D.Ü.Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi **9**, 123-127 (2007)

DÜZGÜN MANYETİK ALANDA HAREKET EDEN GÖRELİ ELEKTRON İÇİN KENDİLİĞİNDEN YAYMA YARI ÖMÜRLERİNİN HESAPLANMASI

Calculation of Spontaneous Emission Decay Rates of an Electron Moving in a Uniform Magnetic Field

Figen BİNBAY [1]

Özet

Bu çalışmada, düzgün manyetik alanda göreli hareket yapan elektron problemi öz-alan kuantum elektrodinamiği yaklaşımıyla ele alınmıştır. Öz alan formalizmi, elektronun öz enerjisini temel alan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım yardımıyla söz konusu elektronun kendiliğinden yayma bozunma oranları değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Landau yörüngeleri, öz-alan kuantum elektrodinamiği, kendiliğinden yayma, bozunma oranları.*

Abstract

In this study, the problem of an electron which moves in a uniform magnetic field is considered by self-field quantumelectrodynamics formulation. This formalism is based upon the electron's self-energy. By using this formulation, the spontaneous emmission decay rates of the electron are calculated.

Key Words: *Landau orbits, self-field quantumelectrodynamics, spontaneous emission, decay rates.*

1. GİRİŞ

Düzgün bir manyetik alanda ivmelendirilen bir elektron, elektromanyetik ışıma yapar. Bu ışıma klasik olarak sinkrotron ışıması olarak adlandırılır. Bu olayın kuantum mekaniksel karşılığı, "kendiliğinden yayma"dır (spontaneous emission). Bizi çevreleyen ışığın büyük bir kısmı "kendiliğinden yayma" görüngüsünden kaynaklanır. Kendiliğinden yayma, atomun uyarılmış duruma nasıl geçtiğine bağlı olarak değişen isimlerle anılan görüngülerin ana başlığıdır. Uyarılmış bir atomun neden ışıma yaptığı, bunun klasik ve klasik olmayan görünüşlerinin neler olduğu, hangi fiziksel gösterimin bu görüngüyü açıklayabildiği soruları uzun zamandan beri yanıtlanmaya çalışılmaktadır.

Düzgün manyetik alanda hareket eden elektron problemi Landau tarafından çalışılmış ve çözülmüştür. Bundan dolayı söz konusu elektronun

[1] Yrd.Doç.Dr.,Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, 21280 Kampüs - Diyarbakır, TÜRKİYE, e-mail: figenb@dicle.edu.tr

bulunabileceği yörüngeler “Landau yörüngeleri” diye adlandırılmaktadır (Dereli,2000). Bu çalışmada, göreli Landau yörüngelerine ait dalga fonksiyonları, Asım Barut ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen ve elektronun öz-enerjisine dayanan öz-alan kuantum elektrodinamiği (KED) formülasyonunun eyleminde yerine konmuştur (Barut,1980) (Barut,1983) (Barut,1987). Öz-alan kuantum elektrodinamiği Lamb kayması, kendiliğinden yayma, anormal manyetik momentin hesabı gibi ışınımsal süreçlerin daha iyi anlaşılması için geliştirilen bir formülasyondur. Bu çalışmada, düzgün manyetik alanda hareket eden göreli elektronun kendiliğinden yayma süreciyle ilgilenilmektedir (Binbay,1995).

Landau özfonksiyonları, üç sürecin bir arada gözüktüğü genel eylemde özel olarak incelediğimiz süreç olan “kendiliğinden yayma” olgusunun enerji kaymasına katkısı ifadesinde yerine konmuştur. Yörüngeler arası izinli geçişlerin bozunma oranları, bu enerji kaymasından elde edilmektedir. Sonuç olarak, sabit (düzgün) manyetik alandaki elektron için standart KED kullanılarak yapılan bozunma oranı hesabının yer aldığı çalışma (Grandy,1991) ile bu çalışmada bulunan sonuçların uyum içerisinde olduğu söylenebilir.

2. YÖNTEM ve BULGULAR

Bu çalışmada, öz-alan KED’inin eyleminde yerine konmak üzere Landau yörüngeleri öz fonksiyonları yeniden elde edilmiştir. Göreli elektron için Dirac denklemi, elektronun helissel hareketi nedeniyle silindirik koordinat sisteminde yazılmış ve çözülmüştür. Kutu normalizasyonu ile dalga fonksiyonları boylandırılmıştır (Havare, Binbay, 2000). Öz-alan KED formülasyonunun standart KED formülasyonuyla karşılaştırmalı olarak yararları aşağıdaki gibi özetlenebilir (Barut, Kraus, 1983):

i). Öncelikle ψ madde alanı kuantumlanmıştır. Alanların kuantumlanmasına (yani 2. kuantizasyona) gerek duyulmamaktadır.
ii). Formülasyonun kendine özgü renormalizasyon işlemi geliştirilmiştir.
iii). Tedirginmesiz (pertürbatif olmayan) bir yaklaşımdır. Bunun getirdiği hesaplama kolaylığı vardır.
iv). Öz-alan KED formülasyonunda hareket denklemleri yerine bir eylem yardımıyla işe başlanır ve tüm hesaplamalar eylemde gerçekleştirilir.
v). Sonuç olarak bu teorinin önemli bir görünüşü, giriş bölümünde belirtilen ışınımsal süreçlerin anlaşılmasına getirdiği sadeliktir.

Şimdi, öz-alan KED formalizmindeki Lamb Kayması, Kendiliğinden Yayma ve Boşluk Kutuplanması (Açıkgöz, Barut, Kraus,1995) gibi üç kuantum etkisinin birlikte ortaya çıktığı genel formülün türetiminden kısaca söz edilecektir. Bu genel formülde kendiliğinden yayma bozunma oranı $\Gamma/2$, karmaşık bir enerji kaymasının sanal kısmı olarak, Lamb kayması ve boşluk kutuplanması da (Açıkgöz, Ünal,1998) aynı enerji kaymasının gerçel kısmı olarak gözükür. Formül aşağıda yazılan eylemden ($\hbar = c = 1$ ve $dx = d^4x$ olmak üzere) türetilmektedir:

$$W = \int dx \left[\Psi\left(\gamma^{\mu} i\partial_{\mu} - m\right)\Psi + J^{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{4} F_{\mu\gamma} F^{\mu\gamma} \right] \tag{1}$$

Burada, ilk terim Dirac elektronunun kinetik eylemidir, $\Psi(x)$, $(t, \vec{x})$ uzay-zaman noktasındaki elektronun birinci kuantumlanmış madde alanıdır, γ^{μ} bilinen Dirac γ matrisleridir, m elektronun kütlesidir. İkinci terim elektronun elektromanyetik alanla etkileşmesini tanımlar, son terim fotonun ya da elektromanyetik alanın kinetik enerjisidir. (1) eyleminden yararlanarak n. enerji seviyesindeki kayma, her biri bir ışınımsal sürece karşılık gelen üç terimin toplamı olarak yazılabilir (Barut, 1980). Kendiliğinden yayma süreciyle ilgilendiğimiz için aşağıdaki enerji kaymasından yararlanırız:

$$\Delta E_n^{KY} = \frac{e^2}{2} \sum \int\int d^3x \overline{\Psi}_n(\vec{x}) \gamma^{\mu} \Psi_s(\vec{x}) \int d^3y \Psi_s(\vec{y}) \gamma^{\mu} \Psi_n(\vec{y}) \times$$
$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \left[\frac{i\pi}{k} \left[\delta\left(E_s - E_n + k\right) + \delta\left(E_s - E_n - k\right) \right] \right] \tag{2}$$

Yukarıdaki denklemin başındaki toplama ve ilk integral işareti kesikli ve sürekli durumlar üzerinden toplamanın birlikte yapılacağına işaret eder. Yine bu denklemde, δ fonksiyonlarından birincisi yaymayı (emission) ikincisi de soğurmayı (absorption) verir.

Bu çalışmada hesaplanacak olan n. seviyenin bozunma oranı Γ_n ile ΔE_n enerji kayması arasındaki ilişki şudur:

n. Seviyenin enerjisini karmal olarak yani

$$E_n = E_R + iE_I \tag{3}$$

şeklinde alırsak dalga fonksiyonu,

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{iE_R t/\hbar} \Psi_n(\vec{x}) e^{-E_I t/\hbar} \tag{4}$$

şeklinde ve olasılık yoğunluğu

$$P(\vec{x}, t) = \left|\Psi_n(\vec{x})\right|^2 e^{-2E_I t/\hbar} \tag{5}$$

olacaktır. $e^{-2E_I t/\hbar}$ terimi bozunan sistemin ifadesidir. Γ_n bozunma oranı ya da ortalama yaşam ömrünün tersinin iki katı, sanal enerjiyle orantılı kısımdır. Böylece, doğru δ fonksiyonunu alarak ve yukarıdaki tanımı kullanarak n. seviyenin bozunma oranı,

$$\Gamma_n = -e^2 \sum_{s<n} \int d^3x \overline{\Psi}_n(\vec{x}) \gamma^\mu \Psi_s(\vec{x}) \int d^3y \overline{\Psi}_s(\vec{y}) \gamma_\mu \Psi_n(\vec{y}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}.(\vec{x}-\vec{y})} \frac{\pi}{2k} \delta(E_s - E_n + k) \tag{6}$$

olarak bulunur. Enerji düzeyleri arasındaki geçişlerin bozunma oranları hesaplanacağı için herhangi bir durumun enerji ifadesi,

$$E^2 = M^2 + 4M\omega(N + |m| + 1) \tag{7}$$

olduğundan, N ve m kuantum sayılarına N= 0,1,2,... ve m=-1,-2,... değerleri verilerek enerji düzeyleri elde edilir.
İsteksel olarak seçtiğimiz birkaç geçiş için bozunma oranları hesabı aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma[(1,-2) \to (0,-1)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{4\omega}{3M} \left[1 - \frac{14\omega}{M} + \frac{24\omega^2}{M^2}\right], \tag{8-a}$$

$$\Gamma[(1,-2) \to (1,-1)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{8}{3} \frac{\omega}{M} \left[1 - \frac{15\omega}{M} + 14\frac{\omega^2}{M^2}\right], \tag{8- b}$$

$$\Gamma[(1,-3) \to (1,-2)] \cong \frac{\alpha}{4\pi} \frac{9\omega}{M} \left[1 - \frac{19\omega}{M} + 18\frac{\omega^2}{M^2}\right] \tag{8-c}$$

Bu ifadelerdeki ortak çarpan $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ ' dir ve ince yapı sabiti olarak adlandırılır. ω açısal frekans olup, manyetik alanla orantılıdır.

3. SONUÇ ve TARTIŞMA

Landau yörüngelerine ait dalga fonksiyonlarını (6) denkleminde yerine koyarak çeşitli geçişler için bozunma oranları hesaplanmıştır. Bu hesabı yapmak üzere bozunma oranı integrali gerçekleştirilirken;

1.Dipol yaklaşımı yapılmıştır (Dipol yaklaşımı yapmak, $e^{ik_\perp(x_\perp - y_\perp)}$ üstel terimini seriye açtıktan sonra ilk terimi almak, yani $e^{ik_\perp(x_\perp - y_\perp)} \cong 1$ yazmak demektir. Bu, elektronun Landau yörüngeleri yarıçapının yayılan ışığın dalga boyundan daha küçük olması anlamına gelir.)

2. İntegraller iki boyutta alınmıştır. Sabit (düzgün) manyetik alandaki elektron için standart KED kullanılarak yapılan bozunma oranı hesabının yer aldığı çalışma (Grandy,1991) ile bu çalışmada bulunan sonuçların uyum içerisinde olduğu söylenebilir.

İsteksel birkaç geçiş için yapılan bozunma oranı hesabı; manyetik alanın kendisi, ikinci ve üçüncü kuvvetleriyle orantılı terimlerin toplamını içermektedir. Bu sonuç, ilk terim hariç olmak üzere Tsai ve Yıldız'ın (Tsai, Yıldız, 1973) makalesinde yer alan (aynı problem için) bozunma oranı hesabının manyetik alana bağlılığı ile uyumlu gözükmektedir.

Teşekkür

Prof. Dr. Nuri ÜNAL'a bu çalışmayı gerçekleştirirken, problem seçimi ve çözümü esnasındaki katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Kaynaklar

Açıkgöz,İ.,Barut, A. O., Kraus, J., Ünal, N. (1995) : Self-field QED Without Infinities: A New Calculation of Vacuum Polarization, *Phys. Letters A* **198**, 126.

Açıkgöz, İ., Ünal, N. (1998) : Vacuum Polarization in Self-field QED, *Found. of Phys.* **28**, 5,815.

Barut, A. O., Dowling, J. P. (1987) : QED Based On Self-Energy, Without Second Quantization: The Lamb Shift and Long Range Casimir Polder Van Der Waals Forces Near Boundaries, *Phys. Rev. A* **36**, 2550-2556.

Barut, A. O. (1980) : *Electromagnetic Interactions Beyond QED, Foundation of Radiation Theory and QED,* (A. O. Barut, Editor) Plenum, New York.

Barut, A. O., Kraus, J. (1983) : Nonperturbative QED The Lamb Shift, *Foundation of Phys.* **13**, 189-194.

Binbay,F.(1995) *"Göreli Landau Elektronu İçin Kendiliğinden Yayma Yarıömürlerinin Hesaplanması"* Yayınlanmamış doktora tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Dereli, T., Verçin, A.(2000) : *Kuantum Mekaniği **2***, 107, METU Press, Ankara.

Grandy, Jr., Walter T. (1991) : *Relativistic Quantum Mechanics of Leptons and Fields,* Kluwer Academic Publishers. The Netherlands.

Havare, A., Binbay, F. (2000) : The Expression of Relativistic Landau Eigenstates in Cylindirical Coordinates, *International J. of Diff. Eqs. and Applications* **1**, 3.

Tsai, W., Yıldız,A. (1973) : Motion of an Electron in a Homogenous Magnetic Field- Modified Propagation Function and Synchrotron Radiation, *Phys.Rev. D.* **8**, 3446-3460.