

Kısmen Akışkana Daldırılmış Düşey Durumdaki Dikdörtgen Plağın İzogeometrik Sonlu Elemanlar – Sınır Eleman Yöntemi ile Lineer Titreşim Analizi

İbrahim Tuğrul Ardic¹, Erden Yıldızdağ², Ahmet Ergin³

ardici@itu.edu.tr¹, erdenyildizdag@gmail.com², ergina@itu.edu.tr³

^{1,3} Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye

² University of California, Berkeley, USA

ÖZET

Bu çalışmada durağan akışkana kısmen daldırılmış düşey durumdaki dikdörtgen ankastre plakların serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Analizler plağın vakum koşullarındaki ve ıslak durumdaki analizleri olmak üzere iki başlık altında gerçekleştirilmiştir. Her iki durumdaki analizlerde, izogeometrik NURBS konsepti benimsenmiş; plağın vakum koşullarındaki dinamik karakteristiklerini belirlemek amacıyla izogeometrik sonlu elemanlar metodu (IGAFEM) uygulanırken; ıslak durumdaki dinamik karakteristiklerini belirlemek amacıyla ise izogeometrik sınır eleman metodu (IGABEM) tercih edilmiştir. Vakum koşullarındaki yapının hareket denklemleri oluşturulurken Kirchhoff ince plak teorisi benimsenmiştir. Gerçekleştirilen ıslak analizlerde, akışkan viskoz olmayan ve sıkıştırılmaz kabul edilmiş; akışkanın dönel hareketleri ihmal edilmiştir. Akışkan ile plak arasındaki etkileşimin, yalnızca plağın hareketlerinin akışkan ortamında meydana getirdiği basınç alanı aracılığıyla gerçekleştiği kabul edilmiştir. Akışkan-yapı etkileşimi neticesinde plağın dinamik karakteristiklerinde meydana gelen değişimleri saptamak amacıyla lineer hidroelastisite teorisi benimsenmiştir. Vakum koşullarında ve ıslak durumda elde edilen plağın dinamik karakteristikleri (doğal frekanslar ve karşılık gelen mod şekilleri) literatürde yer alan analitik ve deneysel çalışmalar neticesinde elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Sonuçlar irdelendiğinde, izogeometrik NURBS konseptinin akışkan-yapı etkileşimi problemlerine efektif olarak uygulanabileceği gözlemlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Hidroelastisite, Akışkan – Yapı Etkileşimi, İzogeometrik Analiz, NURBS

Makale geçmişi: Geliş 07/02/2019 – Kabul 01/04/2019

Linear Vibration Analysis of Clamped Vertical Rectangular Plates Partially Submerged into Fluid by IGAFEM – IGABEM Approach

İbrahim Tuğrul Ardiç¹, Erden Yıldızdağ², Ahmet Ergin³

ardici@itu.edu.tr¹, erdenyildizdag@gmail.com², ergina@itu.edu.tr³

^{1,3} Department of Naval Architecture and Marine Engineering, Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey

² University of California, Berkeley, USA

ABSTRACT

In this study, the hydroelastic vibration analysis of clamped rectangular plates vertically in contact with quiescent fluid is carried out. The method of analysis is divided into two parts; namely, in-vacuo and wet. Both in-vacuo and wet analyses are conducted by the novel isogeometric NURBS concept; the in-vacuo analysis is carried out by the isogeometric FEM, while, wet analyses are performed by the isogeometric BEM. In in-vacuo analysis, the Kirchhoff thin plate theory is adopted, and the isogeometric FEM formulation for Kirchhoff plate is presented. In wet analysis, fluid is assumed non-viscous and incompressible; the rotational motions of the fluid is neglected. It is also assumed that fluid actions and related pressure distribution over the structure only occur due to modal vibrations of the structure; in other words, it is assumed that both the elastic structure and the surrounding fluid has no forward speed. The linear hydroelasticity theory is adopted in order to determine the wet dynamic characteristics of the structure under the fluid-structure interaction forces. In-vacuo and wet dynamic characteristics (natural frequencies and corresponding mode shapes) are presented comparatively with the available analytical and experimental results in the literature. It is concluded that the present work demonstrates the versatility of the isogeometric analysis concept.

Keywords: Hydroelasticity, Fluid – Structure Interaction, Isogeometric Analysis, NURBS

Article history: Received 07/02/2019 – Accepted 01/04/2019

1. Giriş

Plaklar ve kabuklar, yapısal elemanlar olarak havacılık, gemi endüstrisi, enerji santralleri ve petrokimya endüstrisi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu sebeple akışkanla temas halindeki plak ve kabukların dinamik karakteristiklerinin doğru bir şekilde belirlenmesi, yapının işlevini düzgün bir şekilde yerine getirebilmesi açısından önem arz etmektedir.

Akışkanla temas halindeki plakların dinamik karakteristiklerinin incelenmesi konusundaki temel araştırmalardan birisi, Lindholm ve diğ. (1965) tarafından gerçekleştirilen deneysel çalışmadır. Sonlu

elemanlar yönteminin matematiksel modelinin oluşturulup birçok farklı mühendislik alanında efektif olarak uygulanabileceğinin gösterilmesiyle, Zienkiewicz ve Newton (1969), Marcus (1978) ve Muthuveerappan ve diğ. (1979) sonlu elemanlar metodunu akışkan – yapı etkileşim problemlerine başarıyla uygulamıştır. Sonlu elemanlar yönteminin yanı sıra, ele alınan problemin sınır değer probleminde indirgenerek daha efektif bir şekilde çözümüne imkan tanınması sebebiyle, sınır eleman yöntemi, akışkan – yapı etkileşim probleminin çözümünde sıklıkla tercih edilmektedir. Ergin ve Uğurlu (2003) ve Uğurlu ve diğ. (2008) akışkan yükü altındaki plakların dinamik karakteristiklerini belirlerken, ayrılaştırılmış akışkan – plak ara yüzeyindeki hız potansiyellerini, sınır eleman yöntemiyle elde etmişlerdir. Benzer şekilde Ardıç (2017), kısmen veya tamamen akışkana daldırılmış küresel ve silindirik kabukların dinamik karakteristiklerini incelemek amacıyla, akışkanın plak üzerinde oluşturduğu etkiyi sınır eleman yöntemiyle belirlemiştir. Güncel çalışmalarda ise Canales ve Mantari (2017) kalın kompozit plakların hidroelastik titreşim analizini, yüksek dereceden kayma deformasyonu teorisi altında gerçekleştirmişlerdir. Liao ve Ma (2016) ise akışkanın sıkıştırılabilirliğinin yapının hidroelastik titreşim karakteristikleri üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

İzogeometrik analiz (IGA) konsepti, bir mühendislik sisteminin bilgisayar destekli tasarımında (CAD) ve bilgisayar destekli analizinde (CAE) – bu analiz yapısal, hidrodinamik, elektromanyetik vs. olabilir – oluşturulan geometri ile analiz edilecek olan ayrılaştırılmış geometrinin aynı mertebeden şekil fonksiyonları ile temsil edilmesi olarak tanımlanmaktadır. İzogeometrik analiz yaklaşımının matematiksel altyapısı Hughes ve diğ. (2005) tarafından oluşturulmuş ve kısa zamanda elastostatik (Simpson ve diğ, 2012), akışkan – yapı etkileşimi (Bazilevs ve diğ, 2006a), yapısal titreşim analizi (Shojaee ve diğ, 2012) gibi birçok farklı mühendislik alanında başarıyla uygulanmıştır.

Bu çalışmada, düşey olarak akışkana daldırılmış ankastre dikdörtgen plağın dinamik karakteristikleri, izogeometrik sonlu elemanlar metodu (IGAFEM) ile izogeometrik sınır eleman metodu (IGABEM) kullanılarak araştırılmıştır. Akışkan etkisi altında plağın dinamik karakteristiklerini belirleyebilmek amacıyla lineer hidroelastisite teorisi benimsenmiştir. Akışkan viskoz olmayan ve sıkıştırılmaz kabul edilmiş, akışkanın dönel hareketleri hesaplamalara dahil edilmemiştir. Lineer hidroelastisite teorisi çerçevesinde, ele alınan problem vakum koşulundaki yapının dinamik analizi (kısaca vakum analiz) ve yapı-akışkan etkileşimi problemi analizi (kısaca ıslak analiz) olarak ikiye ayrılmıştır. Vakum analizi Kirchhoff ince plak teorisi kapsamında IGAFEM yaklaşımı kullanılarak gerçekleştirilmiş; elde edilen doğal frekanslar ve karşılık gelen modal titreşim formları akışkan probleminin girdilerini oluşturmuştur. Akışkan etkileri, akışkan – plak ara yüzeyinin noktasal kaynaklar (hydrodynamic point source) kullanılarak ayrılaştırılmasıyla probleme dahil edilmiş, kaynak şiddetleri ise IGABEM yaklaşımıyla belirlenmiştir. Akışkan varlığında elde edilen plağın dinamik karakteristikleri (doğal frekanslar ile karşılık gelen mod şekilleri) literatürde yer alan sayısal ve deneysel sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

2. Matematik Model

2.1. Üniform olmayan oransal B – eğrileri

Karmaşık geometrileri isabetli bir şekilde oluşturabilme kabiliyetinden dolayı, mühendislik tasarımlarında üniform olmayan oransal B – eğrileri sıklıkla kullanılmaktadır. Bu sebeple izogeometrik analiz kapsamında B – eğrileri (B – splines) ve üniform olmayan oransal B – eğrileri (Non – Uniform Rational B – Splines, kısaca NURBS) önemli bir yer teşkil etmektedir.

NURBS konsepti ile oluşturulmuş bir eğri veya yüzey elemanı (NURBS patch); knot vektörü (knot vector), kontrol noktaları ve her bir kontrol noktasının ağırlığı (weight) olmak üzere üç parametre

aracılığıyla ifade edilir. Knot vektörü, eğrinin parametrik uzaydaki koordinatları olarak tanımlanır ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}] \quad \xi_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

bu eşiklikte 'i' knot indeksini (i=1,2,...,n+p+1), 'p' polinomun derecesini, 'n' ise B – eğrilerini tanımlamak amacıyla seçilen şekil fonksiyonu sayısını temsil etmektedir. Kontrol noktaları, oluşturulan eğri veya yüzeyin şeklini belirleyen, şekil fonksiyonlarının vektör değerli katsayılarıdır. Ağırlık terimleri ise eğrinin geometrisi üzerinde her bir kontrol noktasının katkısı olarak tanımlanabilir.

p. dereceden 1-B NURBS eğrisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) P_i \quad (2)$$

burada $R_i^p(\xi)$ p. dereceden oransal şekil fonksiyonu olarak tanımlanır.

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (3)$$

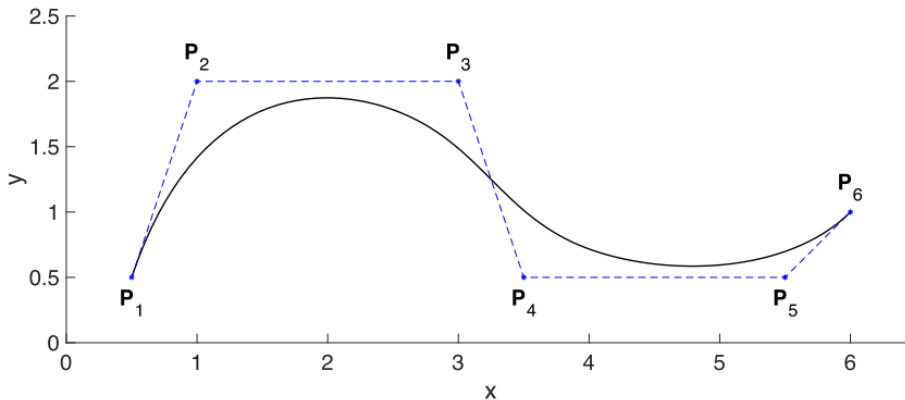
Yukarıdaki eşitlikte P_i , i. kontrol noktasının koordinatlarını, w_i , i. kontrol noktasının ağırlığını, $N_{i,p}$ ise p. dereceden B – eğrisinin şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir ve

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{diğer koşullarda,} \end{cases} \quad (4)$$

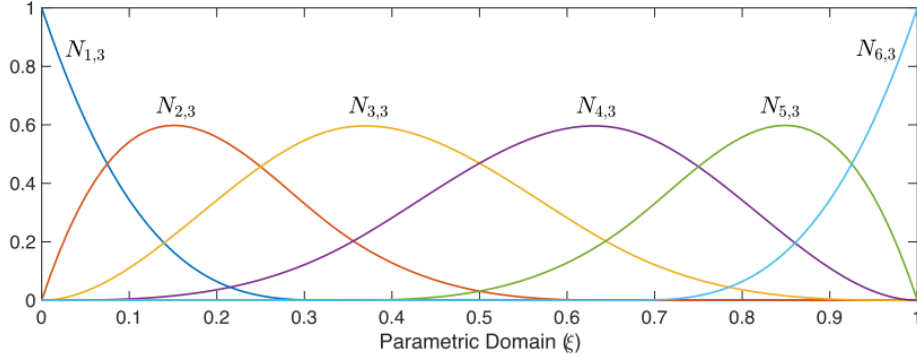
p = 1,2,3,..., olduğu durumda ise,

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. 3. dereceden bir NURBS eğrisi ile eğriyi tanımlamakta kullanılan B – eğrisi şekil fonksiyonları sırasıyla Şekil – 1 ve Şekil – 2’de görülmektedir.



Şekil 1. Knot vektörü $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1]$ olan eşit ağırlıklandırılmış bir NURBS eğrisi.



Şekil 2. Knot vektörü $\Xi = [0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1]$ olan 1-B B – eğrisine ait şekil fonksiyonları.

Benzer şekilde, 2-B NURBS yüzeyi ise aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (6)$$

bu eşitlikte $R_{i,j}^{p,q}$, 2-B oransal şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\xi) w_{i,j}}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) M_{j,q}(\xi) w_{i,j}} \quad (7)$$

Denklem 6'da $P_{i,j}$, NURBS yüzeyini oluşturmak için kullanılan kontrol noktaları ağını temsil etmektedir. Denklem 7'de yer alan $N_{i,p}$ ve $M_{j,q}$ ise sırasıyla $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ ve $\Upsilon = [\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_{n+p+1}]$ knot vektörleri ile tanımlanan p. ve q. dereceden B – eğrisi şekil fonksiyonlarıdır.

2.2. Vakum analizi

Bu bölümde, ince plaklar için vakum koşullarında serbest titreşim probleminin matematik modeli sunulmuştur. Ankastre plağın serbest titreşim problemi, Kirchhoff plak teorisi kullanılarak modellenmiş; plağın kesitine dik doğrultudaki normal gerilmelerin etkisi ihmal edilmiştir. Yapısal sönümün ihmal edildiği durumda çok serbestlik dereceli sistemin serbest titreşim problemi aşağıdaki matris formda diferansiyel denklem takımı ile temsil edilmektedir

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{w}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{w}\} = 0 \quad (8)$$

bu eşitlikte $[\mathbf{M}]$ ve $[\mathbf{K}]$ sırasıyla $N \times N$ boyutlarında global kütle ve rijitlik matrisleridir. IGAFEM yaklaşımında e. eleman için rijitlik matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir

$$[\mathbf{K}^e] = \int_{\Omega^e} [\mathbf{B}^e][\mathbf{D}][\mathbf{B}^e] d\Omega^e \quad (9)$$

$[\mathbf{B}^e]$ vektörü ise

$$[\mathbf{B}^e] = [B_{1,1}^e \ B_{2,1}^e \ \dots \ B_{p+1,q+1}^e], \quad B_{i,j}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 R_{i,j}^e}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial^2 R_{i,j}^e}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 R_{i,j}^e}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

formundadır. Eleman kütle matrisi ise aşağıdaki gibidir

$$[\mathbf{M}^e] = \int_{\Omega^e} (\rho t [\mathbf{N}_1^e]^\top [\mathbf{N}_1^e] + \rho \frac{t^3}{12} [\mathbf{N}_2^e]^\top [\mathbf{N}_2^e]) d\Omega^e \quad (11)$$

$[\mathbf{N}_1^e]$ vektörü ile $[\mathbf{N}_2^e]$ matrisi ise

$$[\mathbf{N}_1^e] = [R_{1,1}^e \ R_{2,1}^e \ \dots \ R_{p+1,q+1}^e] \quad (12)$$

$$[\mathbf{N}_2^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}^e}{\partial x} & \frac{\partial R_{2,1}^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{p+1,q+1}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{1,1}^e}{\partial y} & \frac{\partial R_{2,1}^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{p+1,q+1}^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

formundadır. (9) ve (11) eşitliklerinde yer alan Ω^e terimi, e. elemanın yüzey alanını temsil etmektedir. (10), (12) ve (13) eşitliklerinde yer alan $R_{i,j}^e$ terimi e. elemanın sıfırdan farklı oransal şekil fonksiyonlarını temsil etmektedir. (9) eşitliğinde yer alan $[\mathbf{D}]$ matrisi ise düzlem gerilme durumu için elastisite tensörü olarak tanımlanır ve lineer izotropik malzemeler için aşağıdaki formdadır

$$[\mathbf{D}] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (14)$$

bu eşitlikte E ve ν sırasıyla malzemenin Elastisite modülü ile Poisson oranını temsil etmektedir. Bu bilgiler ışığında (8) eşitliği ile tanımlanan özdeğer probleminin çözülmesiyle, plağın vakum koşullarındaki doğal frekansları ile her bir doğal frekansa karşılık gelen modal titreşim formları elde edilir.

2.3. Islak analiz

Plağın temas halinde olduğu akışkanın ideal olduğu; bir başka deyişle akışkanın sıkıştırılmaz, viskoz olmayan ve hareketlerinin irrotasyonel olduğu durumda, plağın titreşimleri neticesinde oluşan akışkan hareketlerini temsil eden bir hız vektörü vardır ve bu vektör akışkan hız potansiyeli fonksiyonunun gradyeni olarak tanımlanır

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = \nabla \Phi(x, y, z, t) \quad (15)$$

bu eşitlikte yer alan akışkan hız potansiyeli fonksiyonu ise plağın modal titreşimleri neticesinde ıslak yüzeyinde oluşan hız potansiyellerinin süperpozisyonu şeklinde ifade edilebilir

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^M \text{Re}[i\omega \phi_j(x, y, z) e^{i\omega t}] \quad (16)$$

Bu eşitlikte yer alan ϕ_j terimi, plağın j. vakum modunda titreştiği durumda ıslak yüzey boyunca meydana gelen akışkan hız potansiyelini temsil etmektedir. Bu durumda akışkan – plak ara yüzeyinde kinematik sınır koşulu gereği, plak ile akışkanın yüzeye normal doğrultudaki hız bileşenleri eşit büyüklükte olmalıdır

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n} \quad (17)$$

burada \mathbf{u}_r , vakum koşullarındaki plağın izogeometrik sonlu elemanlar analizi neticesinde elde edilen yüzey normaline doğrultusundaki modal yer değiştirmelerini temsil etmektedir. Akışkan serbest yüzeyinde ise, plağın titreşimlerinin yüksek frekans bölgesinde olduğu göz önünde bulundurularak, sonsuz frekans koşulunun

$$\phi_r = 0 \quad (18)$$

geçerli olduğu kabul edilmiştir. Bu çalışmada akışkan serbest yüzeyindeki sonsuz frekans koşulu, imaj metodu (Ergin ve Uğurlu, 2003) aracılığıyla probleme dahil edilmiştir. Akışkan – plak ara yüzeyindeki hız potansiyeli, sınır integral formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$c\phi(P) = \iint_{S_w} q(Q) \phi^*(P, Q) ds(Q) - \iint_{S_w} \phi(Q) q^*(P, Q) ds(Q) \quad (19)$$

Bu eşitlikte S_w , akışkan-plak etkileşim arayüzünün tamamını temsil etmektedir. Eşitlik (19)'da tanımlanan integral denklemi, akışkan – plak ara yüzeyi ile oluşturulan imajiner yüzeyin, NURBS şekil fonksiyonları aracılığıyla temsil edilen 2-B sınır elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmasıyla,

$$c_k \phi_k^{(r)} + \sum_{e=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} \iint_{S_{w+e}^e} R_{i,j}^e(\xi, \eta) \phi_{i,j}^{e(r)} q^*(P, Q) d\Gamma(Q) = \sum_{e=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} (\mathbf{u}_{r,ij} \cdot \mathbf{n}_{r,ij}) \iint_{S_{w+e}^e} R_{i,j}^e(\xi, \eta) \phi^*(P, Q) d\Gamma(Q) \quad (20)$$

$k = 1, \dots, n_{cp}$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlikte n_p , ayrıklaştırmada kullanılan panel adedini, n_{cp} ise ayrıklaştırılan yüzeyi temsil eden toplam kontrol noktası sayısını temsil etmektedir. S_{w+e}^e , e. panelin ıslak ve imajiner yüzeyleridir. $\mathbf{u}_{r,ij}$ ve $\mathbf{n}_{r,ij}$ sırasıyla her bir kontrol noktasındaki modal yer değiştirmeler ile yüzey normal vektörünü temsil etmektedir. r indisi ise Denklem (20) ile tanımlanan matris eşitliğinin tatbik edildiği modun numarasını ifade eder. Son olarak, $\phi^*(P, Q)$ ve $q^*(P, Q)$ terimleri ise sırasıyla 3-B Laplace probleminin Green fonksiyonu ile Green fonksiyonun gradyanını temsil etmektedir.

Her bir moda karşılık gelen ıslak yüzeydeki hız potansiyelleri elde edildikten sonra, plağa etkileyen akışkan kuvvetlerini temsilen eksu kütlesi değerleri aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanabilir (Ergin ve Uğurlu, 2003)

$$A_{rk} = \frac{\rho}{\omega^2} \sum_{e=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} \iint_{S_{w+e}^e} R_{i,j}^e \phi_{i,j}^{e(r)} [\mathbf{u}_{r,ij} \cdot \mathbf{n}_{r,ij}] d\Gamma \quad (21)$$

bu eşitlikte ρ ve ω sırasıyla akışkanın özkütlesi ile doğal frekansını temsil etmektedir. Akışkan hareketlerinin yalnızca plağın modal titreşimleri neticesinde meydana geldiği ve plağın görece yüksek frekans bölgesinde titreştiği durumda, akışkanın plak üzerinde oluşturduğu etkinin yalnızca eksu kütlesi olarak ele alınabileceği ve sönüm etkilerinin ihmal edilebilir olduğu söylenebilir. Bu durumda akışkan – yapı etkileşimi etkisi altındaki plağın hareket denklemi matris formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$[-\omega^2(\mathbf{a} + \mathbf{A}) + \mathbf{c}] \mathbf{u} = 0 \quad (22)$$

bu eşitlikte \mathbf{a} ve \mathbf{c} matrisleri sırasıyla plağın genelleştirilmiş kütle ve rijitlik matrisleridir. \mathbf{A} matrisi ise her bir terimi (21) eşitliği kullanılarak elde edilen, $M \times M$ boyutlarındaki eksu kütleli matrisidir. (22) eşitliği ile tanımlanan hareket denkleminin çözülmesiyle, plağın ıslak frekansları, ω , ile her bir ıslak frekansa karşılık gelen ıslak mod şekilleri, \mathbf{u} , elde edilir.

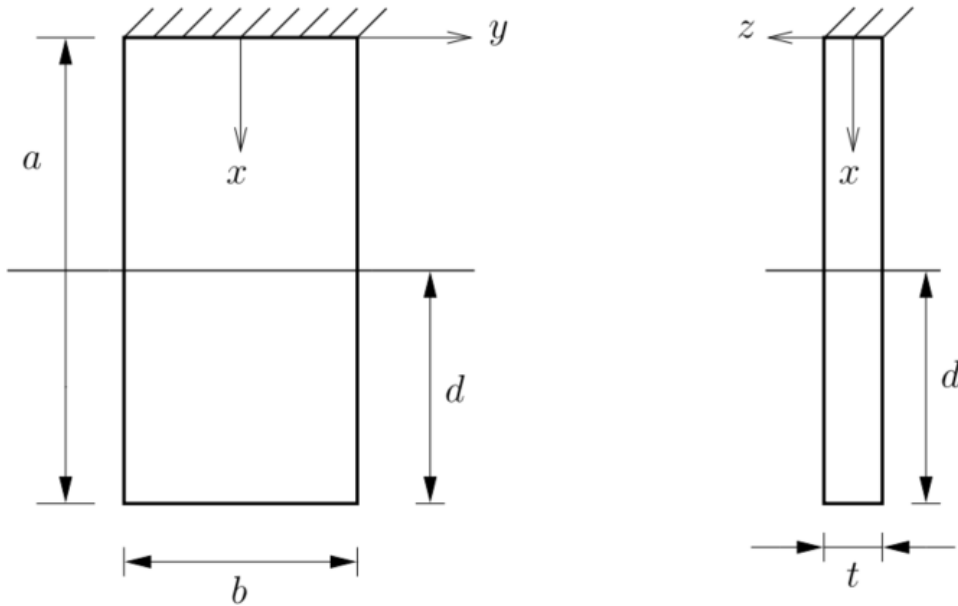
3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, kısmen akışkana daldırılmış düşey durumdaki dikdörtgen plağın izogeometrik sonlu elemanlar – sınır eleman yöntemi ile elde edilen dinamik karakteristikleri, literatürde yer alan sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Sayısal hesaplamalarda Lindholm ve diğ. (1965) tarafından ele alınan dikdörtgen plağın dinamik karakteristikleri incelenmiştir. Şekil 3’de geometrisi tanımlanmış olan plağın uzunluğu $a = 1.016$ m, genişliği $b = 0.2032$ m, ve kalınlığı $t = 4.84$ mm.’dir. Plak çelik malzemeden imal edilmiştir ve Elastisite Modülü $E = 206.8$ GPa, Poisson oranı $\nu = 0.3$, yoğunluğu $\rho_s = 7830$ kg/m³’dür. Plağı çevreleyen akışkanın yoğunluğu ise $\rho_f = 1000$ kg/m³’dür.

3.1. Vakum analizi

Bu bölümde, mekanik ve geometrik karakteristikleri tanımlanmış olan dikdörtgen plağın vakum koşullarındaki doğal frekansları ile karşılık gelen titreşim mod şekilleri, Bölüm 2.2’de belirtilen izogeometrik sonlu elemanlar yöntemi aracılığıyla elde edilmiştir.



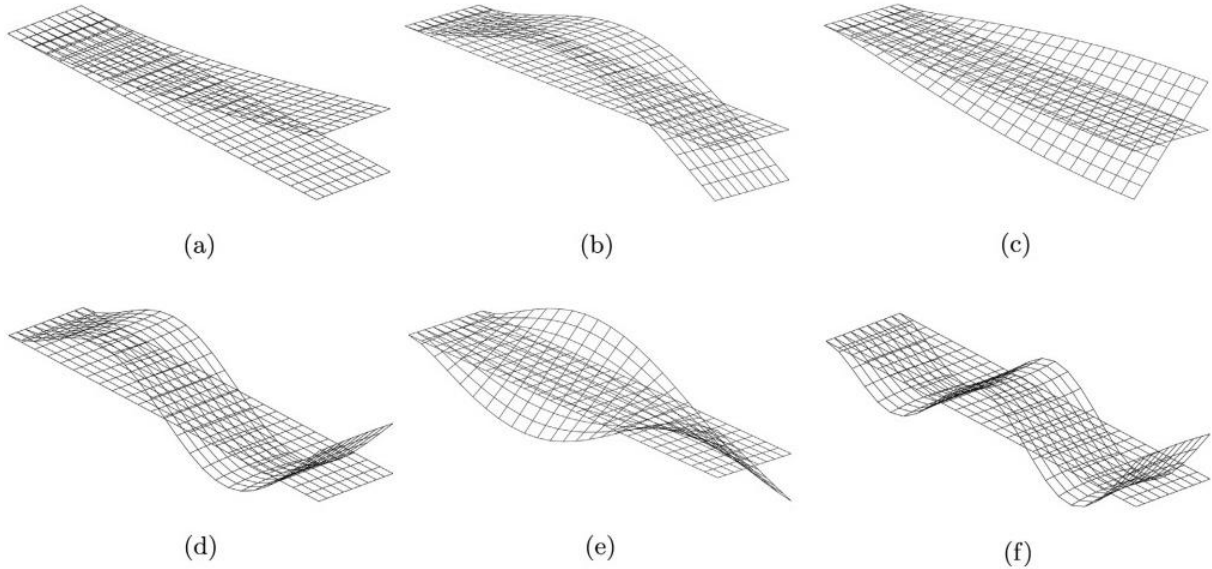
Şekil 3. Ankastre dikdörtgen plağın geometrik karakteristikleri.

Vakum analizinde, dikdörtgen plak eni doğrultusunda 16 eleman; boyu doğrultusunda ise 64 eleman olacak şekilde toplamda 1024 adet yüzey elemanı ile ayrıklaştırılmıştır. Geliştirilen matematik model ile hesaplanan sonuçlar, Kwak ve Yang’ın (2013) yarı – analitik yöntemle ve Lindholm ve diğ. (1965) deneysel olarak elde ettiği sonuçlar ile benzer problemin ANSYS sonlu elemanlar yazılımı kullanılarak modellendiği durumda elde edilen sonuçlar ile birlikte, Tablo 1’de karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Tablo 1. Dikdörtgen plağın vakum koşullarındaki doğal frekansları (Hz).

Mod numarası	Mod şekli	IGAFEM	FEM (ANSYS)	Kwak ve Yang (2013)	Lindholm ve diğ. (1965)
		(1024 eleman)	(1024 eleman)		
1	S	3.94	3.95	3.98	3.84
2	S	24.69	24.72	24.91	24.20
3	A	39.37	39.13	39.55	39.10
4	S	69.32	69.33	69.84	68.10
5	A	120.44	119.71	121.05	121.00
6	S	136.39	136.28	137.35	-

Tablo – 1’de sunulan sonuçlar, mod şekillerinin simetrik (S) ve antisimetrik (A) olma özelliklerine göre isimlendirilmiştir. Plağın boyuna doğrultusunda, iki yan kenarın ortasından geçen bir eksen olduğu düşünülmüş ve bu eksen simetri ekseni olarak seçilmiştir. Bu tanımlama kapsamında, 1,2,4 ve 5 no’lu modların simetrik; 3 ve 6 no’lu modların ise antisimetrik olduğu gözlemlenmektedir (Şekil – 4). Ayrıca 3 ve 5 no’lu mod şekillerinin burulma titreşimlerine; 1,2,4 ve 6 no’lu modların ise plağın eğilme titreşimlerine karşılık geldiği görülmektedir. Bu çalışma kapsamında izogeometrik sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçların, literatürdeki çalışmalar neticesinde elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir. Şekil – 4’de vakum koşullarında ilk 6 titreşim modu görülmektedir.



Şekil 4. Dikdörtgen plağın vakum koşullarında ilk 6 mod şekli: (a) 1.mod (3.94 Hz.), (b) 2.mod (24.69 Hz.), (c) 3.mod (39.37 Hz.), (d) 4.mod (69.32 Hz.), (e) 5. Mod (120.44 Hz.), (f) 6.mod (136.39 Hz.)

3.2. Islak analiz

Dikdörtgen plağın ıslak analizinde hesaplamalar, $d/a = 0.25, 0.50, 0.75, 1$ olacak şekilde dört farklı derinlik oranı için gerçekleştirilmiştir. Sonuçların yakınsaklığını analiz etmek amacıyla dört farklı ayrıklaştırma durumu için, plağın ilk 6 ıslak frekans değeri dikkate alınmıştır. İlk grup ayrıklaştırmada, dört farklı daldırma oranı için ($d/a = 0.25, 0.50, 0.75, 1$) plak enine doğrultuda 4 eleman ve boyuna doğrultuda sırasıyla 4, 8, 12 ve 16 eleman olacak şekilde, sırasıyla toplamda 44, 84, 124 ve 164 panel kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. İkinci grup ayrıklaştırmada, enine doğrultudaki eleman sayısı 6’ya

çıkartılmış; boyuna doğrultuda sırasıyla 6, 12, 18 ve 24 eleman olacak şekilde, sırasıyla 90, 174, 258 ve 342 panel kullanılmıştır. Benzer şekilde, yine dört farklı daldırma durumunda, üçüncü grup ayrıklaştırmada panel sayısı sırasıyla 152, 174, 440 ve 584'e; dördüncü grup ayrıklaştırmada ise 230, 450, 670 ve 890'a çıkarılmıştır.

Tablo – 2 ve 3'de dört farklı daldırma durumunda, her bir daldırma durumu için bir önceki paragrafta belirtilen dört grup ayrıklaştırma neticesinde elde edilen ilk 6 ıslak doğal frekans için yakınsaklık analizi sonuçları görülmektedir. Tablolar incelendiğinde, üçüncü ve dördüncü grup ayrıklaştırma neticesinde elde edilen ıslak frekans değerleri arasındaki farkın tüm daldırma oranları için oldukça küçük olduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 2. $d/a = 0.25$ ve 0.5 daldırma oranları için plağın ilk 6 ıslak doğal frekans değerlerinin yakınsaklığı.

Mod numarası	Mod şekli	Daldırma Oranı (d/a)							
		0.25				0.5			
		44 eleman	90 eleman	152 eleman	230 eleman	84 eleman	174 eleman	296 eleman	450 eleman
1	S	2.34	2.30	2.29	2.29	1.78	1.81	1.84	1.86
2	S	21.40	21.41	21.42	21.42	17.08	16.34	16.08	15.98
3	A	30.88	29.97	29.67	29.42	26.15	25.34	25.16	25.16
4	S	62.75	61.69	61.06	60.67	54.90	53.56	53.03	52.80
5	A	106.13	105.46	105.30	105.25	99.80	96.62	95.34	94.87
6	S	123.68	120.39	118.79	117.93	112.06	105.34	102.29	100.84

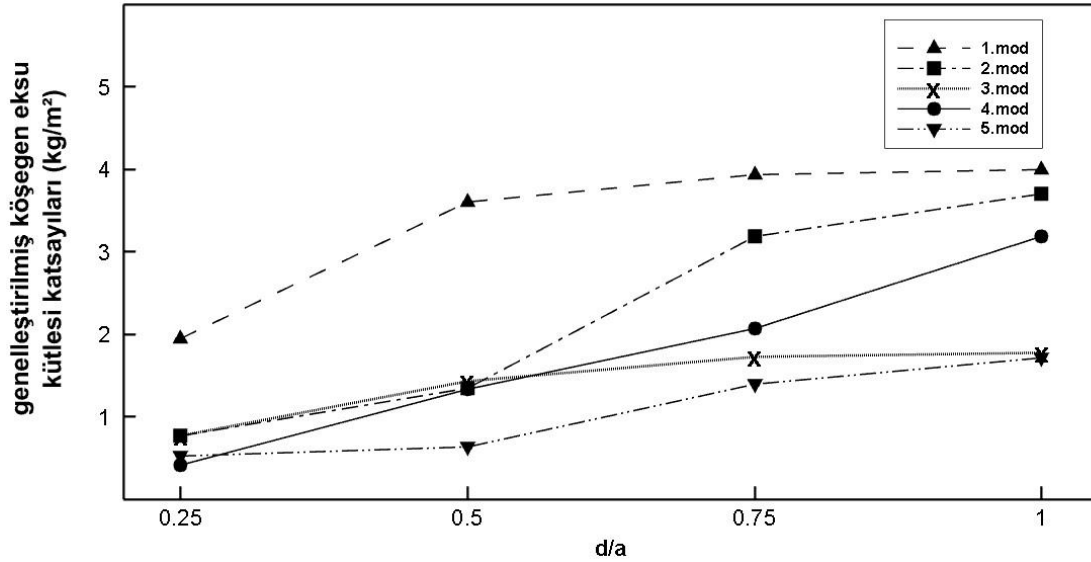
Tablo 3. $d/a = 0.75$ ve 1.0 daldırma oranları için plağın ilk 6 ıslak doğal frekans değerlerinin yakınsaklığı.

Mod numarası	Mod şekli	Daldırma Oranı (d/a)							
		0.75				1.0			
		124 eleman	258 eleman	440 eleman	670 eleman	164 eleman	342 eleman	584 eleman	890 eleman
1	S	1.68	1.72	1.75	1.77	1.66	1.71	1.74	1.76
2	S	12.53	12.18	12.11	12.11	11.46	11.36	11.40	11.45
3	A	24.92	24.09	23.86	23.85	24.64	23.85	23.65	23.64
4	S	44.23	41.19	39.99	39.48	36.76	34.88	34.29	34.12
5	A	83.13	79.14	77.73	77.30	77.70	74.35	72.96	71.82
6	S	100.92	93.14	89.46	87.65	82.70	75.66	73.32	73.10

Tablo 4. Elde edilen ilk 6 ıslak frekans değerinin deneysel sonuçlar ile karşılaştırılması.

Mod no.	Mod şekli	Bu çalışma					Lindholm ve diğ. (1965)				
		Vakum koşulları	Daldırma oranı (d/a)				Vakum koşulları	Daldırma oranı (d/a)			
			0.25	0.5	0.75	1.0		0.25	0.5	0.75	1.0
1	S	3.94	2.29	1.86	1.77	1.76	3.84	2.17	1.82	1.79	1.78
2	S	24.69	21.42	15.98	12.11	11.45	24.20	21.01	15.50	11.99	11.50
3	A	39.37	29.42	25.16	23.85	23.64	39.10	29.75	25.50	24.20	24.20
4	S	69.32	60.67	52.80	39.48	34.12	68.10	57.36	51.61	38.27	33.50
5	A	120.44	105.25	94.87	77.30	71.82	121.00	106.35	95.99	79.00	75.26
6	S	136.39	117.93	100.84	87.65	73.10	-	-	-	-	-

Tablo 4’de bu çalışmada elde edilen ıslak frekans değerleri, Lindholm ve diğ. (1965) deneysel çalışmaları neticesinde elde edilen frekans değerleri ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Tablodan da görüleceği üzere bu çalışmada elde edilen frekans değerleri, deneysel sonuçlar ile uyum içindedir. Sonuçlar arasındaki fark, 0.2% - 5.8% arasındadır. Ayrıca plağın daldırma oranı arttıkça, bir başka deyişle plağın akışkan ile temas eden yüzeyi arttıkça, plak üzerindeki akışkan eksu kütlesi değeri arttığı için, ıslak doğal frekansların değerinin azaldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 5. İlk 5 moda karşılık gelen genelleştirilmiş eksu kütlesi katsayılarının daldırma oranı (d/a) ile değişimi.

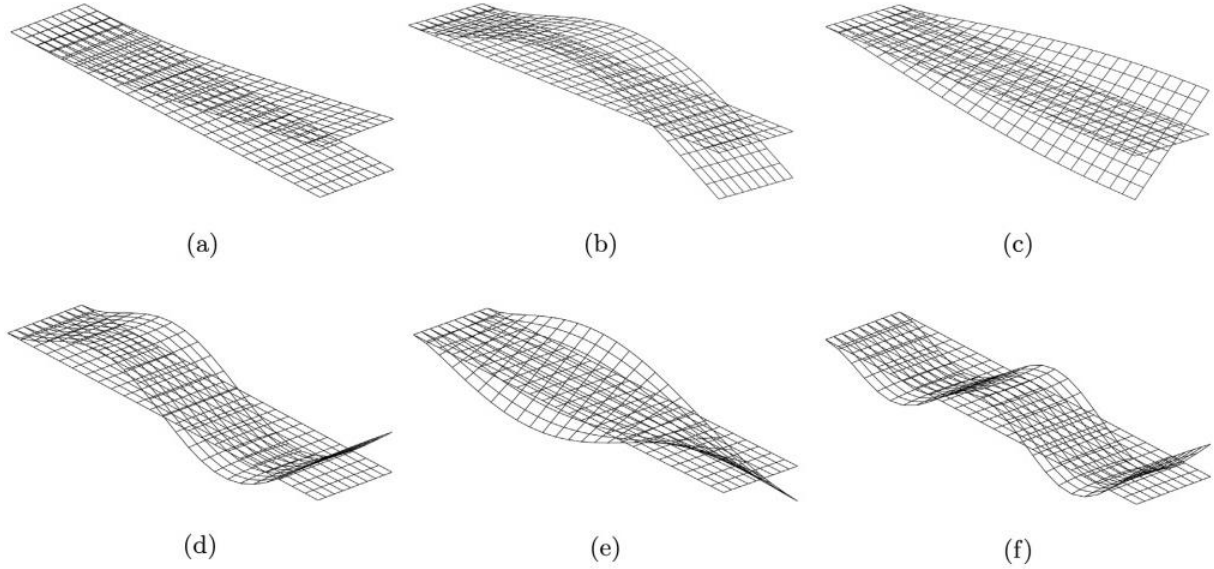
Şekil 5’de dört farklı daldırma oranı için ($d/a = 0.25, 0.5, 0.75, 1$) ilk 5 moda karşılık gelen genelleştirilmiş köşegen eksu kütlesi katsayıları görülmektedir. Eksu kütlesi katsayıları, genelleştirilmiş kütle değerine göre (1 kgm^2) normalize edilmiştir. Grafikten de görüleceği üzere, tüm modlar için plağın daldırma oranı (d/a) arttıkça, karşılık gelen köşegen eksu kütlesi katsayısı büyümektedir.

Tablo 5. $d/a = 0.5$ için ilk 6 moda karşılık gelen genelleştirilmiş eksu kütlesi katsayıları matrisi (kgm^2).

Mod no.	1 (S)	2 (S)	3 (A)	4 (S)	5 (A)	6 (S)
1 (S)	3.368	0.380	0.000	0.735	0.000	0.510
2 (S)	0.380	1.361	0.000	1.030	0.000	0.004
3 (A)	0.000	0.000	1.396	0.000	0.516	0.000
4 (S)	0.735	1.030	0.000	1.364	0.000	0.644
5 (A)	0.000	0.000	0.516	0.000	0.630	0.000
6 (S)	0.510	0.004	0.000	0.644	0.000	1.027

Tablo 5’de, $d/a = 0.5$ için ilk 6 moda karşılık gelen genelleştirilmiş eksu kütlesi katsayıları matrisi (kgm^2) görülmektedir. Bölüm 2.3’de de belirtildiği üzere, Tablo – 5’de yer alan genelleştirilmiş eksu kütlesi katsayıları, plağın akışkanla temas ettiği durumda vakumdaki mod şekillerinde titreştiği varsayımı altında hesaplanmıştır. Tablo – 5 incelendiğinde, genelleştirilmiş eksu kütlesi katsayıları matrisinin köşegen elemanlarının, diğerlerine göre oldukça büyük değerler aldığı gözlemlenmektedir. Plağın burulma titreşimlerine karşılık gelen 3 ve 5 no’lu modları ile, eğilme titreşimlerine karşılık gelen 1,2,4 ve 6 no’lu modlarının kendi aralarındaki hidrodinamik etkileşimin, burulma modları ile titreşim modları arasındaki hidrodinamik etkileşime nazaran oldukça kuvvetli olduğu görülmektedir. Ayrıca matrisin karşılıklı köşegen simetrik elemanlarının aynı değerleri alması sebebiyle, karşılıklı modların birbirleri

üzerindeki hidrodinamik etkilerinin aynı olduğu söylenebilir. Şekil – 6’da ise plağın $d/a = 0.5$ daldırma oranı için ilk 6 ıslak mod şekilleri görülmektedir. Genelleştirilmiş eksu kütleleri katsayıları matrisinde köşegen elemanların köşegen olmayanlara göre oldukça büyük değerler alması sebebiyle, vakumdaki ile ıslak mod şekilleri arasındaki farklılığı ihmal edilebilir düzeyde olduğu gözlemlenmektedir (Şekil – 4 ve Şekil – 6).



Şekil 6. Dikdörtgen plağın $d/a = 0.5$ daldırma durumunda ilk 6 ıslak mod şekli: (a) 1.mod (1.86 Hz.), (b) 2.mod (15.98 Hz.), (c) 3.mod (25.16 Hz.), (d) 4.mod (52.80 Hz.), (e) 5. Mod (105.25 Hz.), (f) 6.mod (120.39 Hz.)

4. Sonuçlar ve Değerlendirmeler

Bu çalışmada kısmen akışkana daldırılmış düşey durumdaki dikdörtgen plağın izogeometrik sonlu elemanlar – sınır eleman yöntemi ile hidroelastik titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Lineer hidroelastisite teorisi kapsamında, dikdörtgen plağın titreşim problemi vakum koşullarındaki dinamik analizi (kısaca vakum analiz) ve akışkan ortamındaki analizi (kısaca ıslak analiz) olarak ikiye ayrılmıştır. Elde edilen vakum koşullarındaki ve ıslak durumdaki doğal frekans değerleri, literatürdeki analitik ve deneysel yöntemler aracılığıyla elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar irdelendiğinde, izogeometrik sonlu elemanlar ve sınır eleman yöntemlerinin, dinamik akışkan – yapı etkileşimi problemlerinin çözümünde efektif olarak uygulanabileceği gözlemlenmiştir. Ayrıca, uygun giriş elemanlarının matematik modele dahil edilmesi ile izogeometrik sonlu elemanlar metodu stifnerli plaklara ve kabuklara da uygulanabilmektedir. Gelecek çalışmalarda stifnerli plak ve kabukların akışkan varlığındaki dinamik karakteristiklerinin incelenmesinin yanı sıra, serbest yüzey Green fonksiyonunun kullanıldığı sınır eleman metodu ile oluşturulacak matematik model aracılığıyla, hibrit yöntemin gemi ve açık deniz yapılarının hidroelastik titreşim problemlerine uygulanması planlanmaktadır.

5. Kaynaklar

Ardıç, T. (2017). Kısmen veya tamamen akışkana daldırılmış sonsuz derin akışkan ortamındaki kabukların hidroelastik ve elastoakustik analizi. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

- Bazilevs, Y., Calo, V., Zhang, Y., Hughes, T.J. (2006a). Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Comput. Mech.* 38, 310–322.
- Canales, F., Mantari, J. (2017) Laminated composite plates in contact with a bounded fluid: free vibration analysis via unified formulation. *Composite Structures.* 162, 374-387.
- Ergin, A., Uğurlu, B. (2003). Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid. *J. Fluid Struct.* 17, 927–939.
- Hughes, T.J., Cottrell, J.A., Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis: cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 194, 4135–4195.
- Kwak, M.K., Yang, D.H. (2013). Free vibration analysis of cantilever plate partially submerged into a fluid. *J. Fluid Struct.* 40, 25–41.
- Liao, C.Y., Ma, C.C. (2016) Vibration characteristics of rectangular plate in compressible inviscid fluid. *J. Sound Vib.* 362, 228-251.
- Lindholm, U.S., Kana, D.D., Chu, W.H., Abramson, H.N. (1965). Elastic vibration characteristics of cantilever plates in water. *J. Ship Res.* 9, 11–22.
- Muthuveerappan, G., Ganesan, N., Veluswami, M. (1979). A note on vibration of a cantilever plate immersed in water. *J. Sound Vib.* 63, 385–391.
- Shojaee, S., Izadpanah, E., Valizadeh, N., Kiendl, J. (2012). Free vibration analysis of thin plates by using a nurbs-based isogeometric approach. *Finite Elem. Anal. Des.* 61, 23–34.
- Simpson, R.N., Bordas, S.P., Trevelyan, J., Rabczuk, T. (2012). A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 209, 87–100.
- Uğurlu, B., Kutlu, A., Ergin, A., Omurtag, M. (2008). Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid. *J. Sound Vib.* 317, 308–328.
- Zienkiewicz, O., Newton, R. (1969). Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid. In: *Symposium on Finite Element Techniques.* Univ. of Stuttgart, Germany.