

ISI ÜRETEEN İÇİ DOLU KOMPOZİT BİR SİLİNDİRDE MALZEME ÖZELLİKLERİNİN ELASTİK-PLASTİK DEFORMASYONA ETKİSİ

Ali ÖZTÜRK *, Müfit GÜLGEÇ **

* Makina Müh. Böl., Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Meram, 42090, Konya

** Mekatronik Müh. Böl., Mühendislik Fakültesi, Çankaya Üniversitesi, Yenimahalle, 06810, Ankara

aliozturk@konya.edu.tr, mgulgec@cankaya.edu.tr

(Geliş/Received: 21.06.2011; Kabul/Accepted: 28.02.2013)

ÖZET

Tresca akma kriteri ve birleşik akış kuralına dayanarak, iki ucu sabit, ortasından ısıtılan kompozit bir silindirin elastik-plastik deformasyonu, sadece geometrik parametrelerin etkisi değil aynı zamanda akma dayanımı, elastisite modülü, Poisson oranı, ısı iletkenlik ve ısı genleşme katsayıları gibi malzeme özelliklerinin de etkisi dikkate alınarak incelenmiştir. Çalışmada, elastik-mükemmel plastik malzemeden yapılmış bu kompozit silindirdeki gerilme, gerinim ve deplasman dağılımları elde edilmiştir. İçteki silindirde artan ısı üretimine göre değişen gerilme dağılımı ve plastik bölgelerin gelişimi grafiklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isıl gerilme, elastik-plastik gerilme analizi, kompozit silindir, Tresca akma kriteri.

INFLUENCE OF THE MATERIAL PROPERTIES ON THE ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION IN A HEAT GENERATING COMPOSITE SOLID CYLINDER

ABSTRACT

Based on Tresca's yield criterion and its associated flow rule, the elastic-plastic deformation of a centrally heated composite cylinder with fixed ends is investigated by considering the influence of geometric parameters as well as material properties such as yield strength, modulus of elasticity, Poisson's ratio, coefficient of thermal conduction and thermal expansion. In the study, stress, strain and displacement distributions in the composite cylinder made of elastic-perfectly plastic material are derived. Stress distribution and evolution of plastic regions in the composite are presented for different levels of heat generation in the core.

Keywords: Thermal stress, elastic-plastic stress analysis, composite cylinder, Tresca's yield criterion.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Mühendislikte geniş uygulama alanı bulması nedeniyle, silindirik geometriye sahip cisimlerde düzgün olmayan (nonuniform) sıcaklık dağılımı etkisiyle meydana gelen elastik-plastik gerilmelerin bulunması ile ilgili çalışmalar literatürde yer almaktadır [1-8]. Bu çalışmalarda genellikle Tresca akma şartı ve yardımcı akış kuralı (associated flow rule) kullanılmış ve tamamen analitik veya hem analitik hem de sayısal yöntemler birlikte uygulanarak çözüm elde edilmiştir [9-12]. Bu konunun önemli olduğu mühendislik çalışmalarından birisi kablo tellerinin akım nedeniyle ısınması ve diğeri ise

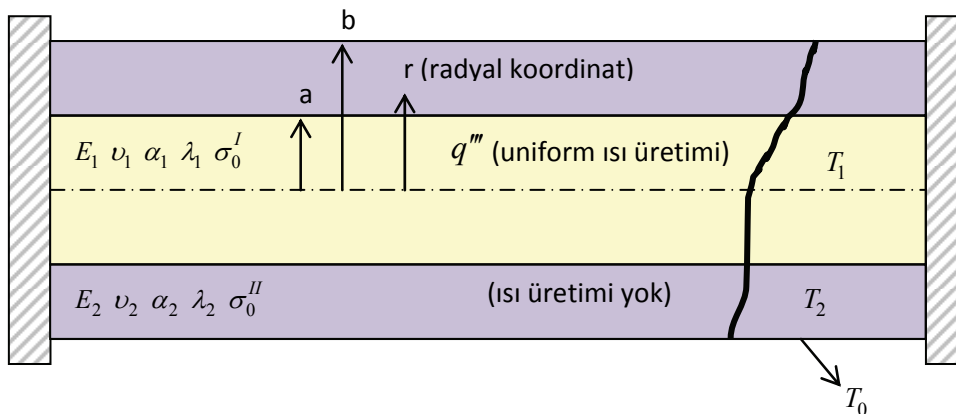
nükleer füzyon ile içerisinde düzgün iç ısı enerjisi üretilen katı nükleer yakıt elemanlarıdır. Günümüzde pek çok nükleer reaktörde silindirik yakıt elemanları kullanılmaktadır. Bu yakıt elemanları genelde "içi dolu silindir" geometrisindedir. Dış kısımlarına ise soğutma suyuna füzyon parçacıklarının kaçmasını engellemek için ayrı bir tüp geçirilir. Yakıt elemanları metalden yapıldığından ve kullanım süreleri boyunca fiziksel özelliklerini korumaları gerektiğinden, çok yüksek sıcaklıklara maruz kalan bu elemanlar içindeki ısıl gerilmelerin belirlenmesi ve bu gerilmelerin elastik-plastik deformasyon üzerindeki etkisi hayati önem kazanmaktadır. Sözü edilen önemi nedeniyle bu çalışmada; elastik-mükemmel plastik malzemeden

yapılmış, üniform ısı üretimine sahip, içi dolu silindir ile bu silindirin dışına mükemmel bir şekilde yerleştirilmiş farklı malzemeden yapılmış tüpten meydana gelen, uçları sabit bir kompozit silindir için elastik-plastik gerilme analizi yapılmıştır. Analiz sırasında; silindirlerin akma dayanımı, elastisite modülü, Poisson oranı, ısı iletkenlik ve ısı genleşme katsayıları gibi malzeme özelliklerinin gerilme-gerinim dağılımı, akma başlangıcı ve elastik-plastik deformasyon üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu yönüyle çalışma, literatürde yer alan çalışmalardan [13-19] oldukça farklıdır. Şekil 1'de görüldüğü gibi makale konusu kompozit silindir, iki ucu sabit, içteki (içi dolu) silindirde ısı üretimi olan ve dıştaki (içi boş) silindirde ısı üretimi olmayıp içteki silindirin ürettiği ısıdan etkilenen, birbiriyle mükemmel birleştirilmiş, farklı malzemeden yapılmış iki parçadan oluşmaktadır. Şekilde yer alan a , E_1 , ν_1 , α_1 , λ_1 ve σ_0^I terimleri içteki silindir için sırasıyla; yarıçapı, elastisite modülünü, Poisson oranını, ısı genleşme katsayısını, ısı iletkenlik katsayısını ve akma mukavemetini, b , E_2 , ν_2 , α_2 , λ_2 ve σ_0^{II} terimleri ise dıştaki silindir için sırasıyla; dış yarıçapını, elastisite modülünü, Poisson oranını, ısı genleşme katsayısını, ısı iletkenlik katsayısını ve akma mukavemetini ifade etmektedir.

2. SICAKLIK DAĞILIMI (TEMPERATURE DISTRIBUTION)

Radyal koordinatı r olan, birim hacim için birim zamanda q''' (ısı yük parametresi) kadar üniform ısı üreten homojen bir silindirdeki ısı yayılım denklemi, kararlı rejim (steady-state) için silindirik koordinatlarda aşağıdaki gibi yazılabilir [20]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_1 r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) + q''' = 0 \quad (1)$$



Şekil 1. Çok uzun kompozit silindirin geometrisi ve parametreleri (Geometry and parameters of the very long composite cylinder)

Bu denklemlerdeki integral sabitleri; $r = 0$ 'da $T_1 \neq \infty$, $r = a$ 'da $T_1(a) = T_2(a)$, $r = a$ 'da $-\lambda_1 (dT_1)/(dr) = -\lambda_2 (dT_2)/(dr)$ ve $r = b$ 'de $T_2 = T_0$ sınır şartları yardımıyla bulunabilir. Bulunan integral sabitleri, ilgili denklemlerde yerine yazıldığında içteki silindir için sıcaklık dağılımı

$$T_1 = -\frac{q'''}{4} \left(\frac{r^2 - a^2}{\lambda_1} + \frac{2a^2}{\lambda_2} \ln \frac{a}{b} \right) + T_0 \quad (2)$$

şeklinde ve dıştaki silindir için de sıcaklık dağılımı

$$T_2 = -\frac{q''' a^2}{2\lambda_2} \ln \frac{r}{b} + T_0 \quad (3)$$

formunda elde edilir.

3. ELASTİK AŞAMA (ELASTIC STAGE)

İçi dolu bir silindir için, düzlem gerinim (plane strain) durumunda, aksel simetrik durum için ve kütle kuvvetlerinin yokluğunda, silindirik koordinatlarda denge denklemi, $d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0$; kinematik bağıntılar, $\epsilon_r = du/dr$, $\epsilon_\theta = u/r$; uygunluk denklemi, $\epsilon_r = d(r\epsilon_\theta)/dr$; Genelleştirilmiş Hooke

Kanunu $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij}) + \alpha T \delta_{ij}$ ($i, j = r, \theta, z$) şeklindedir.

Gerilme bileşenleri Airy Gerilme Fonksiyonu cinsinden $\sigma_r = \varphi/r$ ve $\sigma_\theta = d\varphi/dr$ olarak tanımlanırsa denge denklemi sağlanır. Hooke kanunu ile uygunluk denklemi kullanılarak ve sıcaklık ifadeleri yerine konularak elde edilen diferansiyel denklem çözüldüğünde, içteki silindir için gerilme bileşenleri ve radyal deplasman aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\sigma_r^I = -\frac{E_1\alpha_1}{(1-\nu_1)}\theta^I(0,r) + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad (4)$$

$$\sigma_\theta^I = \frac{E_1\alpha_1}{(1-\nu_1)}\left[\theta^I(0,r) - T_1\right] + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad (5)$$

$$\sigma_z^I = -\frac{E_1\alpha_1}{(1-\nu_1)}T_1 + \nu_1 C_1 \quad (6)$$

$$u^I = -\frac{1+\nu_1}{E_1} \frac{C_2}{r} + \left[\alpha_1 \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \theta^I(0,r) + \frac{1}{2E_1} (1+\nu_1)(1-2\nu_1) C_1 \right] r \quad (7)$$

Burada üst indis “I” içteki silindiri ifade etmek için kullanılmıştır. $\theta^I(0,r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r T_1 r dr$ ise bir kısaltmadır. Benzer şekilde dıştaki silindir için ise sözkonusu eşitlikler,

$$\sigma_r^{II} = -\frac{E_2\alpha_2}{(1-\nu_2)}\theta^{II}(a,r) + \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{r^2} \quad (8)$$

$$\sigma_\theta^{II} = \frac{E_2\alpha_2}{(1-\nu_2)}\left[\theta^{II}(a,r) - T_2\right] + \frac{C_3}{2} - \frac{C_4}{r^2} \quad (9)$$

$$\sigma_z^{II} = -\frac{E_2\alpha_2}{(1-\nu_2)}T_2 + \nu_2 C_3 \quad (10)$$

$$u^{II} = -\frac{1+\nu_2}{E_2} \frac{C_4}{r} + \left[\alpha_2 \frac{1+\nu_2}{1-\nu_2} \theta^{II}(a,r) + \frac{1}{2E_2} (1+\nu_2)(1-2\nu_2) C_3 \right] r \quad (11)$$

şeklinde elde edilir. Burada üst indis “II” dıştaki silindir için kullanılmış olup bu silindir için

$$\theta^{II}(a,r) = \frac{1}{r^2} \int_a^r T_2 r dr \text{ formunu alır.}$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan C_1, C_2, C_3 ve C_4 integral sabitleri sınır şartlarından elde edilir. Radyal deplasman u^I , $r=0$ ’da sonsuz olamayacağı için (7)’den $C_2=0$ bulunur. Daha sonra $r=a$ ’da $u^I = u^{II}$, $r=a$ ’da $\sigma_r^I = \sigma_r^{II}$ ve $r=b$ ’de $\sigma_r^{II} = 0$ sınır şartları kullanılarak geriye kalan üç adet integral sabiti C_3, C_1 ve C_4 sırayla bulunabilir:

$$C_3 = \frac{B_2}{B_1} \quad (12)$$

$$C_1 = \frac{B_2}{B_1} \frac{a^2 - b^2}{a^2} + \frac{2E_1\alpha_1\theta^I(0,a)}{(1-\nu_1)} + \frac{2b^2E_2\alpha_2}{a^2(1-\nu_2)}\theta^{II}(a,b) \quad (13)$$

$$C_4 = b^2 \left[-\frac{B_2}{2B_1} + \frac{E_2\alpha_2}{1-\nu_2} \theta^{II}(a,b) \right] \quad (14)$$

Burada

$$B_1 = \frac{E_1(1+\nu_2)}{2E_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1)} \left[1 + \frac{a^2(1-2\nu_2)}{b^2} \right] - \frac{a^2/b^2 - 1}{2}$$

ve

$$B_2 = \frac{2a^2/b^2}{1-2\nu_1} E_1\alpha_1\theta^I(0,a) + \left[\frac{E_2\alpha_2(1+\nu_1)(1-2\nu_1) + E_1\alpha_2(1+\nu_2)}{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)(1-\nu_2)} \right] \frac{E_1\alpha_1}{\sigma_0^I} \theta^{II}(a,b)$$

olarak tanımlanmıştır.

4. BİRİNCİ PLASTİK AŞAMA (FIRST PLASTIC STAGE)

Elastik aşamada etken olan (2) ve (3)’te verilen sıcaklık dağılımları, bütün plastik aşamalarda geçerli olmak kaydıyla, kompozit silindirin içindeki uniform ısı üretimi artırılınca “birinci plastik aşama” silindirin merkezinde görülür. Bu aşamada, dıştaki silindirin tamamı elastik kalırken içteki silindirin dış kısmı da başlangıçta elastik kalır. Kompozit silindirin ekseninde ($r=0$) aynı anda başlayan içi içe iki plastik bölge, ısı üretimi artırıldığı sürece dışarıya doğru yayılmaya devam eder. Bu aşamada silindirin merkezinde $\sigma_r = \sigma_\theta > \sigma_z$ olduğunda köşe rejimi (corner regime) meydana gelir.

4.1. Birinci Plastik Bölge, $0 \leq r \leq r_1$, (First Plastic Zone)

Birinci plastik bölgede, Tresca akma şartı aşağıdaki halini alır:

$$\sigma_r - \sigma_z = \sigma_0^I \text{ ve } \sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_0^I \quad (15)$$

Denge denklemi ve Tresca akma şartı kullanılarak gerilme bileşenleri $\sigma_\theta = \sigma_r = C_5$ ve $\sigma_z = C_5 - \sigma_0^I$ şeklinde bulunur. Düzlem gerinim durumu için Hooke kanunu, geometrik bağıntılar ve plastik sıkılaştırılamazlık ilkesinden hareket ederek radyal deplasman ve plastik gerinim ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir [21]:

$$E_1 u = \frac{1}{2}(1-2\nu_1)[3C_5 - \sigma_0^I]r + \frac{C_6}{r} + 3E_1 \alpha_1 \theta^I r \quad (16)$$

$$\varepsilon_r^p = \frac{1}{2E_1}[(1-2\nu_1)C_5 - \sigma_0^I] - \alpha_1(3\theta^I - 2T_1) \quad (17)$$

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{1}{2E_1}[(1-2\nu_1)C_5 - \sigma_0^I] + \alpha_1(3\theta^I - T_1) \quad (18)$$

$$\varepsilon_z^p = -\frac{1}{E_1}[(1-2\nu_1)C_5 - \sigma_0^I] - \alpha_1 T_1 \quad (19)$$

4.2. İkinci Plastik Bölge, $r_1 \leq r \leq r_2$, (Second Plastic Zone)

İkinci plastik bölge, içte oluşan birinci plastik bölgeyi çevreleyecek şekilde, birinci plastik bölge ile aynı anda oluşan bir bölgedir. İkinci plastik bölgede akma şartı, $\sigma_\theta > \sigma_r$, σ_z eşitsizliğine göre $\sigma_\theta - \sigma_z = \sigma_0^I$ şeklindedir. Bu bölge için gerilme bileşenleri, plastik gerinim ve radyal deplasman ifadeleri aşağıdaki gibi bulunabilir [21]:

$$\sigma_\theta = C_7 r^{-1+M} + C_8 r^{-1-M} + \frac{\sigma_0^I}{1-2\nu_1} + \frac{E_1 \alpha_1}{4(1-\nu_1)}[(1-2M)\theta_1 + (1+2M)\theta_2 - 4T_1] \quad (20)$$

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0^I}{1-2\nu_1} + \frac{1}{M} \left\{ C_7 r^{-1+M} - C_8 r^{-1-M} + \frac{E_1 \alpha_1}{4(1-\nu_1)}[(1-2M)\theta_1 - (1+2M)\theta_2] \right\} \quad (21)$$

$$\sigma_z = C_7 r^{-1+M} - C_8 r^{-1-M} + \frac{\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} + \frac{E_1 \alpha_1}{4(1-\nu_1)}[(1-2M)\theta_1 - (1+2M)\theta_2 - 4T_1] \quad (22)$$

$$E_1 \varepsilon_\theta^p = -E_1 \varepsilon_z^p = \left(1 - \nu_1 - \frac{\nu_1}{M} \right) \left[C_7 r^{-1+M} + \frac{1-2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_1 \right] + \left(1 - \nu_1 + \frac{\nu_1}{M} \right) \left[C_8 r^{-1-M} + \frac{1+2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_2 \right] \quad (23)$$

$$E_1 u = 2 \left\{ \left(1 - \nu_1 - \frac{\nu_1}{M} \right) \left[C_7 r^M + \frac{1-2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_1 r \right] + \left(1 - \nu_1 + \frac{\nu_1}{M} \right) \left[C_8 r^{-M} + \frac{1+2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_2 r \right] \right\} + (1 + \nu_1) \sigma_0^I r \quad (24)$$

Bu ifadelerde $\theta_1 = r^{-1+M} \int T_1 r^{-M} dr$,

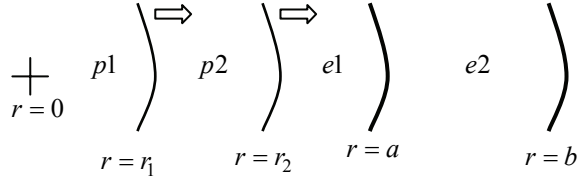
$\theta_2 = r^{-1-M} \int T_1 r^M dr$ ve $M = \sqrt{\frac{1}{2(1-\nu_1)}}$, dir.

4.3. Sınır Şartları ve İntegral Sabitlerinin Bulunması (Boundary Conditions and Determination of Integration Constants)

Buraya kadar yapılan hesaplamalardan görüldüğü gibi $C_1 \dots C_8$ olmak üzere sekiz adet integral sabitine ek olarak plastik bölge sınır yarıçapları r_1 , r_2 olmak üzere toplam 10 adet bilinmeyen bulunması için 10 adet sınır şartına ihtiyaç vardır:

- i) $r = 0$ 'da $u \neq \infty$
- ii) $r = r_1$ 'de $\sigma_r^{p1} = \sigma_r^{p2}$
- iii) $r = r_1$ 'de $\sigma_\theta^{p1} = \sigma_\theta^{p2}$
- iv) $r = r_1$ 'de $\varepsilon_r^{p1} = 0$
- v) $r = r_2$ 'de $\varepsilon_\theta^{p2} = 0$
- vi) $r = r_2$ 'de $\sigma_r^{p2} = \sigma_r^{e1}$
- vii) $r = r_2$ 'de $\sigma_\theta^{e1} - \sigma_z^{e1} = \sigma_0^I$
- viii) $r = a$ 'da $\sigma_r^{e1} = \sigma_r^{e2}$
- ix) $r = a$ 'da $u^{e1} = u^{e2}$
- x) $r = b$ 'de $\sigma_r^{e2} = 0$

Yukarıdaki birinci (i) sınır şartından (silindirin merkezinde radyal deplasman sonsuz olamayacağı için) ve (16)'dan $C_6 = 0$ bulunur. Görüldüğü gibi $r = r_1$ 'de, gerilmeler (ii-iii) için iki, gerinim (iv) için ise bir adet olmak üzere toplam üç adet sınır şartı yazılır. $r = r_2$ 'de ise yine gerinim (v) için bir, gerilmeler (vi-vii) için ise iki adet olmak üzere toplam üç adet sınır şartı yazılır. Bunlardan beşinci ve altıncı sınır şartları (v-vi), plastik bölge yarıçapları r_1 ve r_2 'nin sayısal hesabı için kullanılacaktır (25-26). $r = a$ 'da (arayüzde) ise iki adet sınır şartı (viii-ix) geçerlidir. Son sınır şartı da (x) dış yüzey gerilmesiz olduğu için yazılır. Yukarıdaki ifadelerde, üst indis e "elastik" ve üst indis p "plastik" demek olup yanlarındaki numaralar ise bölge numaralarını göstermektedir. Kompozit silindir içindeki plastik bölgelerin gelişim yönleri Şekil 2'de gösterilmiştir:



Şekil 2. Birinci plastik aşamada, yayılma yönleriyle birlikte plastik bölgelerin gelişimi (Development of plastic zones with their propagation directions in the first plastic stage)

Söz konusu sınır şartları kullanılarak geriye kalan diğer 7 ad. integral sabiti de sırayla elde edilir (Ek A).

Bu integral sabitlerinde $Q = \frac{a}{b}$ ve

$$B = -\frac{(1+\nu_1)}{Q^2} + \frac{b^2(1+\nu_1)}{r_2^2} - \frac{E_1}{E_2} \left[\frac{a^2 + (1-2\nu_1)r_2^2}{(1-2\nu_1)r_2^2} \frac{(1+\nu_2)}{Q^2 - 1} + \frac{1 + (1-2\nu_2)Q^2}{Q^2} \right]$$

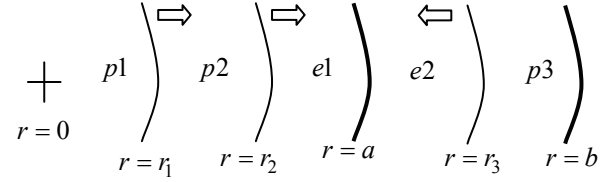
olarak tanımlanmıştır. Plastik bölge yarıçapları r_1 ve r_2 ise beşinci ve altıncı sınır şartından, $r = r_2$ 'de (23)'ün sıfıra eşitlenmesiyle (25) ve yine $r = r_2$ 'de (21)'in (4)'e eşitlenmesiyle (26) elde edilerek birbirinden bağımsız bu iki denklemin (25-26) aynı anda sayısal çözümüyle bulunur:

$$\left(1 - \nu_1 - \frac{\nu_1}{M}\right) \left[C_7 r_2^{-1+M} + \frac{1-2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_1(r_1, r_2) \right] + \left(1 - \nu_1 + \frac{\nu_1}{M}\right) \left[C_8 r_2^{-1-M} + \frac{1+2M}{4(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta_2(r_1, r_2) \right] = 0 \quad (25)$$

$$\frac{1}{M} \left\{ C_7 r_2^{-1+M} - C_8 r_2^{-1-M} + \frac{E_1 \alpha_1}{4(1-\nu_1)} \left[(1-2M) \theta_1(r_1, r_2) - (1+2M) \theta_2(r_1, r_2) \right] \right\} + \frac{\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r_2^2} \quad (26)$$

5. İKİNCİ PLASTİK AŞAMA (SECOND PLASTIC STAGE)

İkinci plastik aşamada akma, ($\sigma_0^I = \sigma_0^{II}$ için) dıştaki silindirin dış yüzeyinde ($r = b$ 'de) başlar. Oluşan bu plastik bölge, 3. plastik bölge ($r_3 \leq r \leq b$) olarak adlandırılır. İçteki silindir ısıtmaya devam ettikçe, bu plastik bölge de içeriye doğru yayılmaya devam eder. Bu esnada, 1. ve 2. plastik bölge de dışarıya doğru yayılmaktadır (Şekil 3). Bunun sonucu olarak arada kalan iki elastik bölge gittikçe daralır ve yük parametresi belirli bir değere geldiğinde bu elastik bölgeler tamamen gözden kaybolur. Böylece kompozit silindir tamamen plastik duruma (fully plastic case) erişmiş olur.



Şekil 3. İkinci plastik aşamada yayılma yönleriyle birlikte plastik bölgelerin gelişimi (Development of plastic zones with their propagation directions in the second plastic stage)

5.1. Üçüncü Plastik Bölge, $r_3 \leq r \leq b$, (Third Plastic Zone)

Dıştaki silindirin dış kısmında oluşan bu plastik bölgede gerilme bileşenleri $\sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_r$ eşitsizliğini sağlar ve Tresca akma şartı $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0^{II}$ şeklinde yazılabilir. Bu bölge için gerilme bileşenleri, radyal deplasman ve plastik gerinim ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir [21]:

$$\sigma_r = \sigma_0^{II} \ln r + C_9 \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_0^{II} (\ln r + 1) + C_9 \quad (28)$$

$$\sigma_z = \nu_2 \left[\sigma_0^{II} (2 \ln r + 1) + 2C_9 \right] - E_2 \alpha_2 T_2 \quad (29)$$

$$u = \frac{1}{E_2} (1 + \nu_2) (1 - 2\nu_2) \left(\sigma_0^{II} \ln r + C_9 \right) r + 2\alpha_2 (1 + \nu_2) \theta^{II}(a, r) r + \frac{1}{E_2} \frac{C_{10}}{r} \quad (30)$$

$$E_2 \varepsilon_r^p = -E_2 \varepsilon_\theta^p = (1 + \nu_2) \left\{ (1 - \nu_2) \sigma_0^{II} + E_2 \alpha_2 \left[T_2 - 2\theta^{II}(a, r) \right] \right\} - \frac{C_{10}}{r^2} \quad (31)$$

5.2. Sınır Şartları ve İntegral Sabitlerinin Bulunması (Boundary Conditions and Determination of Integration Constants)

İkinci plastik aşamada, elastik-plastik arayüz yarıçapının (r_3) ve iki adet integral sabitinin (C_9, C_{10}) "bilinmeyenler" listesine eklenmesiyle, daha önce yazılan 10 adet sınır şartına 3 tane daha ekleme yapmak gerekir. Bu eklemeyi yapmadan önce de, birinci plastik aşamada daha önce $r = b$ 'de yazılan sınır şartının ($\sigma_r^{e2} = 0$), akma serbest yüzeyden (en dış yüzeyden) başladığı için, $\sigma_r^{p3} = 0$ olarak değiştirilmesi gerekir. İki tanesi gerilmeler ve bir tanesi de plastik gerinim için olmak üzere $r = r_3$ 'te üç tane daha sınır şartı, $\sigma_r^{e2} = \sigma_r^{p3}$, $\sigma_\theta^{e2} - \sigma_r^{e2} = \sigma_0^{II}$ ve $\varepsilon_\theta^{p3} = 0$ şeklinde yazılabilir. Birinci plastik aşama için elde edilen integral sabitleri (C_5, C_6, C_7, C_8) ikinci plastik aşama için de geçerlidir. Diğer integral sabitleri ise sırayla bulunur (Ek B).

$r = a$ 'da yazılan sınır şartından ($u^{e1} = u^{e2}$) üçüncü elastik-plastik arayüz yarıçapı r_3 hesaplanır. Böylece, on tanesi integral sabiti ($C_1, C_2 \dots C_{10}$) ve üç tanesi de elastik-plastik arayüz yarıçapı (r_1, r_2, r_3) olmak üzere toplam 13 adet "bilinmeyen" hesaplanmış olur.

6. BOYUTSUZ PARAMETRELERİN TANIMI (DEFINITION OF THE DIMENSIONLESS PARAMETERS)

Sonuçları genelleştirmek amacıyla, geometrik ve ısı parametrelerle birlikte malzeme parametreleri de boyutsuz hale getirilmiştir. Daha önce kullanılanları da dahil edersek bu parametreler, boyutsuz yarıçap $\bar{r} = r/b$, geometrik parametre $Q = a/b$, boyutsuz elastisite modülü $\bar{E} = E_1/E_2$, Poisson oranlarının birbirine göre oranı $\bar{\nu} = \nu_1/\nu_2$, boyutsuz ısı genleşme katsayısı $\bar{\alpha} = \alpha_1/\alpha_2$, boyutsuz ısı iletim katsayısı $\bar{\lambda} = \lambda_1/\lambda_2$, boyutsuz akma dayanımı $\bar{\sigma} = \sigma_0^I/\sigma_0^{II}$ ve boyutsuz yük parametresidir $\bar{q}^m = q^m \alpha_1 E_1 b^2 / (\sigma_0^I \lambda_1)$. Bunlara ek olarak boyutsuz gerilme ve gerinim ifadeleri de içteki silindir için

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0^I}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0^I}, \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0^I}, \bar{u} = \frac{E_1 u}{\sigma_0^I b}, \bar{\varepsilon}_r = \frac{E_1 \varepsilon_r}{\sigma_0^I},$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{E_1 \varepsilon_\theta}{\sigma_0^I}, \bar{\varepsilon}_z = \frac{E_1 \varepsilon_z}{\sigma_0^I} \text{ ve dıştaki silindir için de}$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0^{II}}, \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0^{II}}, \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\sigma_0^{II}}, \bar{u} = \frac{E_2 u}{\sigma_0^{II} b}, \bar{\varepsilon}_r = \frac{E_2 \varepsilon_r}{\sigma_0^{II}},$$

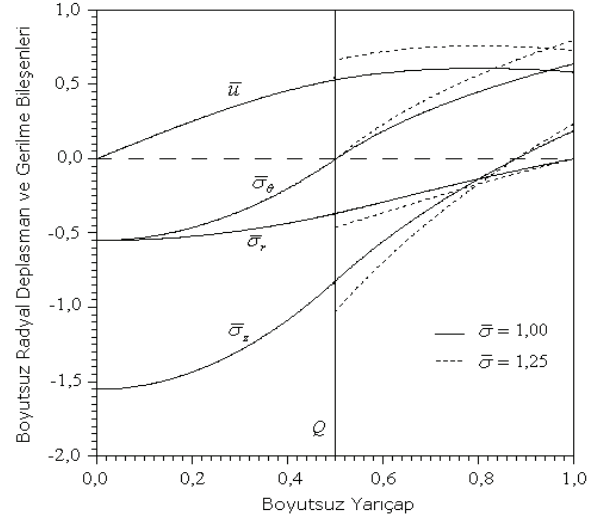
$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{E_2 \varepsilon_\theta}{\sigma_0^{II}}, \bar{\varepsilon}_z = \frac{E_2 \varepsilon_z}{\sigma_0^{II}} \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

7. SAYISAL SONUÇLAR VE TARTIŞMA (NUMERICAL RESULTS AND DISCUSSION)

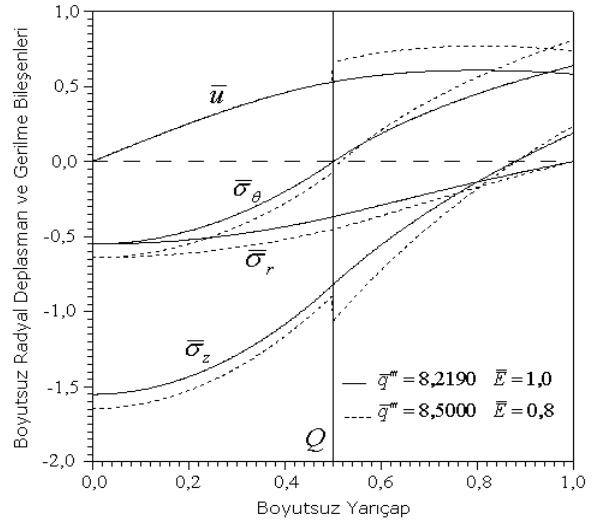
Bu bölümde, boyutsuz parametrelerin değişik değerleri için akmanın başlangıcı ve plastik deformasyonun gelişimi araştırılmış, elde edilen sayısal sonuçlar tartışılmıştır. Kompozit silindirin herhangi bir durumunu ifade ederken, kullanılan boyutsuz parametreler ($\bar{q}^m, Q, \bar{\sigma}, \bar{E}, \bar{\nu}, \bar{\lambda}, \bar{\alpha}$) için herhangi bir sayısal değer belirtilmediyse, o parametrenin değeri 1,0'a eşittir. Örneğin herhangi bir durumu belirtmek için " $Q=0,2$ ve $\bar{q}^m=30,5160$ deniliyorsa, bu durumu ifade etmek için kullanılması gereken diğer parametrelerin hepsi 1,0'a eşittir, yani $\bar{\sigma}=1,0$; $\bar{E}=1,0$; $\bar{\nu}=1,0$; $\bar{\lambda}=1,0$; $\bar{\alpha}=1,0$ demektir.

Değişik $\bar{\sigma}$ değerleri için akmanın başlangıcı Şekil 4'te gösterilmiştir. $Q=0,5$ ve $\bar{q}^m=8,2190$ olduğunda $\bar{\sigma}=1,00$ iken sadece merkezde akma başlar. Halbuki, $\bar{\sigma}=1,25$ olursa aynı yük parametresi için, aynı anda hem merkezde ($r=0$) hem de

arayüzde ($r=a$) akma başlar. Yük parametresi artırıldıkça her iki akma da dışa doğru yayılmaya devam eder.



Şekil 4. $Q=0,5$ ve $\bar{q}^m=8,2190$ için boyutsuz akma dayanımının akmanın başlangıcına etkisi (Influence of dimensionless yield strength on the onset of yield for $Q=0,5$ and $\bar{q}^m=8,2190$).

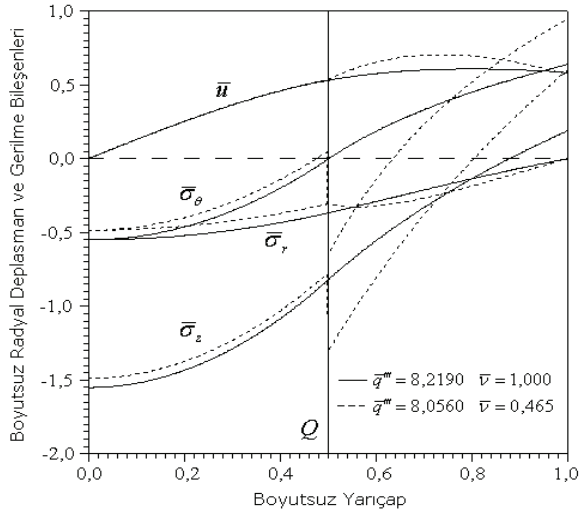


Şekil 5. $Q=0,5$ için boyutsuz elastisite modülünün akmanın başlangıcına etkisi (Influence of dimensionless elastic modulus on the onset of yield for $Q=0,5$).

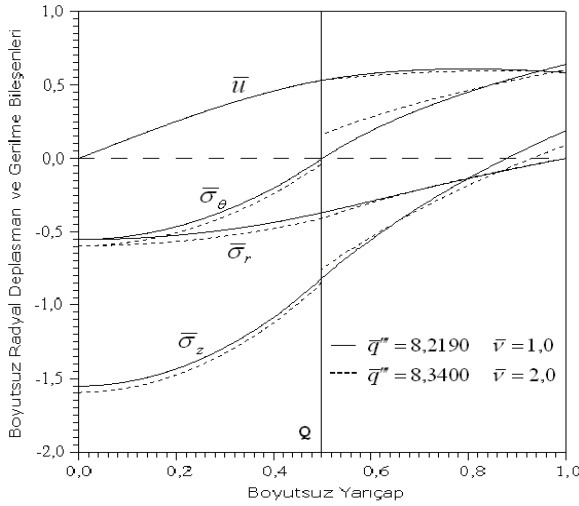
$Q=0,5$ ve $\bar{E}=1,0$ için yük parametresi $\bar{q}^m=8,2190$ olduğunda sadece merkezde akma görülür. Bunun yanısıra yük parametresinin daha yüksek belli bir değeri için ($\bar{q}^m=8,5000$) ve \bar{E} parametresinin daha düşük ($\bar{E}=0,8$) belli bir değeri için hem merkezde ($r=0$) hem de arayüzde ($r=a$) aynı anda akma görülür (Şekil 5). Görüldüğü gibi \bar{E} parametresini düşürmek arayüzdeki akmayı kolaylaştırmaktadır. Bu parametreyi 0,8'in altına düşürmek ise üçüncü plastik bölgenin oluşumunu kolaylaştırır ve bu plastik bölgenin içeriye doğru

ilerlemesini hızlandırır. O yüzden $0,8 < \bar{E} < 1,0$ olacak şekilde seçim yapmak kompozit silindir için daha güvenli olacaktır.

$Q = 0,5$ ve $\bar{\nu} = 1,0$ için yük parametresi $\bar{q}''' = 8,2190$ olduğunda sadece merkezde akma görülür. Aynı Q değerinde, hem merkezde hem de arayüzde akmanın başlaması için $\bar{\nu} = 0,4650$ ve $\bar{q}''' = 8,0560$ olmalıdır (Şekil 6). Bu rakamlar iterasyon yaparak bulunmuştur.



Şekil 6. $Q = 0,5$ için düşük $\bar{\nu}$ değerinin akma başlangıcına etkisi (Influence of low value of $\bar{\nu}$ on the onset of yield for $Q = 0,5$).

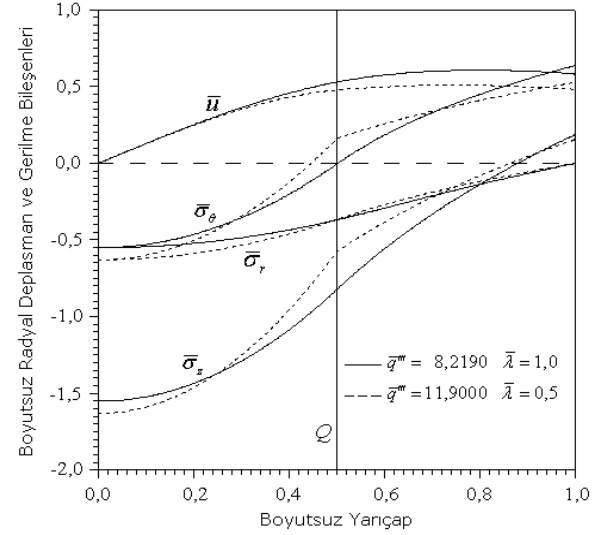


Şekil 7. $Q = 0,5$ için yüksek $\bar{\nu}$ değerinin akma başlangıcına etkisi (Influence of high value of $\bar{\nu}$ on the onset of yield for $Q = 0,5$).

$\bar{\nu}$ değeri düştüğü müddetçe arayüzde ($r = a$) oluşan plastik bölgenin dış doğru yayılımı hız kazanır. Şekil 7'de ise $Q = 0,5$ ve $\bar{\nu} = 2,0$ değerlerinde merkezde akmanın başlayabilmesi için yük parametresinin artması gerektiği ($\bar{q}''' = 8,3400$) görülmektedir. Bir

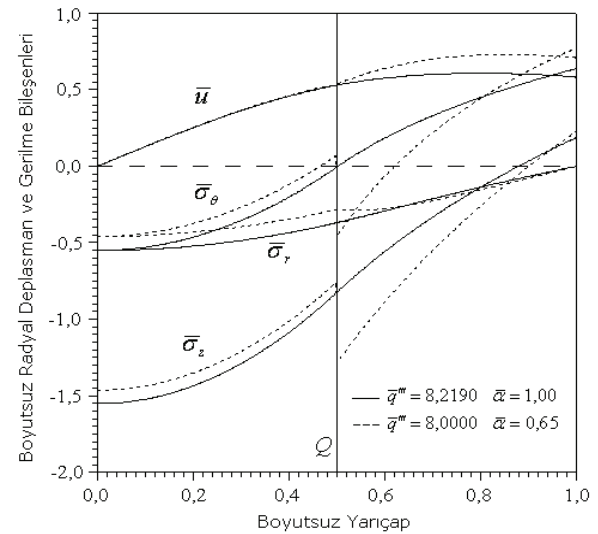
başka ifadeyle $\bar{\nu}$ değerinin artmasıyla merkezde akma zorlaşmakta ve arayüzde ($r = a$) belirgin bir değişiklik görülmemektedir.

$Q = 0,5$ ve $\bar{\lambda} = 0,5$ için, yük parametresi $\bar{q}''' = 11,9000$ gibi yüksek bir değere ulaşıncaya sadece merkezde akma görülür (Şekil 8). $\bar{\lambda} = 2,0$ için ise $\bar{q}''' = 5,0900$ olduğunda merkezde akma başlar. Yukardaki her iki durumda da tüpte akma görülmez.



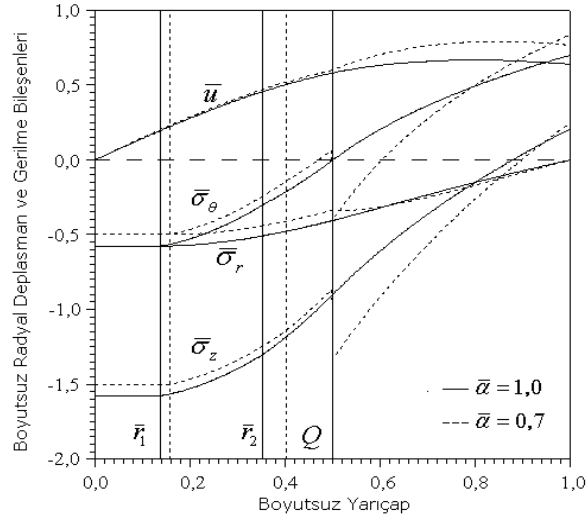
Şekil 8. $Q = 0,5$ için boyutsuz ısı iletkenlik katsayısının akma başlangıcına etkisi (Influence of dimensionless heat conduction coefficient on the onset of yield for $Q = 0,5$).

$Q = 0,5$ ve $\bar{\alpha} = 0,65$ için yük parametresi $\bar{q}''' = 8,0000$ değerine geldiğinde hem merkezde hem de arayüzde akma başlar (Şekil 9).



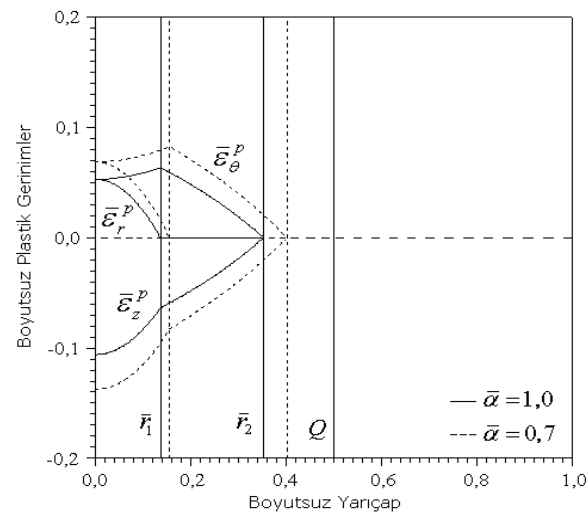
Şekil 9. $Q = 0,5$ için boyutsuz ısı genişleme katsayısının akma başlangıcına etkisi (Influence of dimensionless heat expansion coefficient on the onset of yield for $Q = 0,5$).

$\bar{\alpha}$ değerini 0,65'in altına indirmek, tüpte oluşan plastik bölgenin hızlı ilerlemesine sebep olur. $\bar{\alpha}$ değeri 0,65'in üzerinde olursa tüpte akma görülmez, sadece silindirde akma görülür ve oluşan plastik bölgeler $\bar{\alpha}=1,0$ 'a göre daha hızlı gelişir. Örnek olarak $\bar{\alpha}=0,7$ seçilmiş ve bu durum için plastik bölgelerin gelişimi Şekil 10a ve 10b'de gösterilmiştir:



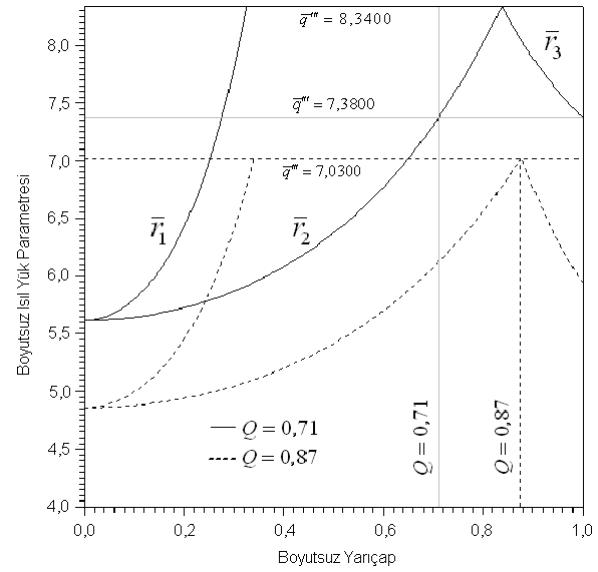
Şekil 10. a) $Q=0,5$ ve belirtilen boyutsuz ısı genleşme katsayıları için boyutsuz radyal deplasman ve gerilme dağılımları (Dimensionless radial displacement and stress distributions for $Q=0,5$ and specified dimensionless heat expansion coefficients).

$\bar{\alpha}=1,0$ için $\bar{r}_1=0,1372$, $\bar{r}_2=0,3533$ ve $\bar{\alpha}=0,7$ için $\bar{r}_1=0,1563$, $\bar{r}_2=0,4025$ 'dir. $\bar{\alpha}=2,0$ için ise merkezde akmanın başlaması ancak yük parametresi $\bar{q}'''=8,4760$ değerine çıktığında mümkün olur. Bu rakamlardan ve Şekil 9'dan anlaşıldığı üzere $\bar{\alpha}>1,0$ olacak şekilde tercih yapmak akmayı zorlaştıracaktır.



Şekil 10. b) $Q=0,5$ ve belirtilen boyutsuz ısı genleşme katsayıları için boyutsuz plastik gerinim dağılımları (Dimensionless plastic strain distributions for $Q=0,5$ and specified dimensionless heat expansion coefficients).

Q parametresinin akmanın başlangıcına etkisini gözlemlemek için Şekil 11'i incelemek gerekir:



Şekil 11. Artan yük parametresine göre plastik bölge sınır yarıçaplarının gelişimi (Propagation of the plastic zone border radii due to the increasing load parameter).

Q parametresi için $Q=0,71$ ve $Q=0,87$ olmak üzere iki adet kritik değer elde edilmiştir: $Q=0,71$ olduğunda $\bar{q}'''=5,6200$ değerinde merkezde akma başlar ve $\bar{q}'''=7,3800$ değerinde ise aynı anda hem silindir tamamen plastik duruma erişir hem de tüpün dışında ($r=b$) akma başlangıcı görülür. Bu durumdaki ($\bar{q}'''=7,3800$) plastik bölge yarıçapları $\bar{r}_1=0,2762$ ve $\bar{r}_2=0,7112$ olarak hesaplanmıştır. $\bar{q}'''=8,3400$ olduğunda ise kompozit silindir bütünüyle plastik olur ve bu durum için plastik bölge yarıçapları $\bar{r}_1=0,3254$, $\bar{r}_2=0,8376$ ve $\bar{r}_3=0,8376$ olarak bulunur. $Q=0,87$ olduğunda ise silindirin içinde dışarı doğru ilerleyen ikinci plastik bölgeyle tüpte oluşup içeriye doğru ilerleyen üçüncü plastik bölge $Q=0,87$ noktasında aynı anda buluşur. Yani bu durum için $Q=\bar{r}_2=\bar{r}_3=0,87$ olur. Bir başka deyişle silindir ve tüp aynı anda tamamen plastik duruma erişir. $Q=0,87$ için merkezde akma $\bar{q}'''=4,8600$ değerinde başlar. $\bar{q}'''=5,9400$ olduğunda ise tüpün dışında ($r=b$) akma görülür. $\bar{q}'''=5,9400$ için plastik bölge yarıçapları $\bar{r}_1=0,2590$, $\bar{r}_2=0,6969$ ve $\bar{r}_3=1,000$ olarak hesaplanmıştır. $\bar{q}'''=7,0300$ olduğunda ise kompozit silindir tamamen plastik hale gelir. Bu haldeki plastik bölge yarıçapları $\bar{r}_1=0,3407$, $\bar{r}_2=0,8771$ ve $\bar{r}_3=0,8771$ 'dir.

8. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışmada, Tresca akma kriteri kullanılarak kompozit silindirde akmanın nerede ve hangi ısı yükte başlayacağı belirlenmiş, malzeme özelliklerinin elastik-plastik deformasyona olan etkisi incelenmiştir. Elde edilen bulgular, özellikle nükleer reaktör çubukları gibi yüksek miktarda ısı üreten uzun silindirik malzemelere ışık tutacak niteliktedir. Sayısal değerlerden de görüldüğü gibi akmanın başlangıcını zorlaştırmak için içteki silindirin yarıçapının, dıştaki silindirin yarıçapına oranı (Q) küçük olmalıdır. Bunun yanı sıra $\bar{\sigma}$ parametresinin 1,0'dan küçük olması dıştaki silindirde akmayı önemli ölçüde zorlaştırır. \bar{E} parametresinin 0,8 ile 1,0 arasında kalması ise hem içteki hem de dıştaki silindirdeki akmayı güçleştirir. $\bar{\lambda}$ parametresinin 1,0'dan küçük olması içteki silindirdeki akmayı, $\bar{\nu}$ ve $\bar{\alpha}$ parametrelerinin ise 1,0'dan büyük olması, hem içteki hem de dıştaki silindirdeki akmanın geç başlamasını sağlar. Sonuç olarak kompozit silindirde akmanın başlangıcını zorlaştırmak için malzeme özelliklerinin $\bar{\sigma} < 1,0$; $0,8 < \bar{E} < 1,0$; $\bar{\nu} > 1,0$; $\bar{\lambda} < 1,0$ ve $\bar{\alpha} > 1,0$ şeklinde tercih edilmesi gerekir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- Hallam, C. B. ve Ollerton, E., "Thermal stresses in axially connected circular cylinders", **Journal of Strain Analysis**, 8, 160-167, 1973.
- Stanley, P. ve Chan, W. K., "The application of thermoelastic stress analysis techniques to composite materials", **Journal of Strain Analysis**, 23, 137-143, 1988.
- Lee, Z.-Y., Chen, C.K. ve Hung, C.-I., "Transient thermal stress analysis of multilayered hollow cylinder", **Acta Mechanica**, 151, 75-88, 2001.
- Orçan, Y. ve Gamer, U., "Elastic-plastic deformation of a centrally heated cylinder", **Acta Mechanica**, 90, 61-80, 1991.
- Orçan, Y., "Thermal-stresses in a heat generating elastic-plastic cylinder with free ends", **International Journal of Engineering Science**, 32, 883-898, 1994.
- Gülgeç, M., "Influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a heat generating elastic-plastic cylinder", **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, 1999, 79, 210-216.
- Gülgeç, M. ve Orçan, Y., "Elastic-plastic deformation of a heat generating tube with temperature-dependent yield stress", **International Journal of Engineering Science**, 38, 89-106, 2000.
- Orçan, Y. ve Gülgeç, M., "Influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a heat-generating tube with free ends", **Journal of Thermal Stresses**, 23, 529-547, 2000.
- Lee, S., Wang, W.L. ve Chen, J.R., "Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder", **Materials Science and Engineering A**, 285, 186-194, 2000.
- Orçan, Y. ve Eraslan, A. N., "Thermal stresses in elastic-plastic tubes with temperature-dependent mechanical and thermal properties", **Journal of Thermal Stresses**, 24, 1097-1113, 2001.
- Gülgeç, M., "Thermal Stress Analysis of a Free-End Cylinder Having a Temperature Dependent Yield Stress Subjected to Transient Radial Temperature Distribution", **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**, Vol 17, No 2, 25-34, 2002.
- Gülgeç, M., "Elastic-Plastic Analysis of a Cylinder Having Temperature Dependent Yield Stress with Rigid Casing", **Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University**, Vol 18, No 3, 85-96, 2003.
- Eraslan, A.N., "Thermally Induced Deformations of Composite Tubes Subjected to a Nonuniform Heat Source", **Journal of Thermal Stresses**, 26, 167-193, 2003.
- Eraslan, A.N., Şener, E. ve Argeso, H., "Stress Distribution in Energy Generating Two-layer Tubes Subjected to Free and Radially Constrained Boundary Conditions", **International Journal of Mechanical Sciences**, 45, 469-496, 2003.
- Chao, C.K., Chuang, C.T. ve Chang, R.C., "Thermal stresses in a viscoelastic three-phase composite cylinder", **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, 48, 258-268, 2007.
- Irfan, M. A. ve Chapman, W., "Thermal stresses in radiant tubes due to axial, circumferential and radial temperature distributions", **Applied Thermal Engineering**, 29, 1913-1920, 2009.
- Bırsan, M., "Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells", **European Journal of Mechanics A/Solids**, 28, 94-101, 2009.
- Shao, Z.S., Fan, L.F. ve Ma, G.W., "Theoretical investigation on thermo-mechanical stresses in laminated cylindrical panels", **Journal of Thermoplastic Composite Materials**, 23, 111-136, 2010.
- Tsukrov, I. ve Drach, B., "Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers", **International Journal of Solids and Structures**, 47, 25-33, 2010.
- Incropera, F.P. ve De Witt, D.P., **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, 2. Baskı, John Wiley & Sons, New York, A.B.D., 1985.
- Öztürk, A., **Ortasından Isıtılan İki Ucu Sabit Kompozit Silindirde Elastik-Plastik Gerilme Analizi**, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

EK A – Birinci Plastik Aşamada Bulunan İntegral Sabitleri

$$C_5 = \frac{2}{(1-2\nu_1)} \left\{ \frac{\sigma_0^I}{2} + E_1 \alpha_1 \left[3\theta^I(0, r_1) - 2T_1(r_1) \right] \right\} \quad (A1)$$

$$C_7 = \frac{1}{2} r_1^{1-M} \left[(1+M)C_5 - \frac{1+M}{(1-2\nu_1)} \sigma_0^I + \frac{E_1 \alpha_1}{(1-\nu_1)} T_1(r_1) \right] \quad (A2)$$

$$C_8 = \frac{1}{2} r_1^{1+M} \left[(1-M)C_5 - \frac{1-M}{(1-2\nu_1)} \sigma_0^I + \frac{E_1 \alpha_1}{(1-\nu_1)} T_1(r_1) \right] \quad (A3)$$

$$C_2 = \frac{b^2}{B} \left\{ -\frac{(1+\nu_1)}{(1-\nu_1)} E_1 \alpha_1 \theta^I(r_2, a) - (1+\nu_1) \sigma_0^I - (1+\nu_2) \frac{E_1}{E_2} \left[\frac{1+(1-2\nu_2)Q^2}{Q^2-1} \right] \right. \\ \left. \left[-\frac{\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} + \frac{E_2 \alpha_2}{(1-\nu_2)} \theta^{II}(a, b) + \frac{E_1 \alpha_1}{(1-\nu_1)} \theta^I(r_2, a) \right] + \frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{(1-\nu_2)} E_1 \alpha_2 \theta^{II}(a, b) \right\} \quad (A4)$$

$$C_1 = \frac{2C_2}{(1-2\nu_1)r_2^2} + \frac{1}{(1-2\nu_1)} \quad (A5)$$

$$C_3 = \frac{2}{1+1/Q^2} \left\{ C_2 \left[\frac{1}{(1-2\nu_1)r_2^2} + \frac{1}{a^2} \right] + \frac{\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} + \frac{E_2 \alpha_2 \theta^{II}(a, b)}{Q^2(1-\nu_2)} - \frac{E_1 \alpha_1 \theta^I(r_2, a)}{1-\nu_1} \right\} \quad (A6)$$

$$C_4 = b^2 \left[\frac{E_2 \alpha_2}{(1-\nu_2)} \theta^{II}(a, b) - \frac{C_3}{2} \right] \quad (A7)$$

EK B – İkinci Plastik Aşamada Bulunan İntegral Sabitleri

$$C_9 = -\sigma_0^{II} \ln b \quad (B1)$$

$$C_{10} = r_3^2 (1+\nu_2) \left\{ (1-\nu_2) \sigma_0^{II} + E_2 \alpha_2 \left[T_2(r_3) - 2\theta^{II}(a, r_3) \right] \right\} \quad (B2)$$

$$C_4 = r_3^2 \left\{ \frac{E_2 \alpha_2}{(1-\nu_2)} \left[\theta^{II}(a, r_3) - \frac{T_2(r_3)}{2} \right] - \frac{\sigma_0^{II}}{2} \right\} \quad (B3)$$

$$C_3 = \frac{E_2 \alpha_2}{1-\nu_2} T_2(r_3) + \sigma_0^{II} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r_3}{b} \right) \right] \quad (B4)$$

$$C_2 = 1 / \left[\frac{1}{(1-2\nu_1)r_2^2} + \frac{1}{a^2} \right] \left[\frac{E_1 \alpha_1}{(1-\nu_1)} \theta^I(r_2, a) - \frac{\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} + \frac{C_3}{2} + \frac{C_4}{a^2} \right] \quad (B5)$$

$$C_1 = \frac{2C_2}{(1-2\nu_1)r_2^2} + \frac{2\sigma_0^I}{(1-2\nu_1)} \quad (B6)$$