Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi *Sinop Uni J Nat Sci 4 (1): 47-53(2019)*
ISSN: 2536-4383

Araştırma Makalesi **https://doi.org/10.33484/sinopfbd.503751**

Her $\delta-$Eşatomik Genişlemede $\delta-$Tümleyene Sahip Modüller

Figen ERYILMAZ *

Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Samsun.

Öz

Bu çalışmada, E^* ve EE^*-modüllerden uyarlanan E_δ^* ve EE_δ^* özelliklerine sahip modüller çalışılmıştır. Eğer bir M modülü $\frac{N}{M}$ $\delta-$eşatomik olacak şekilde her N genişlemesinde bir $\delta-$tümleyene (bol $\delta-$tümleyene) sahip ise M modülüne E_δ^*-modül (EE_δ^*-modül) denir. E_δ^*-modülün her direkt toplam teriminin E_δ^*-modül olduğu ve EE_δ^*-modülün her alt modülünün de E_δ^*-modül olduğu ispatlanmıştır. Eğer R sol $\delta-$mükemmel halka ise, her sol $R-$modülün E_δ^*-modül olduğu gösterilmiştir. Ayrıca sol kalıtsal halka üzerindeki $\delta-$eşatomik E_δ^*-modülün bölüm modülünün de E_δ^*-modül olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: $\delta-$eşatomik genişleme, E_δ^*-modül, EE_δ^*-modül, $\delta-$mükemmel halka

Modules that have a $\delta-$Supplement in every $\delta-$Coatomic Extension

Abstract

In this paper, we study modules with the properties E_δ^* and EE_δ^* which are adapted from E_δ^* and EE_δ^*-modules. We call a module E_δ^*-module (EE_δ^*-module) if M has a $\delta-$supplement (ample $\delta-$supplement) in every $\delta-$coatomic extension N, i.e. $\frac{N}{M}$ is $\delta-$coatomic. We prove that every direct summand of E_δ^*-modules is a E_δ^*- module and every submodule of a EE_δ^*-module is a E_δ^*-module. We showed that if a ring R is left $\delta-$perfect then every left R-module is a E_δ^*-module. We also prove that over a left hereditary ring, every factor module of a $\delta-$coatomic E_δ^*-module is a E_δ^*-module.

Keywords: $\delta-$coatomic extension, E_δ^*-module, EE_δ^*-module, $\delta-$perfect ring

Giriş

Bu çalışmada, R birimli ve birleşmeli bir halka ve bütün modüller üniter sol $R-$modül olarak alınacaktır. M bir $R-$modül olsun. M nin bir N alt modülü $N \subseteq M$ ile gösterilir. N 'nin sadece M ile toplamı M 'ye eşitse yani bir $L \subseteq M$ için $N+L=M$ olması $L=M$ olmasını gerektiriyorsa, N 'ye M 'nin küçük alt modülü denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Yine M 'nin bir L alt modülünün M 'nin sıfırdan farklı her K alt modülü ile kesişimi sıfırdan

* Sorumlu Yazar: ORCID ID: orcid.org/0000-0002-4178-971X
e-mail: fyuzbasi@omu.edu.tr

Received: 27.12.2018
Accepted: 01.03.2019

farklı ise L alt modülüne M 'nin büyük alt modülü denir ve $L \lhd M$ ile gösterilir. $L \subseteq N$ olacak şekildeki L ve N modülleri için $L \lhd N$ olmak üzere $M \cong \frac{N}{L}$ ise M modülüne singüler modül denir. $Rad(M)$ ile M 'nin tüm küçük alt modüllerinin toplamı gösterilecektir. M 'nin her N alt modülü için $Rad\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N}$ olması $\frac{M}{N} = 0$ olmasını gerektirse veya M 'nin her öz alt modülü M 'nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanırsa M 'ye eşatomik modül denir.

Tümleyen kavramına direkt toplam terimi kavramının bir genelleştirmesi olarak bakılabilir. M 'nin her N alt modülü M 'de bir tümleyene sahip ise yani M 'nin K alt modülü $M = N + K$ koşulunu sağlayan alt modüllerin minimali ise M 'ye tümlenmiş modül denir. Ayrıca K alt modülünün N 'nin tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ olmasıdır. Eğer M 'nin $M = N + L$ şeklindeki her L alt modülü için N 'nin M 'de L tarafından içerilen bir tümleyeni varsa N 'ye M 'de bir bol tümleyene sahiptir denir [1].

Küçük alt modüllerin genelleştirmesi olan $\delta-$küçük alt modüller ilk kez Zhou tarafından [2] çalışmasında verilmiştir. Buna göre, M 'nin herhangi bir N alt modülü için $\frac{M}{N}$ singüler olmak üzere $M = N + L$ olması $M = N$ olmasını gerektiriyorsa M 'nin L alt modülüne $\delta-$küçük alt modül denir ve $L \ll_{\delta} M$ ile gösterilir. M 'nin tüm $\delta-$küçük alt modüllerinin toplamı $\delta(M)$ ile gösterilir. Her küçük alt modül $\delta-$küçük olduğundan $Rad(M) \subseteq \delta(M)$ dir ve eğer M singüler modül ise $Rad(M) = \delta(M)$ dir. Ayrıca M 'de singüler olmayan her yarı basit alt modül $\delta-$küçük olup bir singüler modülün $\delta-$küçük alt modülleri küçük alt modüllerdir. $\delta-$küçük alt modüller hakkında ayrıntılı bilgi için [2] çalışmasına başvurulabilir.

M bir modül olsun. M 'nin $\delta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N}$ olacak şekildeki her N alt modülü için $\frac{M}{N} = 0$ ise M 'ye $\delta-$eşatomik modül denir. M $\delta-$eşatomik modül olsun. $N \leq M$ olmak üzere $Rad\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N}$ ise, $Rad\left(\frac{M}{N}\right) \subseteq \delta\left(\frac{M}{N}\right)$ olduğundan $\delta\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N}$ olup $\frac{M}{N} = 0$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla M eşatomik modüldür. $\delta-$eşatomik modüller [3] numaralı çalışmada tanımlanmış ve bu modüllerin bazı özellikleri incelenmiştir.

M 'nin iki alt modülü K ve N olsun. $M = N + K$ ve $N \cap K \ll_{\delta} N$ ise N alt modülüne K 'nin $\delta-$tümleyeni denir. M 'nin her alt modülünün M 'de bir $\delta-$tümleyeni varsa M 'ye $\delta-$tümlenmiş modül denir [4,5]. Benzer şekilde M 'nin $M = N + L$ koşulunu sağlayan her L alt modülü N 'nin bir $\delta-$tümleyenini içerirse N 'ye M 'de bol $\delta-$tümleyene sahiptir denir. M 'nin her alt modülü M 'de bol $\delta-$tümleyene sahipse M 'ye bol $\delta-$tümlenmiş modül denir [6].

$0 \to M \to N \to K \to 0$ modüllerin bir kısa dizisi olsun. Bu takdirde N 'ye M 'nin K ile genişlemesi denir. Burada M modülü N 'nin alt modülü olarak alınabilir. Eğer $\frac{N}{M}$ bölüm modülü $\delta-$eşatomik ise N modülüne M 'nin $\delta-$eşatomik genişlemesi denir. [7] de her genişlemesinde tümleyene ve bol tümleyene sahip modüller çalışıldı ve bu modüller sıra ile E ve EE özelliğine sahip modüller olarak adlandırıldı. Daha sonra sırasıyla dual sonlu genişlemesinde tümleyene ve her genişlemesinde $\delta-$tümleyene sahip modüller çalışıldı [8,9].

M bir modül olsun. Eğer M modülü her eşatomik genişlemesinde bir tümleyene sahipse M 'ye $E^{*}-$modül, her eşatomik genişlemesinde bir bol tümleyene sahipse $E^{**}-$modül denir [10]. Bu tanımların ışığında Zhou'nun [2]'de yapmış olduğu $\delta-$küçük alt modül ve Wang'ın [5] çalışmasındaki $\delta-$tümleyen tanımı kullanılarak E_{δ}^{*} ve EE_{δ}^{*} modüller tanımlanacaktır.

Bulgular

Bu bölümde $E_{\delta}^{*}-$modül ve $EE_{\delta}^{*}-$modül kavramları E^{*} ve $EE^{*}-$modüllerin birer genelleştirilmesi olarak tanımlanacak ve bu modüllerin bazı özellikleri araştırılacaktır.

Tanım 1 Bir M modülü her $\delta-$eşatomik genişlemesinde bir $\delta-$tümleyene sahipse M 'ye $E_{\delta}^{*}-$modül, her $\delta-$eşatomik genişlemesinde bir bol $\delta-$tümleyene sahipse M 'ye $EE_{\delta}^{*}-$modül denir.

Uyarı. R lokal halka veya değişmeli bölge olsun. Bu takdirde [11] çalışmasındaki Önerme 2.5 den her $\delta-$küçük alt modül küçük olup R halkası üzerindeki her M modülü için $Rad(M) = \delta(M)$ yazılır. Dolayısıyla her $\delta-$tümleyen, tümleyen ve her eşatomik modül $\delta-$eşatomik olup, her $E_{\delta}^{*}-$modül bir $E^{*}-$modüldür. Benzer şekilde her $EE_{\delta}^{*}-$modül bir $EE^{*}-$modüldür.

Önerme 1 Bir $E_{\delta}^{*}-$modülün her direkt toplam terimi de $E_{\delta}^{*}-$modüldür.

İspat. M bir E_δ^*-modül ve M_1 ise M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M 'nin M_2 alt modülü vardır. M_1 alt modülünün herhangi bir $\delta-$eşatomik genişlemesi N olmak üzere, K ile $N \oplus M_2$ dış direkt toplamını gösterelim. $\varphi : M \to K$ kanonik dönüşüm olsun. Buradan $M \cong \varphi(M)$ izomorfizması ve hipotez kullanılarak $\varphi(M)$'nin bir E_δ^*-modül olduğu açıktır. Ayrıca

$$\frac{K}{\varphi(M)} = \frac{N \oplus M_2}{\varphi(M)} \cong \frac{N}{M_1}$$

olduğundan $\frac{K}{\varphi(M)}$ $\delta-$eşatomik modüldür [3]. $\varphi(M)$ bir E_δ^*-modül olduğundan, $K = \varphi(M) + L$ ve $\varphi(M) \cap L \ll_\delta L$ olacak şekilde K 'nın bir L alt modülü vardır. $\pi : K \to N$ projeksiyon dönüşümü olsun. Bu takdirde $N = \pi(L) + M_1$ eşitliği elde edilir. [2] çalışmasındaki Lemma 1.3(2) kullanılarak $Ker(\pi) \subseteq \varphi(M)$ olduğundan

$$\pi(\varphi(M) \cap L) \subseteq$$

$$\pi(\varphi(M)) \cap \pi(L) = M_1 \cap \pi(L) \ll_\delta \pi(L)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $\pi(L)$, N modülünde M_1 modülünün bir $\delta-$tümleyeni olduğundan M, E_δ^*-modüldür.

Önerme 2 M bir EE_δ^*-modül ise M 'nin her alt modülü bir E_δ^*-modüldür.

İspat. $N \subseteq M$ olsun. N 'nin bir $\delta-$eşatomik genişlemesi K olmak üzere, N 'nin K 'da bir $\delta-$tümleyene sahip olduğu gösterilmelidir.

$H = \{(n,-n) : n \in N\} \subseteq M \oplus K = H'$ alt modülü için $F = \frac{H'}{H}$ olduğunu kabul edelim. $i_1 : N \to K$ ve $i_2 : N \to M$ içerme homomorfizmaları ve her $m \in M$, her $k \in K$ için $\alpha(m) = (m,0) + H$, $\beta(k) = (0,k) + H$ ile tanımlı α ve β monomorfizmaları için aşağıdaki diyagram çizilebilir:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{i_1} & K \\ \downarrow_{i_2} & & \downarrow_{\beta} \\ M & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array}$$

Bu diyagrama göre $F = Im(\alpha) + Im(\beta)$ dir. Her $(m,k) + H \in F$ için $\varphi((m,k) + H) = k + N$ ile tanımlı $\varphi : F \to \frac{K}{N}$ fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu kolayca görülür. Yine $Ker(\varphi) = Im(\alpha)$ olduğundan $\frac{K}{N} \cong \frac{F}{Im(\alpha)}$ bölüm modülü $\delta-$eşatomik bulunur. α monomorfizma olduğundan $M \cong Im(\alpha)$ yazılabilir. O halde hipotez gereği, $Im(\alpha)$'nın F 'de

ISSN: 2536-4383

$L \subseteq Im(\beta)$ olacak şekilde bir L $\delta-$tümleyeni vardır. Böylece $F = Im(\alpha)+L$ ve $Im(\alpha)\cap L \ll_{\delta} L$ yazılabilir. Buradan

$K = \beta^{-1}(F) = \beta^{-1}(Im(\alpha)) + \beta^{-1}(L) = N + \beta^{-1}(L)$

ve $N \cap \beta^{-1}(L) \ll_{\delta} \beta^{-1}(L)$

elde edilir. Bu ise $\beta^{-1}(L)$'nin K'da N'nin bir $\delta-$tümleyeni olması demektir. Böylece N, bir $E_{\delta}^{*}-$modül bulunur.

R halkasının her sol ideali projektif ise R halkasına sol kalıtsal halka denir. R halkasının sol kalıtsal halka olması için gerek ve yeter koşul her injektif sol $R-$modülün bölüm modülünün injektif olmasıdır [1, 39.16].

Şimdi herhangi bir sol kalıtsal halka üzerinde tanımlı bir $\delta-$eşatomik $E_{\delta}^{*}-$modülünün her bölüm modülünün de bir $\delta-$eşatomik $E_{\delta}^{*}-$modül olduğu gösterilecektir.

Önerme 3 R bir sol kalıtsal halka ve M bir $\delta-$eşatomik $E_{\delta}^{*}-$modül olsun. Bu takdirde her bölüm modülü de bir $E_{\delta}^{*}-$modüldür.

İspat. U, M'nin bir alt modülü ve N ise $\frac{M}{U}$'nun $\delta-$eş atomik genişlemesi olsun. M $\delta-$eşatomik olduğundan [3] çalışmasındaki Önerme 2.5 (1) gereğince $\frac{M}{U}$ $\delta-$eşatomik modüldür.

$0 \to \frac{M}{U} \to N \to \frac{N}{\frac{M}{U}} \to 0$ kısa tam dizisi için $\frac{M}{U}$ ve $\frac{N}{\frac{M}{U}}$ $\delta-$eşatomik modül olduğundan [3] çalışmasındaki Önerme 2.5 (2) gereğince N $\delta-$eşatomik modüldür. $E(M)$ ile M modülünün injektif bürümü gösterilsin. R bir sol kalıtsal halka olduğundan $\frac{E(M)}{U}$ modülü injektiftir. Bundan dolayı $\psi : M \to K$ bir monomorfizma olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagram çizilebilir:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & U & \xrightarrow{i_1} & M & \xrightarrow{\pi} & \frac{M}{U} & \to & 0 \\
 & & \downarrow_{I_U} & & \downarrow_{\psi} & & \downarrow_{i_2} & & \\
0 & \to & U & \xrightarrow{f} & K & \xrightarrow{\phi} & N & \to & 0
\end{array}$$

ve $f\,I_U = \psi i_1$, $\phi\psi = i_2\pi$ olur [12]. Ayrıca $N \cong \frac{K}{\psi(M)}$ olduğu kolayca gösterilebilir. M bir $E_{\delta}^{*}-$modül olduğundan $\psi(M)$, K'da bir $\delta-$tümleyene sahiptir. Önerme 2'nin ispatını kullanarak, bu $\delta-$tümleyenin görüntüsünün de N'de $\frac{M}{U}$'nun bir $\delta-$tümleyeni olduğu bulunur. Böylece $\frac{M}{U}$ bir $E_{\delta}^{*}-$modüldür.

Yardımcı Önerme 1 Herhangi bir R halkası üzerinde aşağıdakiler denktir:

(1) Her sol $R-$modül bir E_δ^*-modüldür.

(2) Her sol $R-$modül bir EE_δ^*-modüldür.

İspat. Her sol $R-$modülün bir E_δ^*-modül olduğunu kabul edelim. M bir modül ve N, M'nin bir $\delta-$eşatomik tümleyeni ve $L \subseteq N$ olmak üzere $N = M + L$ olsun. O zaman [3] çalışmasıyla $\frac{N}{M} \cong \frac{L}{M \cap L}$ modülü de $\delta-$eşatomik olur. M bir E_δ^*-modül olduğundan $M \cap L$'nin L'de K adında $\delta-$tümleyeni vardır. Bundan dolayı $L = (M \cap L) + K$ ve $(M \cap L) \cap K = M \cap K \ll_\delta K$ yazılabilir. Bunun sonucu olarak $N = M + (M \cap L) + K = M + K$ ve $M \cap K \ll_\delta K$ olur. Bu ise M modülünün bir EE_δ^*-modül olduğu anlamına gelir. Önermenin diğer tarafının doğruluğu açıktır.

P projektif bir $R-$modül olmak üzere $f : P \to M$ bir epimorfizma olsun. Eğer $Ker(f) \ll_\delta P$ ise P modülüne f epimorfizması ile birlikte M modülünün projektif $\delta-$örtüsü denir. R bir halka olmak üzere her sol $R-$modül projektif $\delta-$örtüye sahip ise R halkasına $\delta-$mükemmel halka denir [2].

Önerme 4 R $\delta-$mükemmel halka olsun. O zaman her sol $R-$modül bir E_δ^*-modüldür.

İspat. R $\delta-$mükemmel halka, M sol $R-$modül olmak üzere N, M'nin bir $\delta-$eşatomik genişlemesi olsun. [4] çalışmasındaki Teorem 3.4 kullanılarak N modülünün $\delta-$tümlenmiş ve böylece M'nin N'de bir $\delta-$tümleyene sahip olduğu açıktır. Bu ise M'nin bir E_δ^*-modül olduğu anlamına gelir.

[13] çalışmasında her M sol $R-$modülü için $\delta(M) = 0$ ise R halkasına bir sol $\delta-V-$halka adı verilmişti. Bu halka için aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 5 R sol $\delta-V-$halka ve M bu halka üzerinde E_δ^*-modül olsun. Bu takdirde M bir injektif modüldür.

İspat. N, M modülünün bir genişlemesi olsun. Bir sol $\delta-V-$halka üzerindeki her modül $\delta-$eşatomik olduğundan $\frac{N}{M}$ modülü de $\delta-$eşatomiktir. Böylece N modülü M'nin bir $\delta-$eşatomik genişlemesi olur. Hipotez kullanılacak olursa N'nin bir K alt modülü için $N = M + K$ ve $M \cap K \ll_\delta K$ sağlanır. R bir sol $\delta-V-$halka olduğundan $M \cap K \subseteq \delta(K) \subseteq \delta(N) = 0$ dır. Böylece M, N'nin bir direkt toplam terimidir. M her

ISSN: 2536-4383

genişlemesinde bir direkt toplam terimi olduğundan M injektif modüldür.

Örnek 1. $\delta-$mükemmel olup mükemmel olmayan bir R halkasını alalım [2, Örnek 4.3]. Önerme 4 gereği her sol $R-$modül $E^*_\delta-$modüldür. R mükemmel halka olmadığından [10] çalışmasındaki, Teorem 2 gereği E^* özelliğini sağlamayan bir $R-$ modül vardır.

Dolayısıyla Örnek 1 ile aşağıdaki modül sınıflarının öz kapsaması elde edilir.

$\{E^*$özelliğini sağlayan modüller$\} \subset \{E^*_\delta$ özelliğini sağlayan modüller$\}$.

Kaynaklar

[1] Wisbauer, R, 1991. Foundations of Modules and Rings, Gordon and Breach Science Publishers, Dusseldorff, 616p.

[2] Zhou Y, 2000. Generalizations of perfect, semiperfect, and semiregular rings, Algebra Colloq., 7(3), 305-318.

[3] Koşan MT, Harmancı A, 2005. Generalizations of coatomic modules, Cent. Eur. J. Math. 3(2), 273–281.

[4] Koşan MT, 2007. $\delta-$lifting and $\delta-$ supplemented modules, Algebra Colloq., 14(1), 53 - 60.

[5] Wang Y, 2007. $\delta-$small submodules and $\delta-$supplemented modules, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 58132, 8 p.

[6] Tribak R, 2012. Finitely generated $\delta-$ supplemented modules are amply $\delta-$ supplemented , Bull. Aust. Math. Soc., 86(3), 430-439.

[7] Zöschinger H, 1974. Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben, Math. Scand. 35, 267-287.

[8] Çalışıcı H, Türkmen E, 2012. Modules that have a supplement in every cofinite extension, Georgian Math. J., 19, 209-216.

[9] Sözen EÖ, Eren Ş, 2017. Modules that have a $\delta-$supplement in every extension, Eur. J. Pure App. Math.,10(4), 70-738.

[10] Türkmen BN, 2015. Modules that have a supplement in every coatomic extension, Miskolc Math. Notes, 16(1), 543-551.

[11] Tribak R, 2015. When finitely generated $\delta-$supplemented modules are supplemented, Algebra Colloq., 22(1), 119-130.

[12] Özdemir S, 2013. Rad-supplementing modules, J. Korean Math. soc., 53(2), 403-408.

[13] Ungör B, Halıcıoğlu S, Harmancı A, 2014. On a class of $\delta-$supplemented modules, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 37(3), 703-717.