Schema) seviyesi bireyin belirli bir matematiksel kavrama ait eylem, süreç, nesne ve diğer ilgili şemalarının anlamlı bir bütünü olarak tanımlanmıştır. Bu şekilde özetlenebilen APOS teorisi de örneklerle karşılaşmanın öğrenmedeki önemine değinmektedir. Teoriye göre öğrenenler eylem seviyesinden sürece ve daha sonra nesne aşamasına geçmek için sürekli olarak örneklere ihtiyaç duymaktadırlar (Oktaç & Çetin, 2016).

Pirie ve Kieren (1994) tarafından matematiksel anlamanın gelişimi üzerine geliştirilen soğan modeli (onion model) kişisel görüntü inşası ve açıklamalar üzerine gerçekleştirilen ileri ya da geri çalışmalar üzerine odaklanmıştır. Bu model de örneklerin direkt olarak deneyimlenmesinin önemine değinmiştir. Örneklerin bu şekilde deneyimlenmesinin kişisel görüntülerin ve bilginin oluşturulmasına katkı sağlayacağı belirtilmektedir.

Örneklerle kavram veya süreçler arasındaki ilişki başka bir açıdan da incelenmiştir. Bu eğilim, *genel örnekler*i veya *prototipleri* (*prototype*) merkezi olarak ele almaktadır. Genel örnekler, bir iddianın doğruluğunun, artık kendisini değil de bir sınıfın özelliklerini temsil eden bir nesne üzerindeki işlem ve dönüşümler yardımıyla belirginleştirilmesi olarak tanımlanmıştır (Balacheff, 1988). Freudenthal (1983) bu bağlamdaki örnekleri paradigmalar olarak da açıklamıştır. Kimi psikoloji çalışmalarında, kategorileri temsil eden bu prototiplerin akıl yürütmede nasıl kullanıldığı incelenmiştir (Rosch, 1975). Hershkowitz (1990) çalışmasında matematiksel tanımlar yerine prototiplere odaklanan mantık yürütme eğilimine ve bu durumdan kaynaklanan hatalara değinmiştir. Yapılan çalışmalar öğrenenlerin kavram görüntülerinin genellikle sınırlı sayıdaki prototip örnek ile oluştuğunu göstermiştir (örn., Schwarz & Hershkowitz, 1999). Dolayısıyla öğretimde prototiplerin ötesine geçmek, tipik olmayan örnekler kullanmak, kavramın tanımı ile belirlenen sınırlarını belirtmek önemlidir.

Dreyfus (1991) örneklerin soyutlama sürecindeki rollerini, özellikle belirli bir örneğin öğrenenler tarafından farklı kullanımı ve örnek koleksiyonlarını ele almıştır. Dreyfus'a göre, nispeten gelişmiş bir matematik öğrencisi için bir tanım ve tek bir örnek yeterli olmaktadır. Buna karşın deneyimsiz öğrenenler bir kavramın özelliklerini soyutlamada daha fazla sayıda ve özenle seçilmiş örneklere ihtiyaç duyarlar (Dreyfus, 1991).

3.4. Örnekler ile İlgili Geliştirilen Kuramsal Çerçeveler

Örnek alanı, kişilerin sahip olduğu örnek dağarcığı olarak tanımlanmaktadır. Her an öğrencinin erişiminde bulunan örnekler topluluğu, bu örneklerin zenginliği ve birbirleri ile bağlantıları öğrenilen konunun anlamlandırılması açısından önemli rol oynar (Sinclair vd., 2011). Yapılan çalışmalar öğrencilerin ilk öğrendikleri örneklerden genelleme yapma eğiliminde olduklarını ve yanlış genellemelerin sebebinin eğitimde sınırlı örnek kullanımından kaynaklandığını belirlemiştir (örn., Hershkowitz, 1989; Sierpinski, 1998). Ayrıca, öğretmenlerin sahip olduğu sınırlı örnek alanı, kavramların daha ileri düzeyde yorumlanmasını engellemektedir (Zaslavsky & Peled, 1996).

Matematikte genelleme yapabilmek için tek bir örnek pedagojik olarak yeterli değildir (Dienes, 1960). Verilen genel kuralı yapılandırabilmeleri için öğrenenlere birçok örnek sunulmalıdır. Öğretmen ya da kitap tarafından kullanılan örnekler kümesi Watson ve Mason (2005) tarafından geleneksel örnek alanı (conventional example spaces) olarak tanımlanmıştır. Bu örnek alanı genellikle kitaplarda ve sınıfta sunulur ve sınırlı çeşitlilikte kullanılır. Bununla beraber öğrenenler belirli örnekleri genelin bir temsili olarak algılamayabilir (Goldenberg & Mason, 2008; Mason & Pimm, 1984) veya böyle bir temsil algılansa bile öğrenciler tarafından istenenden çok farklı bir şekilde sınıflandırılabilir (Watson & Mason, 2005). Öğrenciler genellikle uygun genellemeler yapmakta ve olağan örnek alanında sunulan sınırlı örneklerden yola çıkarak kavramları yapılandırmada deneyimsizdirler (Marton ve Tsui, 2004).

Öğrencilerin örnekleri değerlendirme durumları kişisel örnek alanı fikrinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Öğrencilerin kendi kullanımları için tecrübeleri doğrultusunda biriken bir örnek dağarcığına sahip olmaları beklenir. Bu dağarcığa işaret eden kişisel örnek alanı belli bir durum, ileti veya eğilime tepki olarak, erişilebilir olan örnekler olarak tanımlanmaktadır (Watson & Mason, 2005). Kişisel örnek alanı fikri, örnek deneyimlerinin potansiyeli ve sınırlılıkları hakkında farkındalık oluşturan bir araç olarak geliştirilmiştir (Watson & Mason, 2005). Bu fikir farklı yaşlardaki birçok öğrenci, öğretmen, eğitimci, araştırmacı, matematikçiyi dâhil ederek ve çeşitli eğitim ortamlarında oluşturulan örneklerle gelişen bir süreç olmuştur. Bu süreç ilerideki pedagojik çalışmalarda sebep sonuç ilişkilerinin değerlendirilmesi hedefiyle kullanılacak şekilde geliştirilmiştir.

Watson ve Mason (2005) kişisel örnek alanının merkezi, bariz, kolay akla gelen ve tanıdık bir durum ile harekete geçen örnekleri içerdiğini vurgulamışlardır. Bu alan sadece öğrenenler tarafından yapılandırılmış örneklerden oluşan listeler değildir, aynı zamanda belli örnek alanındaki elemanların ve sınıfların birbiriyle ilişkisinin belirlendiği içsel-kendine özgü yapılar barındırır. Bu örnekler belirli öğrenenler için ayrık durumlar olabilirken daha deneyimli bir matematikçi için ilgili ve art arda yapılandırılabilen bir dizi nesnedir. Matematikte edinilen deneyim ile kişisel örnek alanı uygun durum ve sınıflar için tekrar tekrar keşfedilir. Kişisel örnek alanı birikimi ve deneyimi ile bu alanın kullanımında, kendi içindeki yönetiminde ve başka kavramlara uygulanmasında uzmanlaşılır. Öğrencilerin şimdiki durumunu anlamak ve gelişimlerini desteklemek için kişisel örnek alanlarını bilmek önemlidir (Watson & Mason, 2005).

Kişisel örnek alanı fikri iki temel prensibe dayanmaktadır. Bunlardan ilkine göre, matematik öğrenirken kendi örnek alanı ve çeşitli diğer örnek alanları arasındaki ilişkiler keşfedilir, yeniden düzenlenir, akıcı hale gelir ve geliştirilir. İkinci prensip ise örnek alanlarının genişlemesinin, esnek düşünmeye ve yeni kavramların takdir edilip benimsenmesine katkısı olduğunu ifade eder. Kişisel örnek alanı içerik ve yapısal olarak kişiye ve duruma özgüdür; benzer yapıdaki örnek alanlarına farklı şekillerde (cebirsel ve geometrik yaklaşım gibi) ulaşılabilir. Duruma özel örneklerin araştırılması, örneklerin belli özelliklerine odaklanmak için yapılan sınırlamalar ve belli bir sınıfı temsil eden bir örneğin genellenmesi yardımıyla örnek alanları keşfedilip genişletilebilir (Sinclair vd., 2011).

Kişisel örnek alanı kuramsal olarak çeşitli çalışmalarda ele alınmıştır (örn., Alcock & Inglis, 2008 Stylianides & Stylianides, 2009; Watson & Shipman, 2008; Zazkis & Leikin, 2008; Zodik & Zaslavsky, 2008). Bu çalışmalar öğretmen ya da öğrenenlerin kişisel örnek alanlarını öğretimin, öğrenmenin veya ispatlamanın hammaddesi olarak ele almıştır. Bu örnek alanlarının öğrenciler tarafından sorgusuz olarak özümsenmediği Zaskis ve Leikin (2007, 2008) tarafından belirlenmiştir.

Kişisel örnek alanı ve kavram görüntüsü fikirlerinin benzerliği dikkat çekicidir. Kişisel örnek alanı fikri kavram görüntüsü fikrini tamamlar nitelikte iken, kavram görüntüsü fikrinden farklı olarak öğrenmeyi kavramsallaştırma değil, örneklendirme açısından ele almıştır (Sinclair vd., 2011). Kişisel örnek alanı öğrenenler tarafından anlamlandırılan kavramlara değil, gözlenebilir ürünlere odaklanmıştır. Nesneler tek başına herhangi bir örnek teşkil etmezler, bir nesneyi genel durumla ilişkilendirme durumu artık nesneyi bir örnek haline getirir. Dolayısıyla bireyler tarafından bir sınıfın temsili olarak algılanan her durum bir örnek oluşturur (Watson & Mason, 2005). Kavram görüntüsü fikri bu süreci matematiksel kavramlar açısından ele alırken, kişisel örnek alanı bir nesnenin bir sınıf ile ilişkilendirilmesi olarak ele almaktadır. Bununla birlikte kişisel örnek alanındaki zenginlik ile kavram görüntüsü de genişlemektedir. Çeşitli ve zengin örneklerle karşılaşmak ve kişisel örnek alanının zenginliği ile kavramların sınırları, içerikleri ya da diğer kavramlardan farkları idrak edilir. Böyle bir çeşitlilik içerisinde düşünmek hem örneklerin başarıya ulaşmasında hem de anahtar kavramlara ulaşmada önemlidir.

Bunun yanında öğrencilerin ürettiği örnekler (learner generated examples) fikri yine Watson ve Mason tarafından güçlü bir pedagojik araç olarak belirlenmiştir (Watson & Mason, 2005). Öğrenenler genel prensipleri örnekler oluşturarak algılayıp takdir ettiklerinde daha derinlemesine anlamlandırırlar (örn., Dahlberg & Housman, 1997; De Morgan, 1831; Watson & Shipman, 2008). Örnek oluşturmak hem öğrenenlerin genel yapıyı anlayıp önemli noktaları fark etmelerini sağlar hem de araştırmacılara hangi genel prensiplerin kullanıldığı konusunda yardımcı olur. Dolayısıyla öğrencilerin ürettiği örneklerin hem pedagojik olarak hem de araştırmacılar için bir araç olarak kullanılması önerilmiştir (Zazkis & Leikin, 2007). Kişisel örnek alanının sınırlarını öğrencilerin ürettiği örnekler ile belirlemeye çalışmak araştırmacılar için önemlidir. Aynı zamanda kavranması zor alanları belirlemek ve öğrenci deneyimlerini artırmak için yardımcıdır. Kişisel örnek alanı bilişsel bir açıklamadan çok pedagojik yapıdadır ve öğrenmeyi anlamak ve öğretmeyi yönlendirmek için kullanılmaktadır.

Dienes (1963) öğrenenlerin bir kavramı anlamlandırabilmeleri için en az üç örneğin gerekli olduğunu belirtmiştir. Bu bağlamda örnekleri ele alan pedagojik çalışmalar öğrenme varyasyonu teorisini (variation theory of learning) sıkça kullanmıştır (örn., Fukawa-Connelly & Newton, 2014; Goldenberg & Mason, 2008). Bu teoriye göre öğrenme, örnek durumların genişletilmesi ile ortaya çıkar (Marton & Booth, 1997; Marton & Tsui, 2004), diğer bir deyişle varyasyonları kavramak ya da farklarını ayırt etmek öğrenmenin temelini oluşturur (Marton & Booth, 1997; Marton & Trigwell, 2000). Öğrencilerin karşılaştıkları örnek varyasyonunun doğası ve çeşitliliğine göre öğrenmede çeşitli farklılıklar olabilmektedir. Bu durum varyasyon boyutları fikrini ortaya çıkarmıştır (Marton & Booth 1997; Marton, Runesson & Tsui, 2004; Marton & Tsui, 2004). Varyasyon boyutları, bir nesnenin değişebilen farklı parçalarına rağmen bu nesnenin hala belirli kavrama örnek oluşturması anlamında kullanılmaktadır (Mason & Watson, 2008). Bilişsel olarak bir kavrama verilen örnek ancak örneğin belirli özelliklerinin değişebileceği ve kimi diğer özelliklerin nispeten değişmez olduğu kabullenildiğinde örnek olarak kabul edilmektedir (Mason, 2006). Öğrenenler olası varyasyon boyutlarını saptamak için örneklere bağlı kaldıklarından örnekler dikkatle seçilmelidir. Farkı bireyler bir örnekteki farklı varyasyon boyutlarını algılayabilir (Goldenberg & Mason, 2008), veya bir birey farklı zamanlarda farklı boyutları algılayabilir (Goldenberg & Mason, 2008; Mason, 2006; Mason &Watson, 2008).

3.5. Örnek Kullanımı ile İlgili Ulusal Alanyazındaki Çalışmalar

Matematiksel örnekler ve örnek kullanımı ile ilgili yapılan ulusal çalışmalar incelendiğinde, Zaskis ve Leikin (2007) tarafından geliştirilen metodolojik çerçevenin yaygın olarak kullanıldığı görülmektedir. İncelenen çalışmaların daha net olarak anlaşılması amacıyla ilk olarak bahsedilen metodolojik çerçeve açıklanmış, daha sonra ulusal alan yazındaki çalışmalara yer verilmiştir.

Zaskis ve Leikin (2007) tarafından geliştirilen çerçeveye göre örnek alanları; i) *erişebilirlik* ve *doğruluk*, ii) *zenginlik ve iii) genelleştirme* kategorilerine göre değerlendirilmektedir. *Erişebilirlik* ve *doğruluk* kategorisi örneklerin ele alınan bağlama uygunluğu ve oluşturulma zorluğu ile ilgilidir. Örneğin, bir kare tanımının matematiksel olarak mantıklı ve doğru ifadesi veya bu ifade için yaşanılan zorluk seviyesi erişilebilirlik kategorisinde incelenmektedir. Bir karenin "dört kenar uzunluğu eşit olan ve dört adet 90 derecelik açısı olan geometrik şekil" olarak tanımı doğru olsa da eksik kalmaktadır. Böyle bir tanıma uygun fakat kare olmayan bir poligon (örn., altıgen) oluşturulabilir. Dolayısıyla yukarıdaki kare tanımı bu kategori içerisinde yetersiz kalmaktadır. *Zenginlik* kategorisi ise verilen örneklerin çeşitliliği ile ilgilidir. "Bir düzlemde verilen, birbirine dik iki doğrudan her birinden uzaklıklarının maksimumu sabit olan noktaların oluşturduğu geometrik yer" gibi bir kare tanımı zenginlik kategorisini sağlamış bir tanım olarak belirlenmektedir (Zaskis & Leikin, 2007). *Genelleştirme* kategorisinde ise örneklerin genel ya da özel olmalarına odaklanılmaktadır. Bu kategori içinde başarılı bir kare tanımı ise özel bir kare için değil her kare için tanımlanmıştır.

Ulusal alanyazında Zaskin ve Leikin tarafından yukarında bahsedilen metodolojik çerçeveyi kullanan bir çalışma Gökbulut ve Ubuz (2013) tarafından gerçekleştirilmiştir. Gökbulut ve Ubuz (2013) sınıf öğretmeni adaylarının prizma kavramı için oluşturdukları tanım ve örnekleri incelemiştir. Araştırma nitel olarak dört öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Prizma ile ilgili açık uçlu sorularla öğretmen adaylarının verdikleri örnekler incelenmiştir. Örnek kullanımı açısından ele alındığında, öğretmen adaylarının prizma örneklerinin prototip örneklerle sınırlı kaldığı belirlenmiştir. Kimi örneklerde kavram yanılgılarının öğretmen adaylarını yönlendirdiği, zengin olmayan örneklerin kullanıldığı belirlenmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre lisans başarısı örneklendirmede herhangi bir etki göstermemektedir. Araştırmacılar üniversitede verilen geometri derslerinin tanımlama ve örneklendirme açısından tekrar gözden geçirilmesini önermektedir. Aynı çalışmaya paralel olarak Ubuz ve Gökbulut (2015), sınıf öğretmeni adaylarının piramit kavramına ilişkin oluşturdukları tanım ve örnekleri incelemiştir. Dört öğretmen adayı ile nitel olarak gerçekleştirilen çalışmada öğretmen adaylarının daha çok prototip örnekler verme eğilimleri belirlenmiştir.

Akkoç (2006) çalışmasında fonksiyon kavramındaki çoklu temsillerin öğrencilerin zihninde canlandırdığı kavram görüntülerini ele almıştır. Nitel olarak, dokuz lise öğrencisi ile yapılan çalışmanın sonuçlarına göre öğrenciler için fonksiyonlar konusunda küme eşleşmesi diyagramı gibi kısıtlı bir temsil prototip roldedir. Çalışma sonucunda öğretimde farklı ve daha zengin örneklerin kullanımı önerilmektedir. Çalışmada aynı zamanda öğrencilerin grafik ve cebirsel temsilleri özel örneklerle ilişkilendirdiği belirlenmiştir. Öğrencilerin daha zengin kavram görüntüleri edinebilmeleri için farklı örneklere başvurulması gerektiği ifade edilmiştir.

Gükyurt ve Soylu (2016) ortaokul matematik öğretmenlerinin prizma çizebilme, tanımlama ve prizmaya yönelik günlük yaşamdan verdikleri örnekleri incelemek için ortaokullarda görev yapan altı matematik öğretmeni ile çalışmışlardır. Çalışma nitel olarak yürütülmüş ve yine Zazkis ve Leikin (2008) tarafından geliştirilen;

erişilebilirlik, doğruluk, zenginlik ve genelleştirme kategorileri kullanılmıştır. Öğretmenlerin verdikleri cevapların erişilebilirlik açısından kolay verilen cevaplar olduğu, doğruluk açısından, çizimlerin prizma için bütün kritik özellikleri barındırdığı, zenginlik açısından değerlendirildiğinde ise prototip örneklerin kullanıldığı belirlenmiştir. Öğretmenlerin çizimleriyle ilgili alınan görüşlerinde ise prizma ile ilgili açıklamalarının istenen düzeyde olmadığı, prizmanın kritik özelliklerini ifade edemedikleri ve ortaokul ders kitaplarında yer almayan prizma örneklerini çizmedikleri ortaya çıkmıştır.

Duran ve Kaplan (2016) çalışmalarında lise matematik öğretmenlerinin türev konusundaki pedagojik alan bilgilerini, konu alanı bilgisi bağlamında incelemiş ve dört lise matematik öğretmeni ile yarı-yapılandırılmış görüşmeler yapmıştır. Öğretmenlerin açıklama ve örnekleri Zaskis ve Leikin (2008) tarafından geliştirilen erişilebilirlik, doğruluk, zenginlik ve genelleştirme kategorileri kullanılarak analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre öğretmenlerin türev kavramı ile ilgili verdikleri örneklerin uygun veya kısmen uygun kategorilerden oluştuğu ancak çoğunlukla prototip örneklerden oluştuğu ortaya çıkmıştır.

Zaskis ve Leikin (2008) tarafından geliştirilen metodolojik yaklaşımı kullanan çalışmalar dışında, örnekler konusunda yapılmış başka çalışmalar da mevcuttur. Örneğin, Ubuz ve Kırkpınar (2000) matematiksel kavramların oluşumunda örneklerin rolünü literatür taraması ve öğretmen adaylarının sınav kağıtlarını inceleyerek araştırmışlardır. Çalışmada matematiksel kavramların oluşumunda genel örnek kullanımının etkisini incelemişlerdir. Araştırmacılar, yalnızca genel örneklere odaklanmış ve fonksiyonlar konusunda sınav kâğıtlarındaki öğrenci örneklerini incelemişlerdir. Çalışmanın bulguları öğrenenlerin ilk verilen örnekleri ezberlediklerini veya verilen örneklerden genelleme eğiliminde olduklarını göstermiştir.

İncikabı ve Tjoe (2013) tarafından yapılan çalışmada ise Türkiye ve Amerika'da okutulan matematik ders kitaplarındaki problemlerin benzerlik ve farklılıkları analiz edilmiştir. Altıncı ve yedinci sınıf ders kitaplarında oran ve orantı konusundaki problemler karşılaştırılmıştır. Türkiye'deki ders kitaplarının Amerika'daki kitaplara kıyasla daha çok salt matematiksel terimler kullanan problemler içerdiği ve problemlerin daha az gerçek hayat uygulamaları içerdiği belirlenmiştir. Türkiye'deki ders kitaplarında uygulama ve muhakeme gerektiren problemler daha yoğunlukta, bilme bilişsel alanı ise daha az vurgulanmaktadır. Açıklamalar, çözüm süreçleri daha çok vurgulanırken teknoloji kullanımına dair örnekler bulunmamaktadır. Amerika'da okutulan matematik ders kitaplarında genellikle daha düşük matematiksel ve bilişsel yeterlikler gerektiren problemler kullanıldığı ve çok adımlı örneklere daha az odaklanıldığı belirlenmiştir. Çalışma sonuçları doğrultusunda ders kitaplarında daha zengin örneklere yer verilmesi önerilmektedir.

Matematiksel ispat konusunda yapılan çalışmalar genellikle öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma becerileri ve bu süreçte yaşadıkları zorluklara odaklanmışlardır. Örneğin, Gürsel (2013) öğretmen adaylarının cebir konularındaki ispat süreçlerini incelemiş ve öğretmen adaylarının kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde güçlükler yaşadıklarını ortaya çıkarmıştır. Güler, Kar, Öçal ve Çiltaş (2011), yaptıkları çalışmada matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yaparken yaşadıkları güçlükleri incelemiş; öğrencilerin eşitlik kullanma, örneklerden yararlanma ve görselleştirme konularında zorluk yaşadıklarını belirlemişlerdir. Öğretmen adaylarının tümevarım yoluyla ispat yaparken genellikle örnek vererek ispat yapma yoluna gittikleri belirlenmiştir. Benzer şekilde Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tümevarım yöntemi ile ispat yapmakta zorlandıklarını tespit etmişlerdir. Özer ve Arıkan (2002) lise öğrencilerinin ispat performanslarını inceledikleri çalışmalarında öğrencilerin istenilen düzeyde tümevarım ve tümdengelim yoluyla ispat yapamadıklarını ve ispatları örnekler vererek yapma eğiliminde olduklarını ortaya çıkarmışlardır. Aylar (2014) tarafından yapılan çalışmada ise yedinci sınıf öğrencilerinin ispat kavramını edinme biçimleri incelenmiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin tümdengelimsel muhakemeyi içeren yanıtlara yöneldiği ve birkaç örneğin denenmesinin ispat için yeterli olduğunun düşünüldüğü belirlenmiştir. Çalışmada ayrıca öğrencilerin ispat için örnek vererek doğrulama yoluna gittikleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin ispat ile örnek vererek doğrulama arasındaki farkı da algılayabildikleri ifade edilmiştir.

Sağlam Kaya (2017) matematik öğretmeni adaylarının farklı tür matematiksel örnekleri nasıl algıladıklarını incelemiştir. Çalışma kapsamında 190 öğretmen adayından görsel örnekler, cebirsel örnekler ve öğretmen ve öğrenci örneklerindeki dört metaforik cümleyi tamamlamaları istenmiştir. Aynı zamanda yapılan görüşmelerle nitel veriler elde edilmiştir. Çalışmanın bulgularına göre öğretmen adayları görsel örneklerin soyut kavramları somutlaştırmada etkin olduğunu, cebirsel örneklerin anlaşılmasının zor olduğunu fakat konunun pekiştirilmesine önemli etkisinin olduğunu düşünmektedir. Aynı zamanda öğretmen adaylarına göre örnekler matematiğin yapı taşı olup, öğretmen tarafından kullanılan örneklerin etkililiğine inanmaktadırlar. Öğretmen adaylarının aynı zamanda öğrenci örneklerinin eğitimdeki öneminin farkında oldukları belirlenmiştir. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının matematiksel örnek algılarının çoğunlukla geleneksel düzeyde kaldığı, ters örnek veya örnek olmayan durumların örnek olmadığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları örnekleri belli prosedürlerin uygulandığı problemler, sorular ya da alıştırmalar şeklinde düşünmekte, ve bu tür örnekleri çoğunlukla kendileri vermeyi planlamaktadırlar.

Öğrencilerden isteyecekleri örneklerin ise çoğunlukla bir kavramın örneğine yönelik olacağı, öğrencilerden daha karmaşık bilişsel süreçler gerektirecek örnek üretmelerini beklemedikleri ortaya çıkmıştır.

Alkan, Güven ve Yılmaz (2017) çalışmalarında 9. sınıf matematik öğretmenlerinin fonksiyonlar konusunda kullandıkları örnek türlerini incelemişlerdir. Deneyimli matematik öğretmenleri ile durum çalışması şeklinde tasarlanan çalışmanın sonuçlarına göre, öğretmenler derslerinde genel örneklerden ve örnek olmayan örneklerden sıklıkla yararlanırken, karşıt örneklere yer vermemektedirler. Araştırmacılar bu sonuçlar doğrultusunda öğretmenlerin fonksiyonlarda özel durumlara dikkat çekmek için örnek olmayanlardan faydalanmalarının önemine işaret etmişlerdir.

Alkan ve Güven (2018) 11 ve 12. sınıflarda okutulan matematik ders kitaplarında limit konusunda ele alınan örnek türlerini incelemişlerdir. Bulgular kitaplarda standart ve geliştirici örneklerin yaygın şekilde kullanılmalarına rağmen başlangıç örneklerine ve örnek dışı örneklere daha az yer verdikleri, uç ve karşıt örneklere hiç yer vermediklerini ortaya çıkarmıştır. Araştırmacılar ayrıca başlangıç ve geliştirici örneklere 2010 ve 2015 yılında kullanılan kitaplarda daha fazla yer verildiğini belirtmişlerdir.

Ulusal matematik öğretiminde örnekleri kullanan kapsamlı çalışmalardan biri Avcu (2014) tarafından ortaokul matematik öğretmenleriyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmada öğretmenlerin rasyonel sayılar konusunda kullandıkları örnekler ele alınmıştır. Nitel olarak gerçekleştirilen çalışmada öğretmenlerin yanlış örnek seçimleri dikkat çekmiştir. Öğretmenler tarafından örneklerin yarısından çoğunun anlık olarak belirlenip kullanıldığı bulunmuş, örnek olmayanların ya da karşıt örneklerin nadiren de olsa kullanıldığı tespit edilmiştir. Öğretmenler örnekleri kullanırken kolay örneklerden başlama, öğrenci güçlüklerini ve kavram yanılgılarını dikkate alma, sınav odaklı çalışma, örneklerin kritik özelliklerine dikkat çekme prensiplerini izlemişlerdir. Çalışmada belirlenen öğretmen örnekleri matematiksel olarak, dil ve terminoloji olarak ve pedagojik olarak hatalı örnekler olarak sınıflandırılmıştır.

Öğretmenlerin kullandıkları örnekler Alkan (2016) tarafından da ele alınmıştır. Alkan (2016) öğretmenlerin kullandıkları örnekleri tespit etmek ve öğretmenlerin derslerinde yaptıkları açıklamalar ile kullandıkları örnek türleri arasındaki ilişkiyi araştırmak için 5 adet 9., 10., ve 11. sınıf matematik öğretmeninin matematik derslerini gözlemlemiş ve öğretmenlerle ders öncesi ve sonrasında mülakatlar gerçekleştirmiştir. Elde edilen verilerin içerik analizi sonucu öğretmenlerin derslerinde altı farklı örnek türünü (başlangıç, standart, geliştirici, uç, örnek dışı ve karşıt örnekler) kullandıklarını tespit etmiştir. Öğretmen açıklamaları modelini revize ederek sınıflandıran Alkan (2016) öğretmenlerin öğretimsel açıklamalarının en fazla işlemsel ve açıklayıcı kategorilerde olduğunu bulmuş; işlemsel boyuttaki öğretmenlerin derslerinde en fazla standart ve geliştirici örneklere yer verdiğini, açıklayıcı boyuttaki öğretmenlerin ise örnek dışı örnekleri kullandıklarını ortaya çıkarmışlardır.

Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu (2014) 151 öğretmen adayı ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında fonksiyonlar konusundaki ispatlarda kullanılan ters örnekleri incelemişlerdir. Açık uçlu sorulara verilen yanıtlar incelenmiş ve öğretmen adaylarının ispat yapmada veya verilen yanlış ifade için ters örnek bulmada zorlandıkları belirlenmiştir. Bununla beraber öğretmen adaylarının kimi ifadelerin yanlış olduğunu belirleyemedikleri veya ters örnek kavramına sahip olmadıkları belirlenmiştir. Araştırmacılar lisans derslerinde ters örneklerle ispat geliştirme sürecinin desteklenmesini önermişlerdir.

Yüce (2017), 129 lise öğrencisinin matematik dersindeki örnek üretme becerilerini incelediği çalışmasında öğrencilerin stratejileri, kavram imajları, kişisel örnek alanı genişliği, kavram yanılgıları, ve işlemsel-kavramsal öğrenmelerini incelemiştir. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin örnek üretirken deneme yanılma stratejisi kullandıkları, buna karşılık üst düzey düşünme becerisi gerektiren analiz stratejisini kullanamadıkları belirlenmiştir. Yüce (2017), öğrencilerin sınırlı kişisel örnek alanlarının öğrencilerin kavram yanılgılarına sebebiyet verebileceğini belirtmiştir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Matematikte örnek kullanımı konusunda Türkiye'de yapılmış olan çalışmaların çoğunlukla son yirmi yılda gerçekleştirildiği ve son yıllarda daha yoğun olarak çalışıldığı görülmektedir. Buna rağmen toplam 19 ulusal çalışmaya ulaşılmış olup bu çalışmalardan sadece matematikte örnek kullanımına odaklanan çalışmaların azlığı dikkat çekmektedir. Konunun ulusal alanyazına geç dahil olduğu ve incelenen çalışmaların uluslararası alanyazında nispeten sınırlı kaldığı belirlenmiştir. Bununla beraber incelenen ulusal çalışmaların tümünde nitel araştırma deseni kullanılmış ve matematiksel konularda örnek kullanımına ek olarak, örneklerin farklı kuramsal çerçeveler boyunca veya ispat, tanım gibi boyutlar ile birlikte incelendiği görülmektedir. Ulusal boyutta gerçekleştirilen çalışmalar özellikle matematik öğretmenleri veya öğretmen adayları ile ve buna paralel olarak fonksiyonlar, türev, geometri, ispat gibi konularda gerçekleştirilmiştir. Ulusal çalışmalar arasında ilköğretim seviyesinde gerçekleştirilen çalışmalara ve dolayısıyla ilköğretim seviyesindeki matematik konularına rastlanmaması dikkat çekici bir bulgudur.

Türkiye'de yapılan tüm bu çalışmaların sonuçları genel olarak ele alındığında, öğrencilerin örnekleri ezberleme veya verilen sınırlı sayıda örnekten yola çıkarak genelleme eğilimleri, öğretmenler ve ders kitaplarında verilen örneklerin sınırlı kullanımı sonuçları belirlenmiştir. Çalışmaların en temel ortak önerisi ise matematik öğretiminde daha zengin örnek kullanımının gerektiği yönündedir. Öğretmen adaylarının başarıları ile verilen örnek zenginliği arasında ilişki bulunamaması (Gökbulut & Ubuz, 2013) ise ilgi çekicidir. Ayrıca kitaplarda bulunmayan örneklerin, öğretmenlerin kişisel örnek alanlarına dahil olmaması (Gükyurt & Soylu, 2016) ve öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin zengin olmayan kişisel örnek alanları (Avcu, 2004; Yüce, 2017) bulguları önemli bulunmaktadır. Bu bulgular ile birlikte ele alındığında İncikabı ve Tjoe (2013) tarafından ders kitaplarında zengin ve çeşitli örnekler kullanılması önerisinin önemi bu çalışmada da belirlenmiştir. Bununla birlikte örneklerin ispat sürecindeki önemli yeri birçok çalışmada belirlenmiştir. Öğrencilerin kişisel örnek alanları genişlediğinde ispat için tek bir örneğin yetmeyeceğini dolayısıyla ispat ile ters örnek vermek arasındaki farkı daha net belirleyecekleri düşünülmektedir.

Bu çalışmada ortaya çıkan bir başka bulgu, ulusal çalışmalarda araştırmacıların belirli örnek sınıflandırmalarını kullandıkları (genel örnekler, prototip örnekler, karşıt örnekler vbg.), ancak sınır örnekler gibi sınıflandırmaların incelenmediğidir. Aynı zamanda uluslararası alanyazında oldukça ilgi gören k*işisel örnek alanı* teorisinin ulusal araştırmalarca aynı oranda ilgi görmemiş olması dikkat çekicidir.

4.1. Öneriler

Bu çalışmada elde edilen bulgular doğrultusunda ileride yapılacak çalışmalar için çeşitli öneriler yapılabilir. Ulusal alanyazında örneklerle ilgili çalışmalara daha fazla yer verilmesi gerektiği en belirgin öneridir. Matematik eğitiminde örnek kullanımına dair genelde nitel çalışmaların yapılmış olması, ek olarak nicel ve/veya karma çalışmalara ihtiyacı ortaya çıkarmıştır. Ayrıca, çalışmalar incelendiğinde örneklerin matematik öğretiminde hangi sıralama ya da zamanlama ile sunulması gerektiğine dair çalışmaların yetersizliği görülmektedir. Ek olarak, çeşitli seviyelerdeki matematik kitaplarında yer alan örneklerin zenginliği ve yeterliliği incelenip öğrencilerin kavram edinimleri ile ilişkilendirilebilir. Matematik öğretiminde öğrenenlerin dikkatlerinin örneklere nasıl yöneltileceği ve öğretmenlerin örnek seçimlerinin önemini fark etmelerinin sağlandığı çalışmaların gerekli olduğu görülmektedir. Ayrıca, çözümlü örneklerin kavram oluşumundaki etkisi araştırılabilir. Farklı kavramlar için öğretmenlerin verdikleri örneklerin nasıl değiştiği belirlenebilir. Ulusal boyutta öğretmen adaylarının eğitimleri boyunca karşılaştıkları ve ilerideki meslek hayatlarında tercih ettikleri örnekler incelenip, bunların nasıl ilişkili oldukları araştırılabilir. Bununla beraber öğretmen adaylarının lisans başarılarının, öğretim hayatlarında zengin ve yeterli örnek kullanımına işaret edip etmediği araştırılabilir. İleride yapılacak çalışmalar ayrıca kişisel örnek alanı teorisine odaklanabilir. Bu bağlamda matematikçilerin, öğretmenlerin ve öğrencilerin örnekleri nasıl algıladıkları belirlenmeye çalışılabilir. Bu farklılıklar öğretimde örnek seçimlerini ve düzenlenmesini yönlendirebilir. Ayrıca alan eğitimcilerinin örnekleri algılayışları ve bunun öğretmen adaylarının kullandıkları örneklerin çeşitliliğine etkileri incelenebilir.

İncelenen ulusal çalışmaların ilköğretim seviyesinde yürütülmemiş olduğu düşünüldüğünde, bu seviyede öğretmen, öğrenci ve kitaplardaki örnek alanlarının incelendiği çalışmalar yapılabilir. Bunun yanında örneklerin uluslararası boyutta incelendiği çalışmalarda kullanılan ve verimliliği test edilmiş olan öğrenme varyasyonu teorisi ulusal çalışmalarda da ele alınabilir. Aynı zamanda öğrencilerin ürettiği örnekler ve bu örneklerin öğretmen ya da kitap tarafından sunulan örneklerle ilişkisi incelenebilir.

Bu çalışmada örneklerin tarihsel gelişimine, pedagojik kullanımlarına, sınıflandırılmalarına ve teorilerdeki yerine dair bilgiler verilmiştir. Ayrıca yapılan alanyazın çalışması ile örneklerin ulusal çalışmalarda nasıl ele alındığına dair temel bir resim çizilmiştir. Bu çalışmanın belirtilen noktalarda ulusal alanyazına katkıda bulunacağı ve birçok yeni çalışmaya yön vereceği düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Akkoç, H. (2006). Fonksiyon kavramının çoklu temsillerinin çağrıştırdığı kavram görüntüleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*, 1-9.

Alcock, L. & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics, 69*,111-129.

Alkan, S. (2016). *Matematik öğretmenlerinin kullandıkları örneklerin sınıflandırılması ve öğretimsel açıklama boyutlarıyla ilişkisinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.

Alkan, S. & Güven, B. (2018) Ders kitaplarında kullanılan örnek türlerinin analizi: Limit konusu. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 1-1.

Alkan, S., Güven, B. & Yılmaz, Ş. (2017). The types of examples teachers use in teaching function concept. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(23),* 367-384.

Anthony, G. (1994). The role of the worked example in learning mathematics. A. Jones ve diğerleri. (Ed.). *SAME papers* (s. 129-143). Hamilton, New Zealand: University of Waikato.

Antonini, S., Presmeg, N., Mariotti, A. & Zaslavsky, O., (2011). Examples in mathematics thinking and learning from an educational perspective. *ZDM Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 43*(3).

Asiala, M. Brown, A. DeVries, D. Dubinsky, E. Mathews D. & Thomas K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, *6*, 1-32.

Avcu, R. (2014). *Exploring middle school mathematics teachers' treatment of rational number examples in their classrooms: A multiple case study.* Yayınlanmamış doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Aylar, E. (2014). A Study on the forms of perception of 7th grade students towards the concept of proof. *Journal of Education and Future, 5,* 39-56.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. D. Pimm (Ed.).*Mathematics, Teachers and Children*, (s. 216-235), London: Hodder and Stoughton.

Bell, E.T. (1967). *Men of mathematics*. New York: Simon and Schuster.

Bentley, P. (2008) The Book of Numbers: The Secret of Numbers and how They Changed the World

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Bills, L. & Watson, A. (2008). Editorial introduction (Special issue on the role and use of examples in mathematics education). *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 77–79.

Bogomolny, M. (2006). *The role of example-generation tasks in students' understanding of linear algebra*. Yayınlanmamış doktora tezi, Simon Fraser University, Burnaby, Canada.

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York:Dover Publications.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Wiley International Edition

Breen, S., O'Shea, A. & Pfeiffer, K. (2016). Students' views of example generation tasks. *Teaching Mathematics and its Applications*. doi: 10.1093/teamat/hrv017

Bruner, J., Goodnow, J. & Austin, A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

Burn, R. (2002). The genesis of mathematical structures. P. Kahn ve J. Kyle (Ed.). *Effective learning and teaching in mathematics and its applications.* (s. 20-33). Kogan Page.

Charles, R. (1980). Exemplification and characterization moves in the classroom teaching of geometry Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*(1), 10-21.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). Research methods in education (6th ed.). New York, NY: Routledge.

Colburn, W. (1826). *Intellectual arithmetic: Upon the inductive method of instruction*. Boston, USA: Reynolds ve Co.

Confrey, J. (1991). Steering a course between Vygotsky and Piaget. *Educational Researcher, 20*(2), 29-32.

Cook, J. P. & Fukawa-Connelly, T. (2015) The pedagogical examples of groups and rings that algebraists think are most important in an introductory course. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 15*(2), 171-185.

Courant, R. (1981). Reminiscences from Hilbert's Gottingen. *Mathematical Intelligencer, 3*(4), 154–164.

Dahlberg, R. & Housman, D. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics, 33,* 283-299.

Davis, R. (1984). *Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ, USA: Ablex.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Brighton UK: Harvester.

De Morgan, A. (1831). On mathematical instruction. *Quarterly Journal of Education, 1*, 264-279.

Dienes, Z. (1960). *Building up Mathematics*. London, UK: Hutchinson Educational.

Dienes, Z. P. (1963). An Experimental Study of Mathematics Learning. London: Hutchinson.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (s. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Duran, M & Kaplan, A . (2016). Lise matematik öğretmenlerinin türevin tanımına ve türev-süreklilik ilişkisine yönelik pedagojik alan bilgileri. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 18 (2),* 795-831.

Edwards, A. W. (2011). *Using example generation to explore undergraduates' conceptions of real sequences: A phenomenographic study*. Yayınlanmamış doktora tezi, Loughborough University, Leicestershire, UK.

Evans, R. (1973). *Jean Piaget: The man and his ideas*. New York, USA: Dutton.

Feynman, R. (1985). *"Surely you're joking, Mr Feynman!": Adventures of a curious character*. New York, USA: Norton.

Feynman, R. P. (1986). Personal observations on the reliability of the shuttle. *Report of the Presidential Commission on the Space Shuttle Challenger Accident, 2*, 1-5.

Fukawa-Connelly, T. P. & Newton, C. (2014). Analyzing the teaching of advanced mathematics courses via the enacted example space. *Educational Studies in Mathematics, 87*, 323–349.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Gagné, R. (1985). *The conditions of learning* (4th ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston.

Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Reprinted 1982. New York, USA: Dover.

Goldenberg, P. & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 183-194.

Gökbulut, Y. & Ubuz, B. (2013). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Prizma Bilgileri: Tanım ve Örnekler Oluşturma. *İlköğretim Online, 12*(2), 401-412.

Gökkurt, B. & Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 1(4),* 56-64.

Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F. & Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 15,* 336-340.

Güler, G., Özdemir, E. & Dikici. R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20(1),* 219-236.

Gürsel, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116–140.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problemsin Mathematics*, *11*(1), 61-76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. P. Nesher ve J. Kilpatrick (Ed.). *Mathematics and cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

İncikabı, L**.** & Tjoe, H. (2013). A comparative analysis of ratio and proportion problems in Turkish and the U.S. middle school mathematics textbooks. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD), 14*(1), 1-15.

Kant, I. (1998). Critique of Pure Reason. Guyer, P. ve Wood, A. W. (Ed.). Cambridge University Press.

Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, *18*(1), 51-71.

Leinhardt, G. (2001). Instructional explanations: A commonplace for teaching and location for contrast. V. Richardson (Ed.). *Handbook of Research on Teaching* (4th ed., s. 333-357). Washington DC, USA: American Educational Research Association.

MacVicar, D. (1879). *A complete arithmetic, oral and written: designed for the use of common and high schools and collegiate institutes.* Montreal, Canada: Dawson Bros.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. & Trigwell, K. (2000). Variatio est mater studiorum. *Higher Education Research and Development*, *19* (3), 381-395.

Marton, F. ve Tsui, A. (2004). *Classroom discourse and space for learning.* Marwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: Pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. *Number theory in mathematics education: Perspectives and prospects*, 41-68.

Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*(3), 277–290.

Mason, J. & Watson, A. (2001). Getting students to create boundary examples, *MSOR Connections, 1* (1), 9-11.

Mason, J. & Watson, A. (2008). Mathematics as a constructive activity: Exploiting dimensions of possible variation. M. Carlson and C. Rasmussen (Ed.). *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics*(s. 189–202). Washington, DC: MAA.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding mathematics', *Cognitive Science*, ***2***, 361–383.

Minner, D. D., Levy, A. J., & Century, J. (2010). Inquiry‐based science instruction—what is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching, 47*(4), 474-496.

Minsky, M. (1975). A framework for representing knowledge. P. Winston (Ed.). *The psychology of computer vision* (s. 211-280). New York, USA: McGraw Hill.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics,27*(3), 249-266.

Oktaç, A. & Çetin, I. (2016). APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. Bingölbalı, E., Arslan, S. ve Zembat, İ. Ö (Ed.). *Matematik Eğitiminde Teoriler* (s.163-181). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 2, 1083-10989.

Özkaya, M., Işık, A. & Konyalıoğlu, A. (2014). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ispatlama ve ters örnek oluşturmaperformansları. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, *11*, 26-42.

Peled, I. & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counterexamples that (also) explain. *FOCUS on Learning Problems in mathematics, 19*(3), 49-61.

Pestalozzi, J. H., Holland, L. E., Turner, F. C., & In Cooke, E. (1898). *How Gertrude teaches her children: An attempt to help mothers to teach their own children and an account of the method*. Syracuse, N.Y: C.W. Bardeen.

Petty, O. S. & Jansson, L. C. (1987). Sequencing examples and non-examples to facilitate concept attainment. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(2), 112-125.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York, USA: Norton.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26,*165-190.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, USA: Princeton University Press.

Polya, G. (1954). Mathematics and Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics. Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. New York, USA: Wiley.

Record, R. (1632). *The Ground of Arts: teaching the perfect worke and practise of arithmeticke, both in whole numbers and fractions.* London: Harper, Thomas.

Rosch, E. (1975). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General, 104,* 192-322.

Sağlam Kaya, Y. (2017). Öğretmen adaylarının matematiksel örnekleri algılayışları üzerine bir metafor analizi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *6*(1), 48.

Schwarz, B. & Hershkowitz, R. (1999). Prototypes: Brakes or levers in learning the function concept? *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 362-389.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,*1-36.

Sierpinski, W. (1998). *Elementary theory of numbers (2nd ed.).* The Netherlands: Elsevier Science Publishers.

Sinclair, N. Watson, A. Zazkis, R. ve Mason, J. (2011). The Structuring of Personal Example Spaces. *Journal of Mathematical Behavior, 30* (4), 291-303.

Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth, UK: Penguin.

Skemp, R. R. (1979). *Intelligence, learning and action*. Chichester: Wiley.

Skinner, B. F. (1938). *The behavior of organisms: an experimental analysis*. New York.

Sowder, L. (1980). Concept and principle learning. R. Shumway (Ed.). *Research in Mathematics Education* (s. 244-285). Reston, VA, USA: NCTM.

Spencer, H. (1878). *Education: intellectual, moral and physical*. London: Williams ve Norgate.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 314-352.

Sun X. (2011). “Variation problems” and their roles in the topic of fraction division in Chinese Mathematics textbook examples, *Educational Studies in Mathematics, 76* (1) 65-85.

Swetz, F. (1987). *Capitalism and arithmetic: The New Math of the 15th century. (*Trans. Smith). LaSalle, USA: Open Court.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26* (2), 229-274.

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York, USA: Macmillan,

Thorndike, E., Cobb, M., Orleans, J., Symonds, P., Wald, E. & Woodyard, E. (1924). *The psychology of algebra*. New York, USA: Macmillan.

Ubuz, B. & Kırkpınar,P. (2000). The role of example in the formation of mathematical concepts. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 19, 134-138.

Ubuz, B. & Gökbulut, Y. (2015). Sınıf Öğretmeni Adaylarının Piramit Bilgileri: Tanım ve Örnekler Oluşturma. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi (KEFAD)*, *16* (2), 335-351.

Vinner, S. (1983). Concept image, concept definition and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. D. O. Tall (Yay. Haz.). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Watson, A. & Mason, J. (2004). The exercise as mathematical object: dimensions of variation in practice, *BSRLM*, 107-112.

Watson, A. & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.

Watson, A. & Shipman, S. (2008). Using learner generated examples to introduce new concepts. *Educational Studies in Mathematics,69* (2), 97-109.

Whitehead, A. (1911). *An introduction to mathematics* (reprinted 1948). Oxford, UK: Oxford University Press.

Wilson, S. (1986). Feature frequency and the use of negative instances in a geometric task. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(2), 130-139.

Wilson, S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*, 31-47.

Winston, P. H. (1975). Learning structural descriptions from examples. P. Winston (Ed.). *The psychology of computer vision*. New York, USA: McGraw-Hill.

Witmer, T. (Trans.) (1968). *Ars Magna or the Rules of Algebra, Girolamo Cardano*. New York, USA: Dover.

Yüce, M. (2017). *Lise öğrencilerinin matematik dersi kapsamında örnek üretme becerileri*. Yayımlanmamış doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Zaslavsky, O. & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student-teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78.

Zaslavsky, O. & Zodik, I. (2007). Mathematics teachers' choices of examples that potentially support or impede learning. *Research in Mathematics Education, 9,* 143–155.

Zazkis, R. (2001). From arithmetic to algebra via big numbers. *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (s. 676-681). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Zazkis, R. & Chernoff, E. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195-208.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the learning of mathematics,27(*2), 15-21.

Zazkis, R. & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, *69* (2), 131-148.

Zeeman, E. C. (1965). *Topology of the brain, in Mathematics and computer science in biology and medicine*. London: H.M. Stationary Office.

Zeeman, C. (2005). *Three-Dimensional Theorems for Schools*. The Mathematical Association, Leicester.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 165-182.

EXTENDED ABSTRACT

1. Introduction

Examples constitute an important part of mathematics and mathematics education. There are several theories and research studies in the literature to highlight this significance. Despite the importance, variety and the frequency of international studies, this topic did not get enough attention in the Turkish literature. Moreover, in the national literature, several different terminologies have been using to represent the types of examples. This is also considered to hinder the development of a common national academic language. Therefore, examining the use of examples in mathematics from historical and theoretical aspects can be considered important. The current study has been providing information about the historical developments of the use of examples in mathematics and mathematics education, reviewing how the examples are defined and classified and hence providing these in the common national academic language, analyzing how examples are used in mathematics education theories and informing the reader about the theoretical framework developed about examples. Finally it is intended to review and analyze the national literature about the topic and give suggestions for further research. The results of this study are expected to contribute significantly to the national literature as it aims to generate a common national academic language regarding the use of examples in mathematics and provides important information about the topic. In addition, suggestions for further studies take place within the current study. In this way, this study will direct the future studies and increase the interest in the use of mathematical examples.

2. Method

A thematic approach as a form of literature review was followed in the current study. In this respect, the literature was reviewed, the historical and theoretical developments of the topic were provided, information about the classification of examples and the related theoretical framework determined and the national studies about this topic were reviewed and analyzed. All accessible resources are gathered and investigated for the current literature review. The reviewed national academic studies were searched with all possible keywords and their combinations. Some studies may not be involved unintentionally due to the fact that a common national academic language has not been constructed. The national studies investigated are the articles published in peer-reviewed journals or theses conducted in Turkish or English languages. In this respect, the criteria to include a specific study are the use of examples in mathematics and partly or totally conducted with a Turkish sample.

3. Findings, Discussion and Results

Analysis of the literature about the examples indicated that examples are very crucial for the history and theories of mathematics and mathematics education. Example use in mathematics is quite common from the oldest sources. Efforts of classifying examples and creating a theoretical framework have been evident after examples being pedagogically addressed. The personal example space is defined as the collection of examples by learners from their own experiences (Watson and Mason, 2005) and has gained widespread attention. At the same time, studies on the classification of examples are available in the international literature.

It was found that the research studies about use of examples in mathematics teaching and learning was carried out in the last two decades in Turkey. In spite of this, a total of 19 national studies have been reached and it is noteworthy that only a small number of studies focusing specifically on the use of examples in mathematics are available. It has been determined that as a research domain the use of examples in mathematics is included lately in national literature and that mostly studies are relatively limited in the international context. It was found that, qualitative research design has been used throughout the national studies examined and examples have been studied along with different theoretical frameworks or with dimensions such as proofs, definitions. Studies have been carried out in particular with mathematics teachers or prospective teachers, and about functions, derivatives, geometry, and proof. It is notable that national studies did not focus on primary level mathematics. These studies showed that the use of examples given by teachers or in the textbook is limited and that students tend to memorize or generalize from limited number of examples. Also, the results of these studies are in line with the international studies. Another finding emerged in this study is that researchers used specific classifications of the sample (general examples, prototypical example, counter example, etc.) in national studies, but did not examine classification as boundary examples. At the same time, it is noteworthy that the theory of the personal sample area, which is highly popular in the international field, has got limited interest in the national literature.