Dicle Üniversitesi
Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi

Dicle University
Journal of Ziya Gökalp Faculty of Education

Matematik Eğitiminde Sözsüz İspatlar: Kuramsal Bir Çalışma

Kübra POLAT[1], Handan DEMİRCİOĞLU[2]

[1] *Araştırma Görevlisi, Cumhuriyet Üniversitesi, kubraapolaat@hotmail.com.tr*

[2] *Yardımcı Doçent Doktor, Cumhuriyet Üniversitesi, handandemircioglu@gmail.com*

Geliş Tarihi/Received: 18.11.2015 **Kabul Tarihi/Accepted:** 12.8.2016 **e-Yayım/e-Printed:** 17.10.2016

DOI: http://dx.doi.org/10.14582/DUZGEF.686

ÖZ

Bu çalışmada matematik eğitiminde ispat ve sözsüz ispat kavramlarının rolü ve önemi üzerine odaklanılmıştır. Sözsüz ispatlar; gerçek ispatlar olarak kabul edilemeyecek fakat özel bir ifadenin niçin doğru olduğunu hatta bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağının görülmesine yardımcı olacak diyagram veya resimler olarak tanımlanmaktadır. Sözsüz ispatların gerçek ispatlar olup olmadığına dair tartışmaların olmasıyla beraber sözsüz ispatlara yönelik kullanılan ifadelerde de ortak bir görüş bulunmamaktadır. Sözsüz ispatların gerçek ispatlar olup olmadığına yönelik tartışmalara rağmen sözsüz ispatlar gerek matematik gerekse matematik eğitimi için önemli araçlar olarak görülmektedir. Bu çalışmada sözsüz ispatlarda önemli bir yere sahip olan görselleştirme ve ispatın birbiri ile ilişkileri incelenmiştir. Bu amaç doğrultusunda görselleştirmenin, matematiksel ispatın ve sözsüz ispatın tanımı, matematik eğitimindeki rolü, amacı ve matematik müfredatındaki ispatın rolüne ilişkin açıklama ve tartışmalara yer verilmiştir. Ayrıca çalışmada sözsüz ispat örneklerine ve sözsüz ispatların üstün ve zayıf yönlerine değinilerek sözsüz ispatlar kuramsal olarak ele alınmıştır. Ayrıca sözsüz ispatlarla görselleştirme arasındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İspat, görselleştirme, sözsüz ispat, matematik öğretimi

Proof Without Words in Mathematics Education: A Theoretical Study

ABSTRACT

This study focused on the role and importance of the concept of mathematical proof and proof without words in mathematics teaching. “ Proof without words” are pictures or diagrams that help the observer see why a particular statement may be true and also to see how one might begin to go about proving it true. There are discussions on whether “Proof without words” is real or not. There is not common view in the literatüre on expressions which ise used for “Proof without words”. However, proof or not proof, “Proof without words” are valuable tools in mathematics, expecially in teaching. It was also investigated the relationship between visualization and proof without words. For this purpose, explanations and discussions such as what is the definition of the concept of visualization, mathematical proof and proof without words, its aims, and its role in the mathematics curriculum were included in the context of this paper. Also, in this study there are examples of proof without words and we offered advantage and disadvantage of “Proof without words” in theoretical framework.

Keywords: Proof, visualization, proof without words, mathematics teaching

1. GİRİŞ

Matematikte ve matematik eğitiminde ispatın rolü ve önemi yadsınamazken ve bu doğrultuda eğitim hayatları boyunca öğrenciler ispatlar ile karşı karşıya getirilmelerine rağmen ispat her dönemde zorlanılan bir konu olmuştur (Jones, 2000). Yeni reformlar doğrultusunda öğretmenlerden öğrencileri için ispatla ilgili zengin öğrenme ortamları ve fırsatları sunmaları beklenmektedir (Knuth, 2002a). Yeni matematik eğitim programına göre öğrencilere kazandırılması istenen matematiksel süreç becerilerinden matematiksel akıl yürütme ile matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme ve matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013) davranışların geliştirilmesi hedeflenmiştir.

Ayrıca NCTM'nin beş süreç standardından biri ispat yöntemlerini ve akıl yürütme tiplerini seçmektir (NCTM, 2000). Geleceğin öğretmenlerinin farklı ispatları bilmeleri ve kendisi için bu tür ispatlar yapmaları ve de öğrenciye yansıtabilmek için bunları öğrenmesi bir gerekliliktir (Almeida, 1996). Bu çalışma kapsamında öğrenciler için alternatif veya formal ispatları desteklemek için bir ispat yöntemi olarak sunulabilecek olan sözsüz ispat kuramsal bir çerçevede sunulmaya çalışılmıştır.

1.1. Matematiksel İspat

İspat, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2012). Hanna (1991) ispatı, bir ifadeyi geçerli kılmak için gerekli olan, ikna edici olduğu sürece çeşitli formlarda sunulabilen bir tartışma olarak tanımlamıştır.

İspat kavramını matematiğe Antik Yunanlılar getirmiştir. İspatın ilk kullanımı genellikle M.Ö 6. yüzyılda yaşamış Miletli Thales'e dayandırılmaktadır. 3. Yüzyılda Euclid, geometride aksiyomlara dayalı ispat kavramını getirmiştir. Günümüzde ise pür matematiğin bütün branşlarında aksiyomlara dayalı ispat kullanılmaktadır. Sezgi, deney hatta oyun, matematiksel çevrede kesinlik kadar önemlidir. Çünkü sezgilerimiz ispatlamaya çalışacağımız yeni sonuçlara karar vermemizi sağlar. Sezgi ve formal kesinlik arasındaki ilişki önemsiz bir mesele değildir (Bloch, 2011). Bell (1976), ispatı bir önermenin doğruluğunu geçerli kılmak veya doğrulama, açıklama ve sistematikleştirme olmak üzere üç boyutta incelemiştir ve iyi bir ispattan bir önermenin neden doğru olduğuna dair bir öngörü taşımasının gerekliliğinden söz etmiştir. Benzer şekilde Hanna (2000) iyi bir ispatın hem teoremin anlamını anlamamıza hem de teoremin niçin doğru olduğunu anlamamıza yardımcı olması gerektiğini belirtmiştir.

Kayagil (2012) bir ispatın iki şekilde yapılabileceğini belirtmiştir, ilki bir ifadenin doğruluğunun gösterimi, diğeri ise bir ifadenin neden doğru olduğunun açıklanması şeklindedir. Yani matematiksel ispat hem ikna edicidir hem de açıklayıcıdır. Matematik araştırmalarında ispatın ilk rolü ikna edici olmasıyken sınıfta veya fakülte seviyesindeki ilk rolü açıklayıcı olmasıdır (Hersh, 1993).

İspat ile ilgili yurt içinde ve yurt dışında çok fazla çalışma vardır. Bu çalışmalar incelendiğinde, çalışmaların ilköğretim, ortaöğretim öğrencilerinin yanı sıra matematik öğretmeni adaylarının ve matematik öğretmenlerinin ispatlama ile ilgili yaşantılarını, ispat becerilerini ve geometrik ispat becerilerini etkileyecek unsurları ve çeşitli ispat yöntemine yönelik ispatlama becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik olduğu görülmektedir (Aylar, 2014; Keskin, Akbaba Dağ & Altun, 2013; Jones, 2000; Knuth, 2002a; 2002b; Kayagil, 2012; Arslan & Yıldız, 2010; Gökkurt & Soylu, 2014; İskenderoğlu & Baki, 2011; Şimşek E., Şimşek A. & Dündar, 2013; Yılmaz, 2015). Yapılan araştırmalarla Bunlara ek olarak görselleştirme ve ispat ile ilgili çalışmalar da (Doruk & Güler, 2014; Tekin & Konyalıoğlu, 2010) mevcuttur.

1.2. Görselleştirme ve İspat

Görselleştirmenin matematiğe ve matematik eğitimine katkısından ötürü görselleştirmenin epistemolojik doğasını ortaya çıkarabilmek için pek çok soru ortaya çıkmıştır ve nihayetinde bu sorulara cevap bulabilmek için birçok araştırma yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir (Hanna & Sidoli, 2007). Bu bölümde matematiksel ispatın bazı yönlerinde faydalı olduğu düşünülen görselleştirmenin nasıl kullanılabileceğine değinilmiştir.

Görselleştirme zihinden geometri yapma, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturma ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı (farklı perspektiften nasıl görüneceği ve çeşitli dönüşümlerin sonuçlarını tahmin etmeyi) içermekle beraber iki ve üç boyutluların zihinsel koordinasyonunu kapsamaktadır. Bir şekil hakkında zihnen düşünmeyi, şekli zihinsel olarak dönüştürme ve manipüle etmeyi gerektiren herhangi bir etkinlik öğrencilerin görselleştirme becerilerinin gelişimine katkıda bulunacaktır (Van De Walle, 2014).

Diyagramlar ve diğer görsel sunumlar matematiğin her alanında her daim kullanılmıştır. Herhangi bir teoremin ispatında görsel sunumlar sezgisel olarak yardımcı olarak teoremin ispatına girmişlerdir. Böylelikle sadece bir teoremi ve onun ispatını anlamayı kolaylaştırmakla kalmamış aynı zamanda sık sık ispatın yapılandırılması için yol gösterip ispat için ilham vermişlerdir. Ancak son 20 yıldır görsel sunumlar geleneksel ispatlar için alternatif olarak düşünülmeye başlamıştır. Bugün hala ispatta görsel sunumların rolü üzerine pek çok ihtilaf vardır ve pek çok araştırma halen yapılmaktadır. Bu ihtilaflara rağmen pek çok araştırmacı resimlerin, diğer görsel sunumların sınırlı olsa bile faydalı olduğunu ileri sürmektedir (Hanna & Sidoli, 2007). Görselleştirmenin sözsüz ispatlarda özel bir cazibesi vardır çünkü okuyucudan teorem veya ifadenin doğruluğunu göstermesi yerine "kelimelerle doldurması istenmektedir". Sözsüz ispatlar yapılırken işaretler çizilmesi, tartışılması, kağıt üzerine diyagram veya karalamalar yapılması; yorumlama, yaratma ve düşünmeyi içerdiğinden görselleştirme bu durumda bir süreç olarak değerlendirilebilirken; sözsüz ispat veya final resmi ürün olarak görselleştirme olarak değerlendirilebilmektedir (Gierdien, 2007).

1.3. Sözsüz İspat

Matematik alanında ispat ve ispat yöntemlerine yönelik net ve üzerinde ortak kanata sahip olunan bir yaklaşımın olmayışı, eğitim literatüründe de ispat olarak kabul edilip edilmeyeceği tartışılan ispat adlandırılmalarının varlığına zemin oluşturmaktadır. Sözsüz ispatlar buna örnektir (Aylar, 2014)." *Proof Without Words*" olarak da adlandırılan sözsüz ispatlar (*non-verbal proofs*) kimi yabancı kaynaklarda "*visual proof*" olarak adlandırılmaktadır (Alsina & Nelsen, 2001; Bardelle, 2010; Goldoni, 2002; Tekin & Konyalıoğlu, 2010). Dede ve Karakuş (2014) ise yaptıkları çalışmada Nelsen'ın "*Proof Without Words II: Exercises in Visual Thinking"* kitabında Liu Hui tarafından yayınlamış olan Pisagor Teoreminin ispatını açıklayıcı ispat kategorisine dahil etmişlerdir. Yine bu çalışmada Alsina ve Nelsen'nın "*An Invitation to Proofs Without Words*" isimli çalışmasında sözsüz ispatı verilmiş olan "1'den n'ye kadar n tane ardışık tam sayının toplamının" ispatı görsel ispat kategorisi altında verilmiştir. Ayrıca sözsüz ispat örneklerinden bazılarını Bayer (2009) ve Britz ve diğerleri (2014) "*Proof By Picture*" olarak ifade etmiştir. Aşağıda Tablo 1 de yurt içinde ve yurt dışında sözsüz ispatlar için kullanılan ifadelere yer verilmiştir.

Tablo1. Sözsüz ispat için yurt içinde ve yurt dışında kullanılan ifadeler

Kullanılan İfadeler	Kaynaklar
Proof Without Words (Sözsüz İspatlar)	Gierdien (2007), Bell (2011), Yassin (2013), Karras (2012), Nelsen (1993, 2000)
Visual Proof (Görsel İspatlar)	Goldoni, (2002), Alsina ve Nelsen (2001), Bardelle (2010), Strausova ve Hasek (2012), Çağlayan (2015), Johson (1993)
Proof By Picture (Resimlerle İspat)	Britzvd (2014), Bayer (2009);Brown (1997); Kobayashi (2010)
Proofs and Pictures (İspatlar ve Resimler)	
Pictorial Proof (Resimsel İspatlar)	
Sözsüz İspat	Uğurel, Moralı ve Karahan (2011)
Görsel İspat	Karakuş ve Dede (2014), Tekin ve Konyalıoğlu (2010)
Resimli İspat	Ufuktepe (2009)

Tablo 1'de görüldüğü üzere yurt içinde ve yurt dışında incelenen kaynaklar göz önüne alındığında sözsüz ispat için kullanılan ifadeler birbirinden farklılık göstermesine rağmen incelendiğinde birbirinin aynı olan ispatların farklı isimlerde verildiği görülmüştür. Aşağıda bu duruma birkaç örnek verilmiştir.

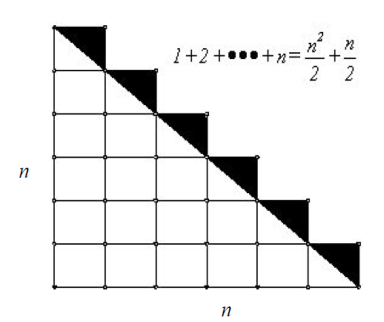
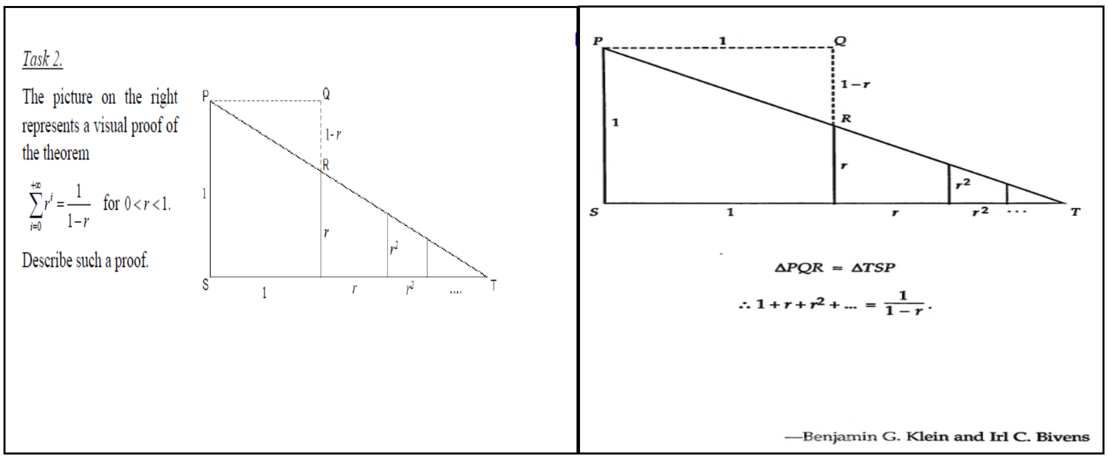


Figure 2. Visual representation or proof without words

Gierdien (2007), *From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in secondary mathematics*." İsimli çalışmasında "*visual representation*" ve "*proof without words*" ifadelerinin her ikisini birden kullanmıştır.

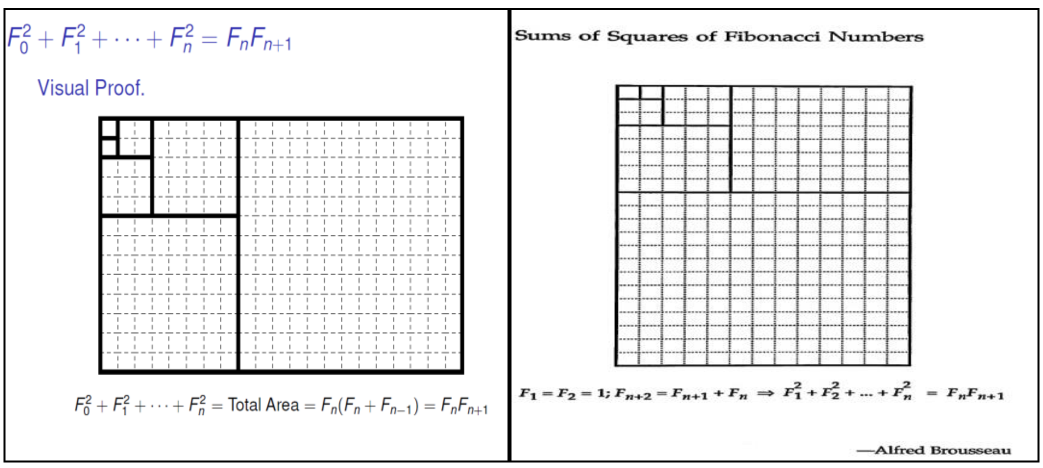
Şekil 1. İlk n tam sayısının toplamı



Şekil 2. Geometrik seriler

Bardelle (2010), "*Visual Proofs: An Experiment*" isimli çalışmasında geometrik serilerle ilgili teoremin ispatını "*visual proof*" olarak kullanmıştır.

Klein ve Bivens tarafından yapılmış olan bu ispat Nelsen'ın "*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*" kitabında yayınlanmıştır.



Şekil 3. Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı

Fibonacci sayıları ile ilgili olan ispat Bayer (2009) "*Proof By Picture*" isimli çalışmasında "*Visual proof*" olarak kullanılmıştır.

Brousseau tarafından yapılmış olan ispat Nelsen'ın "*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*" kitabında yayınlanmıştır.

Sözsüz ispatlar eski olmalarına rağmen günümüzde yeniden popüler olmaya başlamıştır. Sözsüz ispatın ne olduğu sorusunun cevabını vermek çok da kolay değildir. Bu yaklaşımı literatüre kazandıranlardan Nelsen (1993) sözsüz ispatı; gerçek ispatlar olarak kabul edilemeyecek fakat özel bir ifadenin niçin doğru olduğunu hatta bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağının görülmesine yardımcı olacak diyagram veya resimlerdir diye tanımlamıştır. Gerçekten Euclid'in "*Elements*" kitabında yer verdiği ve şekillerden yola çıkılarak ispatı yapılmış olan "Bütün üçgenler ikizkenardır" teoreminde matematiksel yanılgı (*mathematical fallacy*) söz konusudur. Bu ispattaki hata, yürütülen mantıktan çok şekle dayanarak yapılan kabullerde yatmaktadır. Aşağıda Wallace ve West tarafından şekil ile yapılmış olan ispatı verilmiştir (Wallece & West, 2004; s. 42).

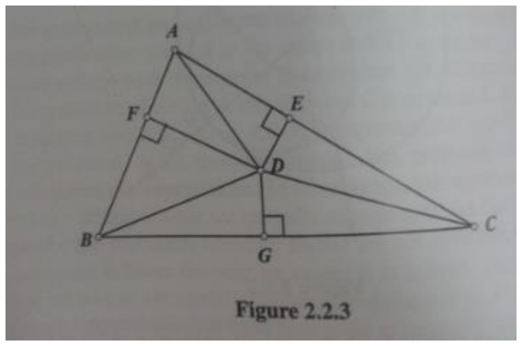
Teorem. *Bütün üçgenler, ikizkenardır!*

İspat.

- ΔABC de $\angle A$ nın açıortayı, $\overline{BC}$ nin orta dikmesini D de kessin.
- $\overline{DF}$ ve $\overline{DE}$, D den $\overline{AB}$ ve $\overline{AC}$ ye dikmeler olsun.
- $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ ve $\overline{DC}$ yi çizelim (Şekil 4).
- Euclidyen eşlik bağıntılarından $\Delta ADF \cong \Delta ADE$ (AAK), $\Delta BGD \cong \Delta CGD$ (KAK) dir.

- Dolayısıyla $\Delta BDF \cong \Delta CDE$
- Bu takdirde eğer bu eş üçgenlerin karşılıklı eş olan parçalarını toplarsak AB=AF+FB=AE+EC=AC buluruz.

Bu da ΔABC üçgeninin ikizkenar olduğu (!) anlamına gelir.



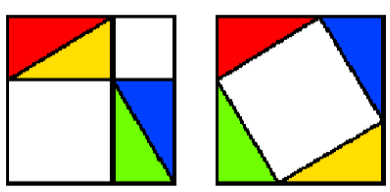
Şekil 4. Bütün üçgenler ikizkenardır teoreminin ispatı (Wallece & West, 2004; s. 42)

Miller (2012) yapılmış olan ispat tanımlarından yola çıkarak ispatın iki tarafının olduğunu belirtmiştir. Bir tarafta teoremlerden ve aksiyomlardan hareketle bir ifadenin doğruluğunu göstermek varken, diğer tarafta hiçbir form olmadan sadece ikna edici olması vardır. Bu nedenle "sözsüz ispatlar ispat mıdır yoksa değil midir?" sorusuna cevap vermek güçtür. Çünkü ispat kavramına yüklenen anlamlar birbirinden farklıdır. Casselman (2000) ise sözsüz ispatı, görsel sunumların kullanıldığı, resim veya matematiksel bir fikri, eşitliği veya teoremi göstermek için görsel araçların kullanıldığı bir ispat olarak tanımlamıştır. Bell (2011)'e göre sözsüz ispat, kelimeyle resmi bir argüman olmadan bir matematiksel ifadenin ispatını resimleyen bir çizimdir. Sözsüz ispatlar geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermemektedir (Gierdien, 2007). Arcavi (2003) sözsüz bir ispatın sadece sözsüz değil aynı zamanda bir ispat olduğunu tartışır.

Bu bölümde sözsüz ispatların tanımına ve sözsüz ispat için kullanılan ifadelere değinilmiştir. Aşağıda sözsüz ispatların tarihçesine ve sözsüz ispatların yer aldığı kaynaklara değinilmiştir.

1.4. Sözsüz İspatın Tarihçesi

Eski matematikçiler matematiksel fikirlerini resimlerle ifade ederlerdi. Zhou Bi Suan'ın yapmış olduğu Pisagor teoremin aşağıdaki ispatı buna örnektir (Miller, 2012).



—adapted from the Chou pei suan ching
(author unknown, circa B.C. 200?)

Şekil 5. Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı

Sözsüz ispatlar "*Mathematical Assosiation of America*" tarafından yayınlanan iki dergide basılmıştır. Sözsüz ispatlar 1975 de *Mathematics Magazine* dergisinde yayınlanmış ve 10 yıl sonra da *College Mathematics* dergisinde yayınlanmıştır (Alsina & Nelsen, 2010). 1970'lerin ortasından bu yana da *Mathematics Magazine* ve *College Mathematics* dergilerinde en az bir sözsüz ispata yer verilmektedir (Gierdien, 2007). Nelsen sözsüz ispatları "*Proof Without Words: Exercises in Visual Thinking ve Proof Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*" isimli kitaplarında toplamıştır.

1.5. Sözsüz İspat Çalışmaları

Sözsüz ispat çalışmaları 1970'lerin ortasından bu yana çeşitli dergilerde verilmektedir. Özellikle son yıllarda sözsüz ispatlar matematik eğitiminde de yer almaya başlamıştır. Bu bölümde sözsüz ispatlarla ilgili yapılmış çalışmalara değinilmiştir. Miller (2012) matematik, geometri ve tamsayı toplamlarındaki teoremlerin sözsüz ispatlarını ve formal ispatlarını beraber yer vererek sözsüz ispatları açıklamıştır. Bayer (2009) üçgensel sayıların, Fibonacci sayılarının kullanıldığı teoremlerin ve Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarını vererek sözsüz ispatların üstün yönlerini ortaya koymaya çalışmıştır. Çalışmasında görsel ispatların geleneksel ispatlara nazaran hem daha basit olduğunu hem de kesin bir sonucun neden doğru olduğunu açıklamaya yardımcı olduğunu belirtmiştir. Ayrıca bu çalışmada tümevarım ile yapılmış bir ispatta formülün hatırlanması gerektiğinden ve sözsüz ispatlarda bu gerekliliğin olmamasından dolayı geleneksel ispatlara göre üstün olarak görüldüğü ifade edilmiştir. Bardelle (2009) görsel ispatların teorik çerçevesine değinmiş ve Piemonte Orientale Üniversite'sinde ders kapsamında matematik öğrencilerine bazı ifadelerin görsel ispatlarına bakmalarını gerektiren ve bu tarz bir ispat inşa etmelerini gerektiren görevler vermiştir ve öğrencilerin cevapları analiz etmiştir. Çalışmada öğrencilerin bu ispatlarla ilgili görevleri zor bulduğu, çok az öğrencinin resmin inşa sürecini tasvir edebildiği ve ancak bazı hatırlatmalarla görevleri tamamlayabildiği sonucuna ulaşılmıştır. Alsina ve Nelsen (2010) "Sözsüz İspatlara Davet" isimli çalışmasında sözsüz ispatların ne olduğuna ve çeşitli sözsüz ispatlara yer vermişlerdir. Çalışmada tümevarım yöntemiyle ispatlanabilecek ancak görsel ispatla daha açıklayıcı olduğu düşünülen ve iki sayma prensibi olan Fubini ve Cantor prensibine göre sözsüz ispat örnekleri kullanılmıştır. Gierdien (2007) yapmış olduğu çalışmada derslerde kullanılabilecek sözsüz ispatlara yer vermiştir. Bu çalışmada özellikle sözsüz ispatların ispatları açıklayıcı ispata çevirmesinden ve böylelikle de bilgi transferinin gerçekleşeceğine değinilmiştir. Ayrıca bu çalışmada sözsüz ispatlarla, örneğin ilk n tamsayının toplamının formülündeki $\frac{1}{2}$ nin nereden geldiğine dair öğrencinin merakını gidermesi ve "görünmeyeni görmesinin" önemli olduğundan söz edilmiştir. Bell (2011) sözsüz ispatların sınıf uygulamalarına yer vermiş ve bu uygulamalarda öğrencilerin yapmış olduklarını analiz etmiştir. Çalışmada formal ispatın sözsüz ispatla beraber gösterildiği zaman öğrencinin ispat yeteneğinin gelişmesiyle beraber matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrendiği belirtilmiştir. Ayrıca Bell bir matematiksel ifadenin sözsüz ispatının öğrenciye verilmesinin öğrenciye yapacağı katkılara değinmesiyle beraber öğrencinin bir matematiksel ifadenin görsel sunumunu oluşturmasını sağlamanın öğrencinin muhakeme yeteneğine olumlu katkı sağlayacağını ifade etmiştir.

Strausova ve Hasek (2012) çalışmalarında dinamik bilgisayar yazılımlarını kullanarak yapılan görsel ispatlara yer vermiştir. Bu çalışmada Hasek ve Strausova "*Proof Without Words*" olarak da adlandırılan sözsüz ispatlar (*non-verbal proofs*) öğrenciler için daha çekici ve kabul edilebilir olduğunu ifade etmiştir. Hanna (2000) ispatın fonksiyonlarını doğrulama, açıklama, inanma, sistematikleştirme, keşfetme, iletişim, hoşlanma olarak belirtmiştir. Strausova ve Hasek (2012) çalışmalarında bu fonksiyonlardan bir kaçını sağlayan Geo Gebra ile hazırlanmış sözsüz ispat örneklerine yer vermişlerdir. Çalışmada bu tip materyallerin kullanımının olumlu etkilerine değinilmiştir.

Karras (2012) yapmış olduğu tez çalışmasında öğretmen yetiştirme programının son yılında olan bir grup gönüllüye lise müfredatında yer alan belli teoremlerin görsel ispatı verilmiş ve onlardan verilen bu şekillerden akıl yürüterek teoremleri ispatlamaları/açıklamaları istenmiştir. Böylelikle matematik öğretmeni adaylarının geometri bilgisi ve şekilsel akıl yürütme arasındaki ilişkiyi açıklanmaya çalışılmıştır.

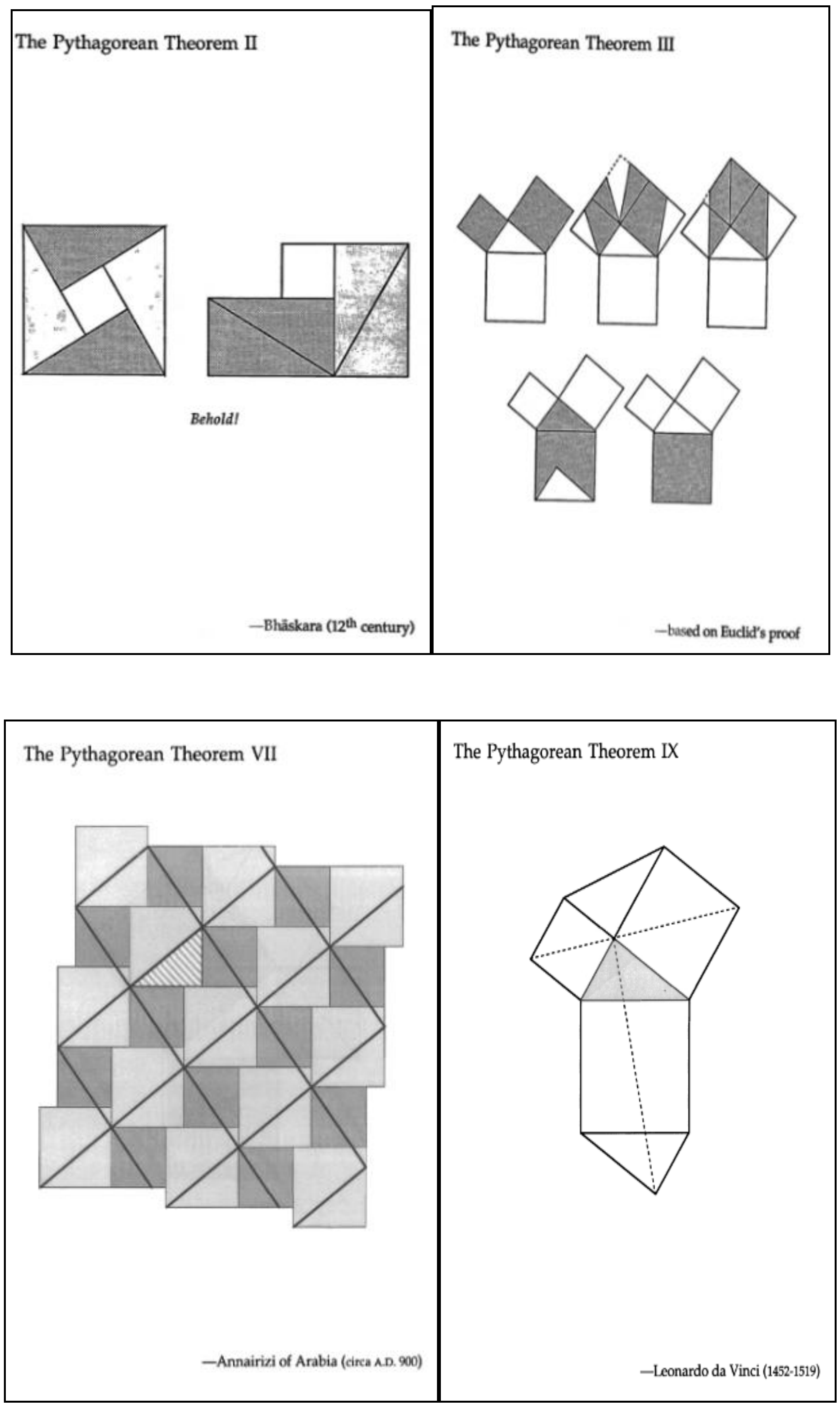
Uğurel, Moralı ve Karahan (2011) ise matematikte yetenekli olan ortaöğretim öğrencilerinin sözsüz ispatlarla bir deneyim yaşamalarının sağlanması ve sonrasında ürettikleri sözsüz ispat örneklerinin tartışmışlardır. Araştırmada katılımcı öğrencilerin, ispat yapmak için farklı bakış açıları sergilemede, özgün sözsüz ispatlar (her üç kategori için de) geliştirmede, yaptıkları ispatları görsel olarak sunmada başarılı oldukları gözlenmiştir. Tekin ve Konyalıoğlu (2010) toplam ve fark formüllerinin görsel ispat ve cebirsel ispat sırasıyla vererek görsel ispatlarla ispat sürecinde yapılan çizimlerin formüllerin anlamlandırılmasına, formüllerin özünü anlamaya ve kalıcı öğrenmeye katkı sağlayacağına değinmiştir. Ayrıca çalışmada formüllerdeki ilişkilerin cebirsel ispatlarla yeterince görülemeyeceği ifade edilmiştir. Tekin ve Konyalıoğlu (2009a) cebirsel ispat sürecinde matematiksel sonuçları doğru yerlerde kullanamayıp, kavramlar arası ilişkileri göremediklerini ifade etmişlerdir. Bu yanlışların önüne geçilerek görsel şekil aracılığıyla teoremlerin niçin doğru olduğunu görebilmelerini sağlayan görsel ispat süreçlerinin etkili olabileceğinden bahsedilebilir.

Demircioğlu ve Polat (2015) öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada öğretmen adayları sözsüz ispatların ispat, problem çözme, anlama, zihinsel, akıl yürütme, genelleme, işlem, analiz ve sentez yapabilme, görme ve düşünme becerilerini kazanmada etkili olduklarını ifade etmişlerdir. Bu beceriler içerisinde de sözsüz ispatların en fazla ispat becerisi üzerinde etkisi olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca öğretmen adayları sözsüz ispatlarla başka ispat yöntemleri olduğunu da gördüklerini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda düşünüldüğünde sözsüz ispatlara farklı ve alternatif ispat yöntemi olarak öğretimde yer verilmesi önemli olarak görülebilir. Bu çalışmada öğretmen adayları tarafından sözsüz ispatların öğrenciler için özellikle ispat becerisi gelişmemiş öğrenciler için zor olabileceğini, öğrencilere açık gelmeyebileceğini, kafa karıştırıcı olabileceğini, yanlış anlamaya, yanlış düşünmeye neden olabileceğini, hatta bir öğretmen adayı sözsüz ispatların öğrenciyi kavram yanılgısına düşürebileceğini, bu ispatların alışılmışın dışında olduğunu ifade etmiştir.

Yapılan çalışmalar ışığında incelendiğinde sözsüz ispatlar ile ilgili çok fazla çalışma olmadığı görülmektedir. Var olan çalışmalarda da genellikle kuramsal olarak sözsüz ispatlara değinilmiştir. Uygulamaya yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin görsel ispatları zor buldukları dolayısıyla da öğrencilerde görsel akıl yürütme eksikliğinin var olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu eksikliğin sebebi olarak da temel matematiksel araç bilgisi eksikliği, şekilsel sunumların kullanımı ile ilgili eksiklik, şekilsel ispatların kavramsal ve algısal doğası arasındaki çatışma ve matematiksel ispatın yanlış ve eksik anlaşılması gösterilmiştir (Bardelle, 2010). Ayrıca öğrencilerin sözsüz ispatları faydalı bulup ancak daha önce sözsüz ispatlarla karşılaşmadıkları için alışılmışın dışında gelmesi onlara verilecek eğitimle ortadan kaldırılabilir. Sözsüz ispatların kuramsal olarak ele alındığı çalışmalarda sözsüz ispatların gerçek ispat olup olmadığının tartışılmasından öte sözsüz ispatların formal ispatlara alternatif olarak sunulmasının katkılarına değinilmiştir. Bununla beraber Bardelle (2010) çalışmasında resim ve diyagramların kullanımındaki sorunlara da değinmiştir ve resimlerin kavramsal ve algısal özellikleri arasındaki potansiyel çatışmanın görsel ispatların kullanımında sorunlara sebep olabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca görsel bir ispatla çalışmanın resimlerin semiyotik, sözlü metin veya sembolik ifadeler arasında sürekli etkileşimi gerektirmesinin öğrencileri zorlayacağı görüşündedir.

1.6. Sözsüz İspatın Matematik Eğitiminde Kullanımı

Sözsüz ispatlar ispat olarak kabul edilsin ya da edilmesin matematik eğitiminde değerli araçlardır. Örneğin ilk n tamsayısının toplamının formülünü pek çok yüksek matematiğe giriş dersi alan öğrenci, tümevarım ile ispatlar. Fakat bir tümevarım ispatı sadece formülün doğruluğunu ispatlamış olur. Formülün neden doğru olduğunu göstermez. Sözsüz ispatlar bu durumda çok faydalıdır. Sözsüz ispattaki resimle formülün çıkışı somut olarak görsel anlama sahip olur (Miller, 2012). Ayrıca sözsüz ispat örnekleri birçok kaynakta mevcuttur: Örneğin; ilk n tamsayısının toplamının formülünün modellerle elde edilişi (Baki, 2008; s:59), Pisagor teoreminin ispatı (Wells, 2011a: 279; 2011b: 267; Zeybek, 2013: 245). Fakat bu tür örnekler sınırlıdır ve sözsüz ispat adı altında geçmemektedir. Halbuki Nelsen'ın "*Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking1-2*" kitabında da görüldüğü üzere matematiğin her dalında sözsüz ispat örneklerine rastlamak mümkündür (analiz, geometri, tamsayı ilişkileri). Örneğin Nelsen (1993, 2000) kitaplarında Pisagor teoreminin yapılmış 11 farklı ispatına yer vermiştir. Bu ispatlardan birkaçı aşağıda verilmiştir:



Şekil 7. Pisagor Teoremi Sözsüz İspat Örnekleri

Aşağıda Bayer (2009) çalışmasında yer alan ilk n tamsayısının toplamının formülünün ispatının hem formal hem de sözsüz ispatı verilmiştir:

Formal İspat:

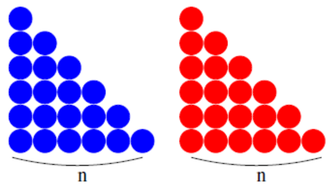
1. n=1 için $T_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
2. n=k için 1+2+3….+k=$\frac{k(k+1)}{2}$ doğru olsun.
3. n=k+1 için formülün doğruluğunu gösterelim:

1+2+3+…..+k+k+1= $\frac{k(k+1)}{2}$+k+1

$$=\left(\frac{k}{2}+1\right)(k+1)$$

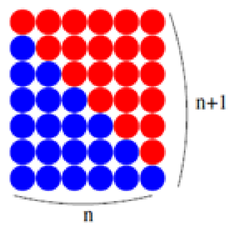
$$=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

Sözsüz ispat:



Şekil 8. İlk n Tamsayısının Toplamının Sözsüz İspatı

Mavi noktaların toplamı T_n ve kırmızı noktaların toplamı T_n olmak üzere noktaların toplamı $2T_n$ olur. Böylelikle şekilden görüldüğü üzere $2T_n$ =n (n+1) dir. O halde $T_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$ bulunur.



Şekil 9. İlk n Tamsayısının Toplamının Sözsüz İspatı

Şekil 8 ve şekil 9'da görüldüğü üzere bir teoremin sözsüz ispatı ve formal ispatı beraber verilmiştir. Sözsüz ispatlar geleneksel ispatlara göre sadece daha basit değil aynı zamanda kesin bir sonucun neden doğru olduğunu açıklamaya yardımcıdır. Bu da iyi bir ispatın niteliğidir (Bayer, 2009). İspat ile ilgili çalışmalar incelendiğinde (Bell, 1976, Hanna, 2000) ispatın teoremin ya da ifadenin doğruluğuna ilişkin açıklama içermesine değinilmiş olduğu görülür. Sözsüz ispatların özellikle bir teoremin ya da ifadenin niçin doğru olduğuna cevap verebildiği düşünüldüğünde her ne kadar ispat olarak kabul edilip edilmemesine yönelik tartışmalar mevcutsa da eğitime yardımcı araçlar olarak kabul edildiği söylenebilir. Bununla beraber bu çalışmada görselleştirmenin matematik eğitimine olan katkısına da değinilmiştir (Hanna & Sidoli, 2007; Van De Walle, 2014). Dolayısıyla görsel kavramı algılama yeteneğimizin güçlü olduğu düşünüldüğünde anlama seviyemizi genişletmek için görsel kavramların kullanıldığı sözsüz ispatları kullanmanın matematik eğitimine katkısı yadsınamaz (Miller, 2012). Zazkis, Weber ve Ramos (2015) diyagramların sembolik olarak çok açık biçimde ifade edilemeyen kavramların özelliklerine ışık tutabilecekken öğrencilerin diyagramların ispat yapmada oynadıkları rolleri bilmediğinden ve görsel öngörülerini ispat diline çevirmede yetersiz olmalarından ötürü diyagramların bu özelliğinden faydalanamadıklarını belirtmiştir. Bu yüzden sözsüz ispatların da görsel ispatlar olduğu düşünüldüğünde alternatif bir ispat yöntemi olacaktır. Bu nedenle gerek lise ders kitaplarında gerekse lise ve üniversite müfredatında formal ispatlara ek olarak sözsüz ispatlara yer verilmesi öğrencilere katkı sağlayabilir.

2. TARTIŞMA VE SONUÇ

İspat kavramı hem matematiksel düşünmenin bir boyutu olarak karşımıza çıkan hem de matematiksel bilginin oluşturulmasında önemli yere sahip olan becerilerden bir tanesidir. Bu öneminin yanı sıra öğrencilerin sıkıntı yaşadığı, anlamakta zorlandıklarını ifade eden hem yurt içinde hem de yurt dışında çalışmalar (Zeybek, 2015; Şengül & Güner, 2013; Jones, 2000) mevcuttur.

Bu çalışmayla alternatif bir ispat yöntemi olarak kullanılabilecek sözsüz ispat kavramı, sözsüz ispatların matematik eğitimindeki rolü, üstün ve zayıf yönleri kuramsal çerçevede ele alınmıştır. Bu çalışmada sözsüz ispatların hem ispat ile ilgili hem de görselleştirme ile ilgili yönlerine vurgu yapılarak tarihsel süreç içerisinde incelenmeye çalışılmıştır. Yapılan çalışmalar ışığında sözsüz ispatlar ele alındığında gerek tanımı gerekse matematik eğitimindeki yeri çerçevesinde ele alınmıştır. Bu çerçevede sözsüz ispatlara yönelik yapılan tanımlara bakıldığında ortak bir kanaat olduğu söylenebilir. Sözsüz ispatlar en genel anlamda içinde geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermeyen, görsel ispatlardır (Gierdien, 2007; Casselman, 2000). Sözsüz ispatlar ile ilgili ortak kanata sahip olunmayan husus ise sözsüz ispatlara yönelik kullanılan ifadelerdir. Sözsüz ispatlar için özellikle görsel ispatlar ifadesi gerek yurt içinde gerekse yurt dışında sıklıkla kullanılırken resimlerle ispat, resimsel ispatlar, resimli ispatlar ifadelerinin de kullanıldığı görülmektedir.

Sözsüz ispatların tarihçesine bakıldığında sözsüz ispatların çok eski olmalarına rağmen son yıllarda özellikle matematik eğitimi araştırmalarında yerini aldığı ve önem kazandığı söylenebilir. Özellikle yapılan çalışmalarda sözsüz ispatlar gerçek ispatlar olup olmamasından öte eğitime yardımcı araçlar olarak görülmesi sebebiyle öğretimde yer verilmesinin öneminden söz edilebilir.

Sözsüz ispatlara yönelik tanımların ve gerçek ispat olup olmadığına yönelik yapılan tartışmaların ışığında elbette üstün ve zayıf yönleri bulunmaktadır. Zayıf yönleri arasında sözsüz ispatların gerçek ispatlar olarak kabul edilmediği gösterilebilir. Ancak matematik tarihi incelendiğinde ilk ispatların genellikle sözsüz ispatlar olması sözsüz ispatları kıymetli hale getirir ve öğrencilerin ispat yapmaya yönelik zorluklar yaşadıkları göz önüne alındığında bu zorlukları ortadan kaldırabilmek adına öğretim sürecinde sözsüz ispatlara yer verilebilir. Sözsüz ispatların özellikle formüllerin nereden geldiği, teoremin ya da matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu göstermeye yönelik ispatlar olması Hanna (2000)'nın belirttiği ispatın doğrulama, inanma, açıklama fonksiyonlarını yerine getirebilmesi açısından önemli görülebilir. Demircioğlu ve Polat (2015)'ın öğretmen adaylarıyla yapmış oldukları çalışmada öğretmen adayları sözsüz ispatları zevkli, merak uyandırıcı, güven kazandırıcı olarak nitelendirmişlerdir. Bu da sözsüz ispatların Hanna (2000) 'nın belirttiği ispat fonksiyonlarından keşfetme, hoşlanma fonksiyonlarını yerine getirmiş olabileceği söylenebilir. Ayrıca Bardelle (2010) öğrencilere verilen sözsüz ispat görevlerinin formal ispatlardaki gibi diğer matematik problemlerine yaklaşırken önemli araçlar geliştirmelerine yardımcı olacağı kanaatine sahiptir. Ayrıca çalışmada belirtildiği üzere sözsüz ispatlar görsellikle yakından ilişkilidir. Bu sebeple görselleştirmenin matematik eğitimine katkısı pek çok araştırmacı tarafından kabul edilmişken sözsüz ispatların da matematik eğitimine katkı sağlayacağı söylenebilir. Dolayısıyla bu çalışma ile sözsüz ispat kavramı kuramsal olarak ele alınmış olup gerek öğretmenlere sözsüz ispatları kullanmaları yönünde gerekse de araştırmacılara ispat ile ilgili yapılacak olan çalışmalar için bir pencere açılmaya çalışılmıştır. Böylelikle sözsüz ispatların öğretmen yetiştirme programlarında, ortaokul ve lise programlarında yer verilmesine yönelik araştırmaların yapılarak öğretime yapacağı katkılar ya da sebep olabileceği sıkıntıların ortaya çıkarılmaya çalışılması önerilebilir.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything*? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.

Alsina, C. & Nelsen R. B. (2001). A visual proof The Erdos-Mordell inequality, *Forum Geom*, 7, 99-102.

Alsina, C. & Nelsen R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 3(1), 118-127.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arslan, S. & Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35 (156), 17-31.

Aydoğdu İskenderoğlu, T. & Baki, A. (2011). Quantitative Analysis of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Opinions about Doing Mathematical Proof. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 11(4), 2285-2290.

Aylar, E. (2014). *7. Sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin İrdelenmesi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Baki, A., (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitim*, İstanbul: Harf Yayınları.

Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Paper presented at the annual meeting of CERME6, Lyon, France. INRP, 251-260.

Bayer, R. (2009). Proof By Picture. Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf

Bell, C., J. (2011). Proof Without Words: A Visual Application of Reasoning. *Mathematic Teachers*, 104 (1), 690-695.

Bloch, E. D. , (2011). Proof and fundamentals a first course in abstract mathematics (2. Ed). (s.s47-53).San Francisco Usa.

Britz, T., Mammoliti, A. & Sørensen, H. K. (2014). Proof by picture: A selection of nice picture Proofs. *Parabola*, 50(3), 1-8.

Brown, J. R. (1997). Proofs and Pictures. *British Journal for the Philosophy of Science*, 48, 161-180.

Casselman, B. (2000). Pictures and proofs. *Notices of the American Mathematical Monthly*, 47(10), 1257-1266.

Çağlayan G., (2015). Math Majors' visual proofs in a dynamic enviroment: the case of limit of a function and $\varepsilon - \delta$ aproach. *International Journal Of Mathematic Education in Science and Technology*, 46 (6), 797-823.

Demircioğlu, H. & Polat, K. (2015). Ortaöğretim Matematik Öğretmen Adaylarının "Sözsüz İspat" Yöntemine Yönelik Görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 31 (2), 233-254.

Doruk, M. & Güler, G. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 71-93.

Gierdien, F. (2007). From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in secondary mathematics. *Pythagoras*, 65, 53 – 62.

Goldoni, G. (2002). A visual proof for the sum of the first n squares and for the sum of the first n factorials of order two. *Math. Intell.*, 24, 67–69.

Gökkurt, B., Soylu, Y., & Şahin, Ö. (2014). Analysis of the Mathematical Proof Skills of Students of Science Teaching. *Educational Research Quarterly*, 38(2), 3-22.

Hanna, G. (1991). *The Nature of Advanced Mathematical Thinking*. In: Tall D. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking(pp.54-60). Mathematics Education Library, Kluwer, Dordrecht.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview, *Educational Studies in Mathematics*, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", 44 (1-2), 5-23.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education,* 39, 73–78.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining [Elektronik Sürüm]. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.

Johson M. J. (1993). Visual Proof. *Mathematic Teacher,* 86 (1), 38-49.

Jones, K. (2000). The Student Experience of Mathematical Proof at University Level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills Of Pre-Service Mathematics Teachers*. (unpublished doctora thesis). ProQuest LLC.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri ve Bu Görüşlerin Bazı Değişkenlere Göre İncelenmesi. *International Journal of New Trends In Arts, Sports and Science Education (IJTASE)*, 1(2), 134-141.

Keskin, M., Akbaba Dağ, S. & Altun, M. (2013). 8. ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Aşamalarındaki Davranışlarının Karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*, 33-50.

Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 379-405.

Knuth, E.J.(2002). Teacher conceptions of proof in the text of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.

Kobayashi Y. (2011). Integral Representation of Pictorial Proof $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. *International Journal Mathematic Education Science Techology*, 42, 235-239.

Miller R. L. (2012). On Proofs Without Words, Retrieved from: http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11ve 12.Sınıflar) Öğretim Program. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Ankara.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standarts for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nelsen. R. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

Nelsen. R (2000). *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. Washington: Mathematical Association of America.

Ufuktepe, Ü. (2009) Matematikte Resimle İspat. Alınan yer http://maycalistaylari.comu.edu.tr/calistay2009_2/sunumlar/danisman/unal_ufuktepe_matematik.pdf

Uğurel, I., Moralı, H. S. & Karahan, Ö. (2011). Matematikte Yetenekli Olan Ortaöğretim Öğrencilerin Sözsüz İspat Oluşturma Yaklaşımları, I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretimi Kongresinde sunulmuş bildiri, 5-8 Ekim, Eskişehir.

Strausova, I. & Hasek, R. (2012). "Dynamic visual proofs" using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7(2), 130-143.

Şimşek, E., Şimşek A. & Dündar S. (2013). Lise 12.Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreçlerinin İncelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2 (4), 43-57.

Tekin , B. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve Fark Formüllerinin Ortaöğretim Düzeyinde Görselleştirilmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1-2), 24-37.

Wallace, E. C. & West S. F. (2004). *Roads to Geometry* (3. Ed). New Jersey : Pearson Education.

Walle de Van J., Karp, S.K. & Bay-Williams J. (2014). İlkokul ve Ortaokul Matematiği. (Çeviren: S. Durmuş). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Wells, D. (2011a). *Matematiğin Gizli Dünyası*. (Çeviren: S.Alsan). İstanbul: Doruk Yayımcılık.

Wells, D. (2011b). *Geometrinin Gizli Dünyası*. (Çeviren: S. Alsan). İstanbul: Doruk Yayımcılık.

Yassin E., I., A. (2013). The Effect of using the Proof Without Words Method on the Results and the Transfer of Learning Among the Scientific the First Grade Secondary Students in Nablus. Alınan yer http://scholar.najah.edu/sites/defautfiles/Eman%20Yassin.pdf

Yıldırım, C. (2012). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının İlköğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerine, İspatla İlgili Görüşlerine Ve Akademik Başarılarına Etkisi.* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Zazkis, D., Weber, K. & Ramos, J. P. M. (2015). Two Proving Strategies of Highly Succesful Mathematics Majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 11-27.

Zeybek, Z. (2013). *Üçgen kavramı ve Geometri Tarihindeki Yeri*. İ.Ö. Zembat, M. F.Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice (Ed.) Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar (s.s. 221-248). Ankara: Pegem Yayıncılık.

Citation Information

Polat, K. & Demircioğlu, H. (2016) Matematik Eğitiminde Sözsüz İspatlar: Kuramsal Bir Çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140.