Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 26, No 2, 315-324, 2011

J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.
Vol 26, No 2, 315-324, 2011

KEYFİ TEK FİBER AİLESİ İLE TAKVİYELİ TERMOELASTİK KOMPOZİT ORTAMLARDA LİNEER BÜNYE DENKLEMLERİ İÇİN MATEMATİKSEL MODEL

Melek USAL* ve Benek HAMAMCI**
* İmalat Mühendisliği Bölümü, Teknoloji Fakültesi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 32260, Isparta
** Makine Eğitimi Bölümü, Teknik Eğitim Fakültesi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 32260, Isparta
melekusal@sdu.edu.tr, **benekkaraali@hotmail.com**

(Geliş/Received: 04.03.2010; Kabul/Accepted: 16.02.2011)

ÖZET

Bu çalışmanın asıl amacı, keyfi tek fiber ailesi ile takviye edilmiş bir kompozit malzemenin lineer termoelastik davranışını temsil eden bünye denklemlerine ait matematiksel bir model oluşturmaktır. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde genel termodinamik denge denklemleri, Clausius–Duhem eşitsizliği, bünye teorisi aksiyomları, fiber deformasyon geometrisi ve kinematiği ile ilgili denklemler belirleyici olmuştur. Malzemenin fiber dağılımından kaynaklanan yönlü bir ortam olma özelliği nedeniyle güçlü bir anizotropiye sahip olduğu düşünülmüştür. Matris malzemesi fiber boyunca yön değişimine duyarsız kaldığından fiber vektörünün dış çarpımı olan simetrik bir tansör tanımlanmıştır. Uygulamalarda makul kabuller olarak görülen ortamın sıkışmazlığını ve fiber ailesinin uzamazlığını göz önüne alarak gerilmeye ve ısı akısı vektörüne ait bünye denklemleri elde edilmiştir. Termodinamik kısıtlamaların neticesi olarak, gerilme potansiyeli fonksiyonunun iki simetrik tansöre, ısı akısı vektörü fonksiyonunun ise iki simetrik tansör ile bir vektöre bağlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmada, matrix malzemesi anizotrop bir ortam olarak göz önüne alınmıştır. Bu yaklaşım çerçevesinde, gerilmenin ve ısı akısı vektörünün bünye denklemleri, bünye fonksiyonlarının argümanlarına göre bir kuvvet serisi açılımı ile temsil edilerek ortaya konulmuştur. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı ortamın lineerlik durumuna göre belirlenmiştir. Gerilmenin ve ısı akısı vektörünün lineer bünye denklemleri, Cauchy hareket denklemi ve enerji denklemi ifadelerinde yerlerine yazılıp alan denklemleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Denge denklemleri, bünye fonksiyonları, lineer bünye denklemleri, fiber dağılımı, deformasyon tansörü, sıcaklık gradyanı.

A MATHEMATICAL MODEL FOR THE LINEAR CONSTITUTIVE EQUATIONS OF A THERMOELASTIC COMPOSITE CONTINUUM REINFORCED BY SINGLE FAMILY OF ARBITRARILY FIBER

ABSTRACT

Main objective of this study is to construct a mathematical model belonging to constitutive equations which represent linear thermoelastic behavior of a composite material, where the material was reinforced by single family of arbitrarily fiber. General thermodynamic balance equations, Clausius-Duhem inequality, constitutive theory axioms, equations dealing with to kinematic and deformation geometry of fiber have been determining in the process of this study. It has been assumed that material attains a strong anisotropy due to the fiber distribution. Because the matrix material remains insensitive to change of direction along the fiber, a symmetric tensor which outer products of fiber vector has been defined. Considering incompressibility of the medium and inextensibility of the fiber family, these assumptipons are fairly meaningful for the practical applications, constitutive equations of the stress and heat flux vector have been obtained. As a result of thermodynamic constraints, it has been shown that the stress potential function is dependent on two symmetric tensors whereas the heat flux vector function is dependent on two symmetric tensors and a vector. In this study, the matrix material has been considered as an anisotropic medium. In the scope of this approach, constitutive equations of stress and heat flux vector has been revealed representing by a power series expansion according to arguments of constitutive functions. The type and number of terms taken into consideration in this series expansion has been determined based on the linearity condition of the medium. The linear constitutive equations of the stress and heat flux vector are substituted in the Cauchy equation of motion and in the equation of conservation of energy to obtain the field equations.

Key words: Balance equations, constitutive functions, linear constitutive equations, fiber distribution, deformation tensor, temperature gradient.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Sürekli ortamlar mekaniği akışkanların (su, yağ, hava, vb.) ve katıların (kauçuk, metal, seramik, ahşap ve yaşayan doku gibi) mekanik davranışını belirlemekle uğraşan bir bilim dalıdır [1]. Fiber takviyeli kompozit malzemeler endüstri mühendisliğinde ve tıp alanında değişik uygulamalarda kullanılır. Mühendislik uygulamaları açısından kompozit malzemeler yüksek katılık ve dayanım, düşük ağırlık ve ısıl yayınım ve korozyona direnç gibi avantajları sağlamalıdır. Bununla birlikte kompozit malzemelerin kullanımdaki dezavantajı ise yüksek maliyetli olması ve uygulama açısından bakıldığında bu tip malzemelerin nasıl birleştirilecekleri konusundaki bilginin sınırlı olmasıdır. Bir fiber ailesi ile takviye edilmiş bir malzeme tek tercihli doğrultuya sahiptir. Bu tip kompozitlerin fiber doğrultusundaki katılığı, fiberlere dik doğrultulardan daha büyüktür ve fiberlerin bütün malzemede düzgün bir şekilde dağıldığı durum göz önüne alındığından tercihli doğrultuya göre enine izotropi söz konusudur. Tercihli doğrultuya dik doğrultu boyunca malzeme tepkisi izotroptur [1].

Hemen hemen bütün mühendislik malzemeleri belirli ölçüde elastisite özelliğine sahiptir [2]. Elastik malzemeler endüstride en yaygın olarak kullanılan basit malzemelerdir. Bu malzemelerden bir kısmında sıcaklık sabit değildir ve bu tür malzemeler termoelastik malzemeler sınıfında yer almaktadır. Termoelastik malzemelerin termomekanik yükleme sonucundaki davranışı, gerilme ve ısı akısı vektörü şeklindedir. Fiber takviyeli termoelastik malzemelerin endüstride kullanıldığı alanlar her geçen gün artmaktadır [3]. Çeşitli malzemeler üzerinde termoelastisitenin matematiksel formülasyonu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır [4, 3, 5, 6]. Bizim önceki çalışmalarımızda [7] tek fiber aileli viskoelastik kompozitler incelenmiş ve ortamın süreksizlik yüzeyine sahip olduğu kabul edilmiştir. [8] çalışmamızda ise iki farklı uzamaz fiber ailesine sahip olan viskoelastik ortamın süreksizlik yüzeyine sahip omadığı düşünülmüştür. Yine [9, 10] çalışmalarımızda viskoelastik ortamın tek fiber ailesi ile takviye edilmesinin yanında elektirik ve manyetik alanlarının etkisine maruz kalması ayrı ayrı çalışmalar olarak incelenmiştir. Usal [11] adlı çalışmasında iki fiber aileli piezoelektrik viskoelastik ortamın elektromekanik davranışını incelemiştir. Sözü edilen çalışmaların hepsinde sıcaklık sabit kabul edildiğinden sıcaklık değişimi dikkate alınmamıştır. Ayrıca [12] adlı çalışmamızda, uzamaz iki farklı fiber ailesi ile takviyeli sıkışabilir kompozit bir malzemenin termoelastik lineer davranışı için bünye formulasyonu geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise keyfi tek fiber ailesi ile takviye edilmiş kompozit bir malzemenin lineer termoelastik davranışı matematiksel olarak modellenmiştir. Ortamın sıkıştırılamaz, fiber ailesinin uzamaz olduğu kabul edilmiş ve ortamın $\mathbf{u}$ hızı ile hareket eden bir $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyine sahip olduğu düşünülmüştür. Termomekanik yükleme sonucunda kompozit ortamın termoelastik lineer davranışını belirleyen gerilmeyi ve ısı dağılımını veren bünye denklemleri elde edilmiştir. Sıcaklık sabit olmadığından, sıcaklık gradyanı bağımsız bünye değişkeni olarak işlemlere dahil edilmiştir. Matris malzemesi fiber boyunca yön değişimine duyarsız kaldığından fiber vektörünün dış çarpımı olan simetrik bir tansör tanımlanıp bünye değişkeni olarak alınmıştır

2. FİBER DEFORMASYON KİNEMATİĞİ VE DENGE DENKLEMLERİ (KINEMATICS OF FIBER DEFORMATION AND BALANCE EQUATIONS)

Kompozit ortamın her $\mathbf{X}$ noktasından A ile gösterilen fiber ailesinden bir elemanın geçtiği düşünülmüştür. Fiber ailesi deformasyondan önce sürekli bir $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ vektör alanı ile deformasyondan sonra ise yine sürekli bir $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektör alanı ile temsil edilmektedir. Malzemenin deformasyonu sırasında, fiber ailesinin ortamla birlikte taşındığı kabul edilmiştir. Deformasyondan önceki ve sonraki diferansiyel fiber uzunluğu ise dL ve *dl* ile gösterilmekte olup λ_a; fiber ailesine ait uzama oranı olarak ifade edilmektedir [13].

$$a_k = \lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K , \qquad \lambda_a = \left(\frac{dl}{dL}\right)_A ,$$
$$\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L \tag{1}$$

Çalışmada bütünlüğü sağlamak için yerel denge denklemleri özet olarak verilecektir. S(t) yüzeyi ile sınırlandırılmış, V(t) hacmine sahip bir sürekli ortamda $\mathbf{u}$ hızı ile hareket eden bir $\sigma(t)$ süreksizlik yüzeyinin bulunduğu varsayılmıştır, burada t zamanı göstermektedir [14, 15].

Kütlenin Korunumu

$$\dot{\rho} + \rho \mathrm{v}_{k,k} = 0 \qquad \text{in } V(t) \qquad (2)_1$$

$$[\![U \rho]\!] = 0 \qquad \text{on } \sigma(t) \qquad (2)_2$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \qquad \text{(Maddesel gösterimde)} \qquad (3)$$

Lineer Momentumun Dengesi

$$\rho \dot{\mathrm{v}}_p = \rho \mathrm{f}_p + t_{rp,r} \qquad \text{in } V(t) \qquad (4)_1$$

$$[\![n_l t_{lk} + \rho \mathrm{v}_k U]\!] = 0 \qquad \text{on } \sigma(t) \qquad (4)_2$$

Açısal Momentumun Dengesi

$$\varepsilon_{krp} t_{rp} = 0, \quad t_{rp} = t_{pr} \qquad \text{in } V(t) \qquad (5)_1$$

$$\varepsilon_{klp} x_l [\![n_r t_{rp} + \rho U \mathrm{v}_p]\!] = 0 \qquad \text{on } \sigma(t) \qquad (5)_2$$

Enerji Denkliği

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} \mathrm{v}_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \qquad \text{in } V(t) \qquad (6)_1$$

$$\rho U [[\varepsilon + (\tfrac{1}{2}) |\mathrm{v}|^2]] + n_k [[t_{kl} \mathrm{v}_l - q_k]] = 0 \quad \text{on } \sigma(t) \qquad (6)_2$$

Clausius-Duhem Eşitsizliği

$$\rho \dot{\eta} - \rho \frac{\mathrm{h}}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \qquad \text{in } V(t) \quad (7)_1$$

$$\rho U [\![\eta]\!] - [\![(\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}) / \theta]\!] \leq 0 \qquad \text{on } \sigma(t) \qquad (7)_2$$

Burada U, süreksizlik yüzeyinin sürekli ortama göre bağıl yer değiştirme hızı olup $U \equiv u_n - \mathrm{v}_n = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $\mathbf{v}$ sürekli ortamdaki hız alanı, $\mathbf{u}$ süreksizlik yüzeyinin hızı, $\mathbf{n}$ yüzeyin normali, $\dot{\mathbf{v}}$ ivme, t_{lk} gerilme tansörü, f_p birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet, ε birim kütle başına iç enerji yoğunluğu, q_k ısı akısı vektörü, h birim kütle başına ısı kaynağı, η birim kütle başına entropi yoğunluğu, $\theta(\mathbf{X}, t)$ bir t anında $\mathbf{X}$ maddesel noktasının mutlak sıcaklığı, $\rho \gamma$ birim kütle başına entropi üretimi, ε_{ijk} permütasyon tansörü olarak ifade edilmektedir.

3. TERMODİNAMİK KISITLAMALAR VE BÜNYE MODELİ (THERMODYNAMIC CONSTRAINTS AND CONSTITUTIVE MODEL)

Yerel enerji denklemi $(6)_1$ dan (ρh) çekilir, entropi eşitsizliği $(7)_1$ de yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho \gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta} (\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \qquad (8)$$

(8) eşitsizliğindeki entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içinde kontrol edilemeyeceğinden dolayı bu büyüklüğün türevini, kontrol edilebilen θ büyüklüğüne intikal ettirmek için, aşağıdaki gibi tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılabilir.

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \qquad (9)$$

Yeni terimler cinsinden entropi eşitsizliği maddesel formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} + \frac{1}{\theta} \theta_{,K} Q_K \geq 0 \qquad (10)$$

Bu eşitsizlikteki terimler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [16]:

$$\Sigma \equiv \rho_0 \psi \qquad (11)$$

$$\dot{C}_{KL} = 2 \mathrm{d}_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \Rightarrow d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \qquad (12)$$

$$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl} \Rightarrow t_{kl} = J^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} \qquad (13)$$

$$G_K \equiv \theta_{,K} = x_{k,K} \theta_{,k} \Rightarrow g_k \equiv \theta_{,k} = X_{K,k} \theta_{,K} \qquad (14)$$

$$Q_K \equiv J X_{K,k} q_k \Rightarrow q_k = J^{-1} x_{k,K} Q_K \qquad (15)$$

(10) eşitsizliğinin kullanılabilmesi için Σ termodinamik potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Seçilen malzemeye göre Σ'nın argümanları ve bağlı olduğu değişkenler, bünye aksiyomlarını kullanarak bulunmuştur. Kozalite, determinizm, objektivite, yakın civarsallık ve tutarlılık aksiyomlarının sonuçlarına göre [14, 15] termomekanik yüklemeye maruz tek fiber aileli termoelastik bir ortamda Σ nın bağlı olduğu argümanlar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Sigma(X_K, t) = \Sigma [C_{KL}(X_K, t), G_K(X_K, t), A_K(X_K), \theta(X_K, t), X_K] \qquad (16)$$

Diğer taraftan, malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından, matematiksel olarak $A \rightarrow -A$ değişiminden etkilenmeyeceği için, $A_K(\mathbf{X})$ vektör alanı yerine bunun dış çarpımı olan ve;

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}) = A_K A_L \mathbf{I}_K \mathbf{I}_L \qquad (17)$$

şeklinde tanımlanan simetrik tansör alanı kullanılırsa [17, 18], Σ nın bağlı olduğu argümanlar;

$$\Sigma(X_K,t)=\Sigma[C_{KL}(X_K,t),G_K(X_K,t),\\ M_{KL}(X_K),\theta(X_K,t),X_K] \tag{18}$$

şeklinde yazılır. Malzemelerin homojen olduğu kabul edilerek (18) ifadesiyle verilen Σ 'nın bağlı olduğu argümanlardan $\mathbf{X}$ kaldırılır. M_{KL} fiber tansörü zamana bağlı olmadığı için (18) ifadesinin maddesel türevini alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\dot{\Sigma}=\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}\dot{C}_{KL}+\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta_{,K}}\dot{G}+\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\dot{\theta} \tag{19}$$

Bu ifadeyi (10) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{2}(T_{KL}-2\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}})\dot{C}_{KL}-\rho_0(\eta+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta})\dot{\theta}-\\ \frac{\partial\Sigma}{\partial G_K}\dot{G}_K+\frac{1}{\theta}G_K Q_K\geq 0 \tag{20}$$

(20) eşitsizliğindeki argümanları θ' yı $\dot{\theta}$ şeklinde, C_{KL}'yi $\dot{C}_{KL}$ şeklinde G_K'yı $\dot{G}_K$ şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden (20) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $\dot{\theta}$' nın $\dot{C}_{KL}$' nın $\dot{G}_K$' nın katsayıları sıfır olacaktır. G_K' nın katsayısı sıfır olamaz çünkü G_K, Σ' nın argümanlarında mevcut olduğu için G_K keyfi bir şekilde değiştirilemez.

$\dot{C}_{KL}$' nın $\dot{\theta}$' nın ve $\dot{G}_K$' nın katsayıları sıfıra eşitlenecek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$T_{KL}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{21}$$

$$\eta=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial G_K}=0 \tag{23}$$

(23) ifadesinden gerilme potansiyelinin G_K ya bağlı olmadığı görülmektedir. Buna göre gerilme potansiyelinin bağlı olduğu argümanlar;

$$\Sigma=\Sigma[C_{KL},M_{KL},\theta] \tag{24}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda (20) eşitsizliği aşağıdaki hale indirgenir.

$$\frac{1}{\theta}G_K Q_K\geq 0 \tag{25}$$

(25) ifadesi ısı akısı vektörü için Clausius-Duhem eşitsizliğini verir ve ısı akısı vektörünün hangi argümanlara bağlı olduğu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$Q_K=Q_K(C_{Kl},M_{KL},G_K,\theta) \tag{26}$$

(25) eşitsizliği, (26) ifadesi dikkate alınarak,

$$G_K Q_K\ (C_{KL},M_{KL},G_K,\theta,X_K)\geq 0 \text{ veya}\\ \mathbf{Q}(\mathbf{C},\mathbf{M},\mathbf{G},\theta,\mathbf{X})\cdot\mathbf{G}\geq 0 \tag{27}$$

şeklinde yazılır. (27) eşitsizliğinde $G_K=0$ olduğu zaman Q_K nın da sıfır olması gerekir. Buna göre (26) ifadesinde bağımsız bünye değişkenlerinin sırası muhafaza edilerek,

$$Q_K(C_{KL},M_{KL},0,\theta,X_K)=0 \tag{28}$$

ifadesi yazılmalıdır. Diğer taraftan bünye denklemlerinden olan iç enerji (ε); (9), (11) ve (22) ifadelerinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon=\frac{1}{\rho_0}(\Sigma-\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\theta) \tag{29}$$

(21) ve (26) ifadeleriyle verilen bünye denklemlerinden, gerilmenin gerilme potansiyeli fonksiyonu Σ dan türetildiği, ısı akısı vektörünün gerilme potansiyelinden bağımsız olarak argümanları belli olan vektörel bir form şeklinde ortaya çıktığı görülmektedir. Bu durumda bünye fonksiyonları olarak ortaya çıkan ve argümanları belli olan Σ ve Q_K nin açık formlarının ortaya konulması gerekir.

Maddesel simetri aksiyomunun, bünye fonksiyonları üzerine getirdiği kısıtlamalara göre, $\underline{\underline{S}}=[S_{KL}]$, maddesel koordinatların ortogonal dönüşümünü temsil eden ve ortamın simetri grubuna ait keyfi herhangi bir matris olan her $\underline{\underline{S}}$ ortogonal matrisi ile oluşturulan,

$$X'_K=S_{KL}X_L\ ,\ X_L=S^T_{LK}X'_K\ ,\ \underline{\underline{S}}^{-1}=\underline{\underline{S}}^T \tag{30}$$

şeklindeki dönüşüm altında bünye fonksiyonelleri form-invaryant kalmalıdır. Bu, matematiksel olarak

$$\Sigma\ (\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}^T,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{S}}^T,\theta)=\Sigma\ (\underline{\underline{C}},\underline{\underline{M}},\theta) \tag{31}$$

$$\underline{Q}(\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}^T,\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{S}}^T,\underline{\underline{S}}\,\underline{G},\theta)=\underline{\underline{S}}\,\underline{Q}(\underline{\underline{C}},\underline{\underline{M}},\underline{G},\theta) \tag{32}$$

dönüşümlerinin geçerli olması demektir. Diğer taraftan gerek fiber ailesinin uzamazlığı ve gerekse de ortamın sıkışmazlığı, formülasyon açısından pratikte yaygın bir kabul görmektedir. Ortam sıkıştırılamaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edildiğinde sırasıyla

$J = \det \underline{\underline{C}} = III = 1$ ve $\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L = 1$ şartları sağlanmalıdır.
Bu durumda gerilme için bünye denklemi uzaysal ve maddesel koordinatlarda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$t_{kl} = -p\,\delta_{kl} + \Gamma_a\, a_k\, a_l + 2\, x_{k,K} x_{l.L} \frac{\partial \Sigma}{\partial\, C_{KL}} \tag{33}$$

$$T_{KL} = -p\, C_{KL}^{-1} + \Gamma_a A_K A_L + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{34}$$

(17) tanımı gereğince (33) ve (34) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir [19].

$$T_{KL} = -p\, C_{KL}^{-1} + \Gamma_a M_{KL} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{35}$$

$$t_{kl} = -p\,\delta_{kl} + \Gamma_a\, m_{kl} + 2\, x_{k,K} x_{l.L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \tag{36}$$

Bu ifadelerdeki p ve Γ_a, Lagrange çarpanları olup alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenir. Ayrıca (13) ve (14) ifadelerine göre, J =1 alınmak suretiyle, gerilme tansörü ve ısı akısı vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$t_{kl} = x_{k,K}\, x_{l,L}\, T_{KL} \tag{37}$$

$$q_k = x_{k,K}\, Q_K \tag{38}$$

Bu çalışmada matris malzemesi anizotrop bir ortam olarak düşünülmüştür. Bu yaklaşım çerçevesinde, gerilme potansiyeli ve ısı akısı vektörü fonksiyonları bağlı oldukları argümanların bileşenleri cinsinden kuvvet serisine açılarak kompozit ortamın termoelastik davranışını belirleyen bünye denklemleri elde edilmiştir. Ortamın referans konumu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmesiz doğal durumda seçilip, bu konumdan itibaren küçük yer ve şekil - değiştirmeler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığını farzedilmiştir. Küçük sıcaklık değişiminden kastımız, $\theta = T_0 + T$, $T_0 > 0$, $|T| << T_0$ şeklindedir [15]. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı ortamın lineerlik durumuna göre belirlenmiştir. Gerilme potansiyelinin deformasyon tansörüne göre türevi alınıp, gerilme denkleminde yerine yazılarak gerilmenin lineer bünye denklemi elde edilmiştir. Gerilmenin ve ısı akısı vektörünün lineer bünye denklemleri lineer momentum ve enerjinin korunumu denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri elde edilmiştir.

4. LİNEER TERMOELASTİSİTEDE GERİLMENİN BÜNYE DENKLEMİNİN TAYİNİ (DETERMINATION OF STRESS CONSTITUTIVE EQUATION IN LINEAR THERMOELASTICITY)

Green deformasyon tansörü ile genleme tansörü arasında $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ bağıntısı oloduğundan ve Lineer teoride $E_{KL} \cong \widetilde{E}_{KL} \equiv \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K})$ olarak alınabileceğinden, (24) ifadesiyle verilen gerilme potansiyelinin argümanları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma(\widetilde{E}_{KL}, M_{KL}, \theta) \tag{39}$$

Bu fonksiyonun $\widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{M}$ büyüklükleri cinsinden analitik olduğu varsayılarak $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}$, civarında Taylor serisine açılırsa gerilme potansiyeli için

$$\begin{aligned}\Sigma(\widetilde{E}_{KL}, M_{SN}, \theta) &= \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) + \Sigma_{KL}(\theta, \mathbf{X})\widetilde{E}_{KL} + \\ &\lambda_{SN}(\theta, \mathbf{X}) M_{SN} + \frac{1}{2}\Sigma_{KLMN}(\theta, \mathbf{X})\widetilde{E}_{KL}\widetilde{E}_{MN} + \\ &\frac{1}{2}\lambda_{SNML}(\theta, \mathbf{X}) M_{SN} M_{ML} + \\ &\Omega_{KLSN}(\theta, \mathbf{X})\widetilde{E}_{KL} M_{SN} + \ldots\end{aligned} \tag{40}$$

ifadesi bulunmuş olur. Bu denklemindeki katsayılar sadece sıcaklığa bağlı olacaktır.

$$\begin{aligned}&\Sigma_0 = \Sigma(\underline{\underline{0}}, \underline{0}),\ \Sigma_{KL} \equiv \left.\frac{\partial \Sigma}{\partial \widetilde{E}_{KL}}\right|_0, \\ &\lambda_{SN} \equiv \left.\frac{\partial \Sigma}{\partial M_{SN}}\right|_0,\ \Sigma_{KLMN} \equiv \left.\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \widetilde{E}_{KL} \partial \widetilde{E}_{MN}}\right|_0, \\ &\lambda_{SNML} \equiv \left.\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial M_{SN}\, \partial M_{ML}}\right|_0, \\ &\Omega_{KLSN} \equiv \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \widetilde{E}_{KL}\, \partial M_{SN}}\right|_0\end{aligned} \tag{41}$$

şeklindedir. $\widetilde{E}_{KL}$ tansörünün simetrisi ve (41) ifadelerindeki tanımlardaki türevlerin sıraya bağlı olmaması nedeniyle, bu katsayılar aşağıda verilen simetri özelliklerini taşır.

$$\begin{aligned}&\Sigma_{KL} = \Sigma_{LK},\ \lambda_{SN} = \lambda_{NS}, \\ &\Sigma_{KLMN} = \Sigma_{LKMN} = \Sigma_{KLNM} = \Sigma_{MNKL}, \\ &\lambda_{SNML} = \lambda_{NSML} = \lambda_{SNLM} = \lambda_{MLSN}, \\ &\Omega_{KLSN} = \Omega_{LKSN} = \Omega_{KLNS} = \Omega_{SNKL}\end{aligned} \tag{42}$$

Sürekli ortamlar mekaniğinde lineer teori için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir [15].

$$E_{KL} \cong \widetilde{E}_{KL} \equiv \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K}),$$

$$e_{kl} \cong \widetilde{e}_{kl} = \epsilon_{kl} \equiv \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}),$$

$$\in_{kl} \cong \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\widetilde{E}_{KL}\,, \qquad \widetilde{E}_{KL} \cong \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\widetilde{e}_{kl}\,,$$
$$x_{k,K} = \lambda_{kK} + u_{k,K}\,, \qquad X_{K,k} = \Lambda_{Kk} - U_{K,k}\,,$$
$$x_{k,K}x_{l,L} = \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,, \qquad X_{K,k}X_{L,l} = \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,,$$
$$E_{KL} \cong \widetilde{E}_{KL} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\widetilde{e}_{kl} = \frac{1}{2}\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}(u_{k,l}+u_{l,k})\,,$$
$$\left.\begin{aligned} & x_{p,P}\,x_{r,R}\,A_K A_L = x_{p,P}x_{r,R}X_{K,k}X_{L,l}a_k\,a_l\,\lambda_a^2 \equiv \\ & \qquad \lambda_{pP}\,\lambda_{rR}\,\lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,m_{kl}\,, \quad \lambda_a = 1 \text{ için} \end{aligned}\right. ,$$
$$d_{pr} = \frac{\partial E_{PR}}{\partial t}X_{P,r}X_{R,r} = \frac{\partial \in_{pr}}{\partial t}\,, \quad d_{pr} = \frac{\partial (u_{p,r})}{\partial t}\,,$$
$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{43}$$

Sıkıştırılamaz ve uzamaz tek fiber aileli ortamlar için gerilmenin uzaysal formunu veren ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$t_{pr} = -p\,\delta_{pr} + \Gamma_a\,m_{pr} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \in_{pr}} \tag{44}$$

Lineer teoride Σ' nın bağlı olduğu argümanlar uzaysal formda,

$$\Sigma = \Sigma(\in_{kl}\,, m_{kl}\,, \theta) \tag{45}$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon $\in_{kl}$, m_{sn} cinsinden analitik kabul edilerek $\in_{kl} = 0$, $m_{kl} = 0$, civarında bir Taylor serisine açılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \Sigma(\in_{kl}, m_{sn}, \theta, \mathbf{X}) = \Sigma_0(\theta,\mathbf{X}) + \Sigma_{kl}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl} + \\ & \lambda_{sn}(\theta,\mathbf{X})\,m_{sn} + \frac{1}{2}\Sigma_{klmn}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}\in_{mn} + \\ & \frac{1}{2}\lambda_{snml}(\theta,\mathbf{X})\,m_{sn}m_{ml} + \Omega_{klsn}(\theta,\mathbf{X})\in_{kl}\,m_{sn} + \ldots \end{aligned} \tag{46}$$

(46) denklemindeki $\Sigma_{kl}, \lambda_{sn}, \Sigma_{klmn}, \lambda_{snml}$ ve Ω_{klsn} uzaysal malzeme tansörleri, Σ_{KL}, λ_{SN}, Σ_{KLMN}, λ_{SNML} ve Ω_{KLSN} maddesel malzeme tansörleri ile aynı simetri özelliklerini taşır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} & \Sigma_{kl} = \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\Sigma_{KL}\,, \qquad \lambda_{sn} = \lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\lambda_{SN}\,, \\ & \Sigma_{klmn} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{mM}\,\lambda_{nN}\,\Sigma_{KLMN}\,, \\ & \lambda_{snml} \equiv \lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\lambda_{mM}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{SNML}\,, \\ & \Omega_{klsn} \equiv \lambda_{kK}\,\lambda_{lL}\,\lambda_{sS}\,\lambda_{nN}\,\Omega_{KLSN} \end{aligned} \tag{47}$$

Gerçek bir lineer teoriye ulaşmak için (46) ifadesi sonsuz küçük genleme tansörü $\in_{kl}$ ile sıcaklık değişimi T cinsinden en fazla kuadratik bir ifade olmalıdır. Bu amaçla (46) ifadesindeki θ ya bağlı olan katsayılar sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} & \Sigma_0(\theta,\mathbf{X}) = \Sigma_0(T_0+T,\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})\psi_0(T_0,\mathbf{X}) - \\ & \rho_0(\mathbf{X})\eta_0(T_0,\mathbf{X})T - \frac{1}{2}\rho_0(\mathbf{X})\frac{1}{T_0}C(T_0,\mathbf{X})T^2 + \ldots, \\ & \Sigma_{kl}(\theta,\mathbf{X}) = \gamma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) - \beta_{kl}(T_0,\mathbf{X})T + \ldots, \\ & \lambda_{sn}(\theta,\mathbf{X}) = \Lambda_{sn}(T_0,\mathbf{X}) - \xi_{sn}(T_0,\mathbf{X})T + \ldots, \\ & \Sigma_{klmn}(\theta,\mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0+T,\mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \lambda_{snml}(\theta,\mathbf{X}) = \lambda_{snml}(T_0+T,\mathbf{X}) = \lambda_{snml}(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \Omega_{klsn}(\theta,\mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0+T,\mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0,\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{48}$$

Bu denklemdeki ifadelerde aşağıdaki tanımlamalar kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} & \left.\frac{\partial \psi_0(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} \equiv -\eta_0(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \left.\frac{\partial^2 \psi_0(T,\mathbf{X})}{\partial T^2}\right|_{T=T_0} \equiv -\frac{1}{T_0}\,C(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \gamma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) \equiv \Sigma_{kl}(T_0,\mathbf{X}) = \gamma_{lk}(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \beta_{kl}(T_0,\mathbf{X}) \equiv -\left.\frac{\partial \Sigma_{kl}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} = \beta_{lk}(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \Lambda_{sn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv \Lambda_{ns}(T_0,\mathbf{X})\,, \\ & \xi_{sn}(T_0,\mathbf{X}) \equiv -\left.\frac{\partial \lambda_{sn}(T,\mathbf{X})}{\partial T}\right|_{T=T_0} = \xi_{ns}(T_0,\mathbf{X}) \end{aligned} \tag{49}$$

Bu ifadelerdeki $\psi_0(T_0,\mathbf{X})$, $\eta_0(T_0,\mathbf{X})$ ve $c(T_0,\mathbf{X})$ skaler; $\gamma_{kl}(T_0,\mathbf{X})$, $\beta_{kl}(T_0,\mathbf{X})$, $\Lambda_{sn}(T_0,\mathbf{X})$, $\xi_{sn}(T_0,\mathbf{X})$, $\Sigma_{klmn}(T_0,\mathbf{X})$, $\Omega_{klsn}(T_0,\mathbf{X})$ Ve $\lambda_{snml}(T_0,\mathbf{X})$ tansörel malzeme sabitleridir ve bu katsayılar ortamın başlangıçta T_0 mutlak sıcaklığında verilmiş olup heterojen malzemelerde ortamın parçacıklarına bağlıdır. Homojen ortamlarda ise **X** e bağlılığı ortadan kalkar. Notasyonda kolaylık sağlamak için bundan böyle katsayıların $(T_0,\mathbf{X})$ argümanlarını göstermekten kaçınacağız. (49) ve (48) ifadeleri (46) ifadesinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \Sigma(\in_{kl}, m_{sn}, T_0+T, \mathbf{X}) = \rho_0\,\psi_0 - \rho_0\,\eta_0\,T - \frac{\rho_0\,c}{2T_0}T^2 + \\ & \qquad \gamma_{kl}\in_{kl} - \beta_{kl}T\in_{kl} + \Lambda_{sn}m_{sn} - \xi_{sn}T\,m_{sn} + \\ & \qquad \frac{1}{2}\Sigma_{klmn}\in_{kl}\in_{mn} + \frac{1}{2}\lambda_{snml}\,m_{sn}\,m_{ml} + \\ & \qquad \Omega_{klsn}\in_{kl}\,m_{sn} + \ldots \end{aligned} \tag{50}$$

(44) ifadesindeki türev (50) den alınıp yerine yazıldığında,

$$t_{pr} = -p\,\delta_{pr} + \Gamma_a\, m_{pr} - \beta_{pr}\, T + \Sigma_{prmn} \in_{mn} + \Omega_{prsn} m_{sn} \quad (51)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki Σ_{prmn} katsayısının, $\Sigma_{prmn} = \Sigma_{prnm}$ şeklindeki simetri özelliği nedeni ile (51) ifadesiyle verilen gerilmenin bünye denklemi, yer değiştirme gradyanının bileşeni cinsinden aşağıdaki hale dönüşmüş olur.

$$t_{pr} = -p\,\delta_{pr} + \Gamma_a\, m_{pr} - \beta_{pr}\, T + \Sigma_{prmn}\, u_{m,n} + \Omega_{prsn}\, m_{sn} \quad (52)$$

(52) denklemi tek fiber aileli termoelastik bir anizotrop ortamda, ortamın sıkıştırılamaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği durumda gerilmenin lineer bünye denklemidir. (52) ifadesine dikkat edilirse sağ taraftaki birinci ve ikinci terimlerin ortamın sıkışmazlığından ve fiber ailesinin uzamazlığından kaynaklanan terimler olduğu görülmektedir. Üçüncü terim sıcaklık etkilerinden kaynaklanan etkiyi, dördüncü terim genleme tansörünün gerilmeye olan katkılarını ifade etmektedir. Beşinci terim fiber tansörünün gerilmeye olan katkısını göstermektedir.

5. LİNEER TERMOELASTİSİTEDE ISI AKISI VEKTÖRÜNÜN TAYİNİ (DETERMINATION OF HEAT FLUX VECTOR CONSTITUTIVE EQUATION IN LINEAR THERMOELASTICITY)

Gerileme potansiyeli için yapılan yaklaşım, burada ısı akısı vektörü için yapılmıştır. Buna göre ısı akısı vektörü; doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılarak bulunabilir. Lineer teoride $\mathbf{E}$ yerine $\widetilde{\mathbf{E}}$ alınabileceğine dikkat ederek, ısı akısı vektörünün bağlı olduğu argümanlar, entropi eşitsizliği ve bu eşitsizliğinin ortaya çıkardığı kısıtlama aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$Q_R = Q_R(\underline{\underline{\widetilde{E}}}, \underline{\underline{M}}, \underline{G}, \theta, \underline{X}) \quad (53)$$

$$\mathbf{Q}(\widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{M}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}).\mathbf{G} \geq 0 \quad (54)$$

$$Q_R = Q_R(\widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{M}, 0, \theta, \mathbf{X}) = 0 \quad (55)$$

(53) fonksiyonu $\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ civarında Taylor serisine açıldığında,

$$Q_R(\widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{M}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) = B_R(\theta, \mathbf{X}) + B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) G_L + B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \widetilde{E}_{LM} + D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) M_{LM} + \ldots \quad (56)$$

ifadesi elde eldir. (56) denkleminde aşağıdaki tanımlamalar kullanılmıştır.

$$Q_R(\theta, \mathbf{X}) \equiv B_R(\theta, \mathbf{X}), \qquad B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left.\frac{\partial Q_R}{\partial G_L}\right|_0,$$

$$B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left.\frac{\partial Q_R}{\partial E_{LM}}\right|_0, \quad D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left.\frac{\partial Q_R}{\partial M_{LM}}\right|_0 \quad (57)$$

$\widetilde{\mathbf{E}}$ ve $\mathbf{M}$ tansörlerinin simetrisi nedeniyle aşağıdaki simetri şartları geçerlidir.

$$B_{RLM} = B_{RML}, \qquad D_{RLM} = D_{RML} \quad (58)$$

(55) kısıtlaması nedeniyle $\mathbf{G} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ olduğuna göre (56) bağıntısından aşağıdaki ifade yazılır.

$$\underline{0} = B_R(\theta, \mathbf{X}) + B_{RLM}(\theta, \mathbf{X})\, \widetilde{E}_{LM} + D_{RLM}(\theta, \mathbf{X})\, M_{LM} + \ldots \quad (59)$$

(59) ifadesi keyfi her deformasyon ölçüsü için sıfır olduğundan bu denklemdeki katsayılar sıfır olmalıdır. O halde;

$$B_R(\theta, \mathbf{X}) = B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) = D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) = 0 \quad (60)$$

Buna göre (56) denklemi aşağıdaki hale indirgenir.

$$Q_R(\widetilde{\mathbf{E}}, \mathbf{M}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) = B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) G_L = B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) \theta_{,L} \quad (61)$$

(61) ifadesi (54) eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X})\, \theta_{,L}\, \theta_{,R} \geq 0 \quad \text{veya}$$
$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) G_L\, G_R \geq 0 \quad (62)$$

elde edilir. O halde $B_{RL}(\theta, \mathbf{X})$ tansörü her sıcaklık gradyanı için;

$$B_{RL}\, \theta_{,R}\, \theta_{,L} \geq 0 \quad \text{veya} \quad B_{(RL)}\, \theta_{,R}\, \theta_{,L} \geq 0 \quad (63)$$

koşulunu sağlamalıdır. B_{RL} tansörü ısı iletim katsayıları tansörü adını alır. (63) eşitsizliği bu tansörün simetrik kısmının pozitif tanımlı olduğunu ifade eder.

Lineer teori için B_{RL} katsayısı Σ_{PR} katsayısına benzer şekilde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) = B_{RL}(T_0 + T, \mathbf{X}) = B_{RL}(T_0, \mathbf{X}) + \left.\frac{\partial B_{RL}(T, \mathbf{X})}{\partial T}\right|_0 T + \ldots \quad (64)$$

Ayrıca $\theta_{,L}$ terimi ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\theta_{,R} = (T_0 + T)_{,R} = T_{,R} \tag{65}$$

(64) ve (65) ifadeleri (61) denkleminde yerine yazılıp ve $(T)(T_{,L})$ şeklindeki nonlineer terim ihmal edildiğinde ısı iletimi vektörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_R = B_{RL}(T_0, \mathbf{X})T_{,L} \tag{66}$$

(66) denklemi (38) denkleminde yerine yazılırsa, ısı akısı vektörünün uzaysal formu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$q_r = B_{rl}(T_0, \mathbf{X})\, T_{,l} \tag{67}$$

(67) denklemindeki B_{rl} uzaysal malzeme tansörü B_{RL} tansörü ile aynı simetri özelliklerini taşır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B_{rl} \equiv \lambda_{rR}\, \lambda_{lL}\, B_{RL} \tag{68}$$

(67) denklemine Fourier ısı-iletim yasası olup lineer ısı iletimini belirtir ve vektörel formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}\nabla T \tag{69}$$

6. ALAN DENKLEMLERİNİN TAYİNİ (DETERMINATION OF FIELD EQUATIONS)

Alan denklemlerinin elde edilmesine geçmeden önce (52) denklemindeki β_{pr} tansörünün anlamına bir göz atalım. Önce Σ_{prmn} tansörünün tersi olan ve bu tansörle aynı simetri özelliğine sahip olan Σ^{-1}_{prmn} tansörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Sigma_{prmn}\,\Sigma^{-1}_{mnkl} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{pk}\,\delta_{rl} + \delta_{pl}\,\delta_{rk}),$$
$$\Sigma^{-1}_{prmn} = \Sigma^{-1}_{rpmn} = \Sigma^{-1}_{mnpr} = \Sigma^{-1}_{prnm} \tag{70}$$

Fiziksel olarak ölçülmesi oldukça kolay olan termal genleşme katsayılarının oluşturduğu α_{pr} tansörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\alpha_{pr} \equiv \Sigma^{-1}_{prmn}\,\beta_{mn} = \alpha_{rp} \tag{71}$$

(71) ifadesinin tersini bulabilmek için Σ_{klpr} tansörü ile eşitliğin her iki tarafı çarpılır ve uygun indis değişimi ile aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\beta_{pr} = \Sigma_{prmn}\,\alpha_{mn} \tag{72}$$

(72) ifadesi, (52) denkleminde yerine yazılırsa gerilmenin bünye denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} t_{pr} = {} & -p\,\delta_{pr} + \Gamma_a\, m_{pr} + \Omega_{prsn}\, m_{sn} + \\ & \Sigma_{prmn}(u_{m,n} - \alpha_{mn}\, T) \end{aligned} \tag{73}$$

(73) denklemiyle verilen denklemin, ortamın homojen olduğu göz önünde bulundurularak diverjansı alınır $(4)_1$ denkleminde yerlerine yazılırsa söz konusu kabuller altında aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = {} & \Sigma_{prmn}(u_{m,nr} - \alpha_{mn}\, T_{,r}) + \rho_0\, \mathrm{f_p} - p_{,p} + \\ & (\Gamma_a)_{,r}\, m_{pr} + \Gamma_a\, m_{pr,r} + \Omega_{prsn}\, m_{sn,r} \end{aligned} \tag{74}$$

(74) ifadesi ile T, u_k, p, Γ_a bilinmeyenlerini ihtiva eden alan denklemi bulunmuş olur. Bu alan denkleminin probleme uygun olarak verilen ilk ve sınır şartları altındaki çözümü, göz önüne alınacak sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturur.

(22) ve (29) ifadesiyle verilen entropi ve iç enerji denklemleri $\theta = T_0 + T$ ve $\dfrac{\partial T}{\partial \theta} = 1$ olduğundan aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \Sigma}{\partial T} \tag{75}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0}\left[\Sigma - (T_0 + T)\frac{\partial \Sigma}{\partial T}\right] \tag{76}$$

(75) denklemi (76) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varepsilon = \frac{\Sigma}{\rho_0} + (T_0 + T)\eta \tag{77}$$

(50) ifadesiyle verilen Σ ' nın T ye göre türevi alınıp gerekli işlemler yapılarak (75) denkleminde yerine yazıldığında entropi, yer değiştirme gradyanının bileşeni cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta = \eta_0 + \frac{cT}{T_0} + \frac{\beta_{kl}}{\rho_0} u_{k,l} + \frac{\xi_{sn}}{\rho_0} m_{sn} \tag{78}$$

(50) ve (78) ifadeleri (77) denkleminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında iç enerji aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + c(T + \frac{T^2}{2T_0}) + \frac{T_0 \beta_{kl}}{\rho_0} u_{k,l} + \frac{1}{2\rho_0} \Sigma_{klmn} u_{k,l} u_{m,n}$$
$$+ \frac{1}{2\rho_0}(2\Lambda_{sn} + \lambda_{snml}\, m_{ml} + 2\, \Omega_{klsn}\, u_{k,l})\, m_{sn} \qquad (79)$$

Burada $\varepsilon_0 = \psi_0 + T_0\, \eta_0$ olarak tanımlanmıştır ve ε_0, ψ_0 ve η_0 sırasıyla doğal durumda iç enerji, serbest enerji ve entropi yoğunluklarıdır. (79) ifadesinin maddesel türevi alınıp sıkıştırılamaz ortamlar için $\rho = \rho_0$ olduğuna dikkat ederek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho\, \dot{\varepsilon} = \rho_0\, \dot{\varepsilon} = \rho_0\, c\,(1 + \frac{T}{T_0}) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0\, \beta_{kl} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} +$$
$$\Sigma_{klmn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} u_{m,n} + \Omega_{klsn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t}\, m_{sn} \qquad (80)$$

$q_{r,r}$ terimi (67) denkleminden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_{r,r} = B_{rl}\, T_{,lr} \qquad (81)$$

$(6)_1$ ifadesiyle verilen enerjinin korunumu denklemi uygun indis değişikliği ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho\, \dot{\varepsilon} = t_{pr}\, d_{pr} - q_{r,r} + \rho\, h \qquad (82)$$

(80), (81), (43) ve (74) ifadeleri (82) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında, $u_{k,l}$ ve T cinsinden lineer olan aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$(T_0\, \beta_{kl} + p\, \delta_{kl} - \Gamma_a\, m_{kl}) \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} = -\rho_0\, c \frac{\partial T}{\partial t} - \beta_{kl}\, T_{,lk} + \rho_0\, h \qquad (83)$$

(83) denklemi lineer, homojen, sıkıştırılamaz, uzamaz tek fiber aileli kompozit termoelastik ortamlar için ısı iletim denklemidir.

7. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Bu çalışmada, keyfi tek fiber ailesi ile takviye edilmiş termoelastik özellik taşıyan kompozit bir malzemenin lineer davranışını modellemeye imkan oluşturacağı beklentisine dayanarak modern sürekli ortamlar mekaniği kapsamında bir yol izlenmiştir. Bu modellemeyi gerçekleştirirken; genel termodinamik denge denklemleri, Clausius–Duhem eşitsizliği, bünye teorisi aksiyomlarından özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ile malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar, bünye fonksiyonlarının ve alan denklemlerinin bulunması, malzemenin termo-mekanik davranışlarının modellenmesinin teorik temellerini oluşturmuştur. Bu tür bir malzeme için bünye fonksiyonları, argümanları Green deformasyon tansörü, fiber dağılımı tansörü olarak ortaya çıkan gerilme potansiyeli fonksiyonu ile; argümanları Green deformasyon tansörü, fiber dağılımı tansörü ve sıcaklık gradyanı olarak ortaya çıkan ısı akısı vektörü fonksiyonu olarak belirlenmiştir. Bu bünye fonksiyonları vasıtasıyla ele alınan malzemede termomekanik yükleme ile oluşan gerilme tansörü ve ısı akısı vektörü elde edilmiştir. Gerilme, argümanları belli olan gerilme potansiyeli fonksiyonundan türetilmiştir. Isı akısı vektörü ise bir potansiyelden türemediği için argümanlarının analitik bir fonksiyonu olarak ortaya çıkmıştır. Fiber ailesinin uzamazlığı ve ortamın sıkışmazlığı bir çok kompozit malzemenin yapısına uyduğundan, fiber ailesi uzamaz, matris ortamı ise sıkıştırılamaz kabul edilmiştir.

Malzemenin fiber dağılımından kaynaklanan yönlü bir ortam olma özelliği nedeniyle güçlü bir anizotropiye sahip olduğu düşünülmüştür. Bu nedenle matris malzemesi için genel anizotropi durumu dikkate alınmıştır. Gerilme potansiyeli fonksiyonu ile ısı akısı vektörü fonksiyonunun analitik olduğu varsayılarak bağlı oldukları argümanları cinsinden Taylor serisine açılmıştır. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı, ortamın lineer davranışına göre belirlenmiştir. Ayrıca malzeme, fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından $A_K(\mathbf{X})$ vektör alanı yerine bunun dış çarpımı olan $M_{KL}(\mathbf{X}) = A_K\, A_L$ şeklinde tanımlanan simetrik bir tansör alanı kullanılmıştır. Ortamın referans konumu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmesiz doğal durumda seçilmiş ve bu konumdan itibaren küçük yer ve şekil değiştirmeleri ve de küçük sıcaklık değişimleri ile ayrıldığı farzedilmiştir. Yapılan işlemler sonucunda lineer termoelastisite için gerilme bünye denklemi (52) denklemi ile, ısı akısı vektörünün lineer bünye denklemi uzaysal formda (67) denklemleri ile ortaya konulmuştur. (52) denkleminde malzemenin fiber yapısından kaynaklanan yeni terimler ortaya çıkmıştır.

Alan denklemlerine ulaşmak için termal genleşme katsayılarının oluşturduğu α_{pr} tansörü cinsinden ifade edilen (73) denklemiyle verilen gerilme denklemi $(4)_1$ ifadesi ile verilen Cauchy hareket denkleminde yerine yazılıp, (74) denklemi ile verilen hareket denklemi elde edilmiştir. Enerjinin korunum denkleminde yer alan büyüklükler yerlerine yazılarak da (83) ifadesi ile verilen ısı iletim denklemi elde edilmiştir. (74) ve (83) ifadeleri ile T, u_k, p, Γ_a bilinmeyenlerini ihtiva eden alan denklemleri bulunmuş olur. Bu alan denklemlerinin probleme uygun olarak verilen ilk ve sınır şartları altındaki çözümü, göz önüne alınacak sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturur. Bu şekilde (74) ve (83) alan denklemlerinden oluşan sistem; $(4)_2$ ve $(6)_2$ zıplama şartlarının muhteviyatı içinde bulunan sınır şartları ile birlikte anizotropik, lineer, uzamaz keyfi tek fiber aileli sıkıştırılamaz kompozit termoelastik ortamlar ile ilgili sınır-değer problemlerinin yönetici denklemlerini oluşturur.

Diğer taraftan bu alan denklemleri simetri açısından genel manada anizotropik olduklarından, başka türlü simetri taşıyan malzemelere de uygulanabilecek formattadırlar. (74) ve (83) alan denklemlerinin bilinmeyenlerinden p ve Γ_a Lagrange çarpanları olup sınır şartlarından hesaplanır. T ve $\mathbf{u}$ tayin edildikten sonra (52) denkleminden gerilme dağılımı tayin edilmiş olur. Gerilme dağılımı tansör alanı olarak bulunduktan sonra da istenilen kesitteki gerilme vektörü $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})_r} = n_p t_{pr}$ ifadesinden hesaplanabilir. Burada deformasyondan sonraki $a_k(\mathbf{X},t)$ fiber dağılımının, uzamaz-fiberler için deformasyondan önceki fiber-dağılımı cinsinden $a_k = x_{k,K} A_K(\mathbf{X})$ olarak verildiğini gözden kaçırmamak gerekir.

Termal etkiler, fiber takviyeli kompozit malzemelerin endüstriyel uygulamalarında imalat ve dizaynlarını etkilemede önemli rol oynar. Bu yüzden bu malzemelerin termoelastik davranışlarının belirlenmesi yararlı olacaktır. Bu makalede, uzamaz keyfi tek fiber ailesi ile takviyeli sıkıştırılamaz kompozit bir malzeme için lineer termoelastik bünye denklemlerinin genel yapısı türetilmiştir ve bu çalışma teorik bir çalışmadır. Bu makalede ortaya konulan formulasyon, fiber takviyeli kompozit malzemeler için yapılacak deneylere bir alt yapı oluşturabilir. Bu çalışmadan sonra, deneylerden elde edilecek elastik sabitleri kullanarak, geometrisi, sınır şartları, yükleme durumu ve fiber dağılımı belli olan kompozit bir ortam için uygun sayısal çözümleme metoduyla nümerik sonuçlar elde etmeye çalışacağız.

8. KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Holzapfel, A.G., **Nonlinear Solid Mechanics**, J ohn Wiley and Sons Ltd, Chichester, 455p, 2000.
2. Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., **Theory of Elasticitiy**, Mcgraw Hill, 567p, 1970.
3. Lubarda, V.A., ''On Thermodynamic Potentials in Linear Thermoelasticity'', **International Journal of Solid and Structures,** Vol: 41, No: 26. 7377-7398, 2004.
4. Maugin, A.G., and Berezovski, A., ''Material Formulation of Finite-Strain Thermoelasticity and Applications'', **Journal of Thermal Streses,** Vol: 22, No: 4 and 5, 421-449, 1999.
5. Kalpakides, K.V., and Dascalu, C., ''On the Configurational Force Balance in Thermamechanics'', **Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences,** Vol: 458, No: 2028, 3023-3039, 2002.
6. Eringen, A.C., ''A Unified Theory of Thermomechanical Materials'', **Int.J.Engng. Sci**, Vol: 4, 179-202, 1966.
7. Usal, M., Usal, M.R., and Esendemir, Ü., ''A Continuum Formulation for Fiber - Reinforced Viscoelastic Composite Materials with Microstructure Part - I: Anisotropic Matrix Material'', **Science and Engineering of Composite Materials,** Vol: 15, No: 3, 217-234, 2008.
8. Usal, M.R, Usal, M., and Esendemir, Ü., ''A Mathematical Model for Thermomechanical Behavior of Arbitrary Fiber Reinforced Viscoelastic Composites – I'', **Science and Engineering of Composite Materials**, Vol: 13, No: 4, 291-300, 2006.
9. Erdem, A.Ü., Usal, M.R, and Usal, M., ''A Mathematical Model For the Electro-thermomechanical Behavıor of An Arbitrarily Fiber Reinforced Viscoelastic Piezoelectric Body'', ***J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.***, Vol: 20, No: 3, 305-319, 2005.
10. Usal, M., Usal, M.R, and Erdem, A.Ü., ''On Magneto-Viscoelastic Behavior of Fiber-Reinforced Composite Materials Part - I: Anisotropic Matrix Material'', **Science and Engineering of Composite Materials**, Vol: 16, No: 1, 41-56, 2009.
11. Usal, M.R, ''A Constitutive Formulation of Arbitrary Fiber- Reinforced Viscoelastic Piezoelectric Composite Materials–I'', **İnternational Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation**, Vol: 8, No: 2, 257-274, 2007.
12. Usal, M., "A Constitutive Formulation for the Linear Thermoelastic Behavior of Arbitrary Fiber-Reinforced Composites", **Mathematical Problems in Engineering,** In press, 2010.
13. Spencer, A.J.M., **Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites**, Spencer, Springer Verlag, 284 p, New York, 1984.
14. Eringen, A.C., **Mechanics of Continua,** Robert E. Krieger Pub. Co., Hungtington, 590 p, New York, 1980.
15. Şuhubi, E.S., **Continuum mechanics – Introduction,** İ.T.U., Faculty of Arts and Sciences Publication. İstanbul, Turkey, 243 p, 1994.
16. Usal, M., **A mathematical model for a biological construction element**, Ph. D Thesis, Süleyman Demirel University, Institute of Science and Tech., Isparta, Turkey, pp: 232. 2001.
17. Usal, M.R., **A mathematical model for the electro-thermomechanical behaviour of fiber reinforced elastic dielectric media**, Ph. D. Thesis, Erciyes University, Institute of Science and Technology, Kayseri, Turkey, pp: 108, 1994.
18. Öntürk, N., **A model for the constitutive equations of a viscoelastic continuum reinforced by two family of fibers**, Ph. D. Thesis, Gazi University, Institute of Science and Technology, Ankara, Turkey, pp: 179, 1993.
19. Hamamcı, B., **A mathematical model for fiber reinforced thermoelastic materials, Master Thesis,** Süleyman Demirel University, Institute of Science and Technology, Isparta, Turkey, pp: 93. 2006.