Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(2), 771-777
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019, 12(2), 771-777
DOI:10.18185/erzifbed.486996
Research Article

Paraserbest Lie Cebirlerinin Metabelyen Çarpımı, 2-Simetrik Kelimeler ve Verbal Altcebir

Zehra VELİOĞLU[1*], Naime EKİCİ[2]

[1]Harran Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Şanlıurfa/Türkiye
[2]Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adana/Türkiye

Geliş / Received: 23/11/2018, Kabul / Accepted: 13/05/2019

Öz
Bu çalışmada paraserbest Lie cebirlerinin metabelyen çarpımı tanımlanmış ve bu çarpımın paraserbest olduğu gösterilmiştir. F rankı 2 olan bir serbest Lie cebiri ve L sonlu sayıda paraserbest abelyen Lie cebirlerinin metabelyen çarpımı olmak üzere F de L tarafından tanımlanan verbal alt cebirin F'' olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu sonuç ve Fox türevleri kullanılarak L nin bütün 2-simetrik kelimelerinin belirlenebileceği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Paraserbest Lie Cebirleri, Metabelyen Çarpım, Simetrik Kelimeler, Verbal Altcebir.

Metabelian Product of Parafree Lie Algebras, 2-Symmetric Words and Verbal Subalgebra

Abstract
In this work, the metabelyen product of parafree Lie algebras is defined and it is shown that this product is parafree. Let F be a free Lie algebra of rank 2 and L be metabelian product of a finite number of parafree abelyen Lie algebras. It is proved that the verbal subalgebra of L in F equals F''. Moreover, by using this result and Fox derivatives, all 2-symmetric words of L are determined.

Keywords: Parafree Lie Algebras, Metabelian Product, Symmetric Words, Verbal Subalgebras.

1. Giriş

Baumslag (1967), alt merkezi serisi ile karakterize edilebilen yeni bir grup fikri ortaya atmıştır. Daha sonra Baumslag (1969) bu grupların özelliklerini araştırmış ve bu grupları paraserbest gruplar olarak adlandırmıştır. Baur (1978), paraserbest gruplar için kullanılan kavramları Lie cebirlerine aktarmış ve bu Lie cebirlerinin varlığını kanıtlamıştır. Baumslag'ın ve Baur'un çalışmaları, paraserbest Lie cebir-lerinin teorisindeki çalışmalara bir başlan-gıç olmuştur. Paraserbest Lie cebirleri serbest Lie cebirleri ile birçok ortak özelliğinin olmasına rağmen çok çalışılmış bir konu değildir. Bu yüzden paraserbest Lie cebirleri ile ilgili literatürde hala çözülmemiş birçok problem vardır. Bu durum bu cebir yapısını çalışmamızda motivasyon kaynağı olmuştur. Pan (2006) bazı aşikar olmayan abelyen grupların metabelyen çarpımı üzerinde çalışmış ve bu çarpımın bütün 2-simetrik kelimelerini belirlemiştir. Grup teorisinde yapılan bu çalışmadan hareketle, bu çalışmada F rankı 2 olan bir serbest Lie cebiri ve L sonlu sayıda paraserbest abelyen Lie cebirlerinin metabelyen çarpımı olmak üzere, F de L tarafından tanımlanan verbal alt cebirin F'' olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bu sonuç ve Fox türevleri kullanılarak L nin bütün 2-simetrik kelimelerinin belirlenebi-leceği gösterilmiştir.

2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde çalışmada kullandığımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca bu çalışmada sözü geçen tüm cebirler karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde düşünülecektir.

*Sorumlu Yazar: zehrav@harran.edu.tr

Tanım 2.1. $(G_\alpha)_{\alpha\epsilon I}$, K cismi üzerinde tanımlı Lie cebirlerin bir ailesi ve her $\alpha \in I$ için (X_α/R_α), G_α ailesinin bir sunumu olsun öyle ki $\alpha \neq \beta$ için $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ dir.

$$X = \cup_\alpha X_\alpha \text{ ve } R = \cup_\alpha R_\alpha$$

olsun. O halde $G = (X/R)$ sunumuna $(G_\alpha)_{\alpha\epsilon I}$ ailesinin serbest çarpımı denir ve $G = \prod_{\alpha\in I}{}^* G_\alpha$ ile gösterilir. Eğer $I = 1,2,\dots,n$ şeklinde sonlu bir küme ise

$$G = G_1 * G_2 * \cdots G_n$$

ile gösterilir. Bu durumda bir $\alpha \in I$ için bir $I_\alpha: G_\alpha \to G$ homomorfizmi vardır öyle ki bu homomorfizm X_α dan X içine olan birim dönüşümün genişlemesidir.

Tanım 2.2. Bir L Lie cebirinin $\{L_\alpha | \alpha \in I\}$ Lie cebirlerinin serbest Lie Çarpımı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in I$ için $\varphi_\alpha: L_\alpha \to L$ monomorfizm olmak üzere herhangi bir A Lie cebiri ve herhangi bir $\theta_\alpha: L_\alpha \to A$ homomorfizmi için $\theta_\alpha = \chi\varphi_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\chi: L \to A$ homomorfizmi olmasıdır. $\prod_{\alpha\in I}{}^* L_\alpha$ serbest Lie çarpımından $\bigoplus L_\alpha$ direkt toplamına olan χ kanonik epimorfizmi vardır. Bu epimorfizm $\{L_\alpha | \alpha \in I\}$ cebirinden kendi üzerine olan birim dönüşüm vasıtasıyla tanımlanır.

Tanım 2.3. $\chi: \prod_{\alpha\in I}{}^* L_\alpha \to \bigoplus L_\alpha, \chi e = e (e \in L_\alpha, \alpha \in I)$ şeklinde tanımlı χ epimorfizminin çekirdeğine $\{L_\alpha | \alpha \in I\}$ Lie cebirlerinin $\prod_{\alpha\in I}{}^* L_\alpha$ serbest Lie çarpımının kartezyen altcebiri denir.

Tanım 2.4. L bir K cismi üzerinde tanımlı Lie cebiri olsun.

$$\gamma_1(L) = L, \gamma_2(L) = [\mathrm{L}, \mathrm{L}], \gamma_3(L) = [\mathrm{L}, \gamma_2(L)], \dots, \gamma_k(L) = [\mathrm{L}, \gamma_{k-1}(L)], \dots$$

olmak üzere,

$$L = \gamma_1(L) \supset \gamma_2(L) \supset \gamma_3(L) \supset \dots \supset \gamma_k(L) \supset \dots$$

serisine L Lie cebirinin alt merkezi serisi denir. Bu serinin k-yıncı terimi bazen L_k ile de gösterilir.

Tanım 2.5. Eğer $\gamma_k(L) = \{0\}$ olacak şekilde bir k pozitif tam sayısı varsa L ye nilpotent Lie cebiri denir. Bu k tamsayılarının en küçüğüne ise L nin nilpotentlik sınıfı denir. Eğer L Lie cebirinin nilpotentlik sınıfı 2 ise L ye bir abelyen Lie cebiridir denir.

Tanım 2.6. $i = 1,2,\dots,k,\dots$ için $\mathrm{n_i} \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir $\{\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \dots, \mathrm{n}_k, \dots\}$ dizisi için L Lie cebirinin polisentral serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

L_{n_1}; L Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 –inci terimi

L_{n_1,n_2}; L_{n_1} Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_2 –inci terimi

$L_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} = (L_{n_1,\dots,n_i})_{n_{i+1}}$; $L_{n_1,\dots,n_i}$ nin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun. Böylece

$$L \supseteq L_{n_1} \supseteq L_{n_1,n_2} \supseteq \dots \supseteq L_{n_1,\dots,n_i} \supseteq L_{n_1,\dots,n_i,n_{i+1}} \supseteq \dots$$

serisine L Lie cebirinin polisentral serisi denir.

Eğer $n_1 = n_2 = 2$ ise özel olarak $L_{2,2} = L''$ şeklinde gösterilir. Eğer $L'' = \{0\}$ ise L Lie cebirine metabelyen Lie cebiri denir.

Tanım 2.7. Eğer herhangi bir $0 \neq g \in L$ için L Lie cebirinden bir N nilpotent Lie cebirine $\psi_g(g) \neq 0$ olacak şekilde bir ψ_g homomorfizmi varsa L Lie cebirine rezidülü nilpotent denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

L Lie cebirinin alt merkezi serisinin terimlerinin kesişimi sıfır ise L Lie cebirine rezidülü nilpotent Lie cebiri denir. Gerçekten eğer, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(L) = \{0\}$ ise herhangi bir

0≠g∈L için bir n tamsayısı bulabiliriz öyle ki $\gamma_n(L)$ terimi g elemanını içermez.

L nin alt merkezi serisine ${}^{\mathrm{L}}/_{\gamma_2(\mathrm{L})}$, ${}^{\mathrm{L}}/_{\gamma_3(\mathrm{L})}$,… dizisini karşılık getirelim. Bu diziye L nin alt merkezi dizisi denir. *G, K* cismi üzerinde bir Lie cebiri olmak üzere eğer n≥1 için

$$ {}^{\mathrm{L}}/_{\gamma_n(\mathrm{L})} \cong {}^{\mathrm{G}}/_{\gamma_n(\mathrm{G})} $$

ise *L* ve *G* aynı alt merkezi diziye sahiptir denir.

Tanım 2.8. *L, K* cismi üzerinde tanımlı bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda *L* Lie cebirine paraserbest Lie cebiri denir.

i) *L* rezidülü nilpotenttir,

ii) *F* bir *X* kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olmak üzere ϕ*: F→L* doğal homomorfizmi her i≥1 için $\bar{\phi}_i$*:* ${}^{F}/_{\gamma_i(F)} \rightarrow {}^{L}/_{\gamma_i(L)}$ izomorfizmlerini belirler. Yani L Lie cebiri bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahiptir.

X kümesine L nin paraüreteç kümesi, *X* in kümesinin kardinalitesine de *L* Lie cebirinin rankı denir.

Teorem 2.1. Sonlu çokluktaki sonlu ranklı paraserbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı paraserbesttir.

İspat. İspatı için bakınız (Baur, 1978).

3. Paraserbest Metabelyen Çarpım

Tanım 3.1. P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve $P = P_1 * P_2$, P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı olsun. D, P nin kartezyen altcebiri olmak üzere P_1 ve P_2 nin metabelyen çarpımı

$$ P_1 *_{met} P_2 = {}^{P}/_{P'' \cap D} $$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1. P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve $P = P_1 * P_2$ olsun. Bu durumda D, P nin kartezyen alt cebiri olmak üzere ${}^{P}/_{P'' \cap D}$ paraserbesttir.

İspat. P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri ve $P = P_1 * P_2$ olsun. Bu durumda Teorem 2.1'den P paraserbesttir. Öncelikle ${}^{P}/_{P'' \cap D}$ bölüm cebirinin rezidülü nilpotent olduğunu gösterelim. Bir u Є $\bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left({}^{P}/_{P'' \cap D}\right)$ alalım. Bu durumda her n için

$$ \mathrm{u} \in \gamma_n \left({}^{P}/_{P'' \cap D}\right) = {}^{\gamma_n(\mathrm{P}) + (P'' \cap D)}/_{(P'' \cap D)} $$

olur. $a \in \gamma_n(\mathrm{P}) + (P'' \cap D)$ olmak üzere $u = a + (P'' \cap D)$ olsun. Açıktır ki

$$ a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\mathrm{P}) + (P'' \cap D) $$

dır. P rezidülü nilpotent olduğundan $a \in (P'' \cap D)$ olur. O zaman $u = (P'' \cap D)$ olup

$$ \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left({}^{P}/_{P'' \cap D}\right) = 0 $$

dır. O halde ${}^{P}/_{P'' \cap D}$ rezidülü nilpotenttir. Şimdi ${}^{P}/_{P'' \cap D}$ cebirinin bir serbest Lie cebir ile aynı alt merkezi diziye sahip olduğunu gösterelim.

$$ {}^{(\gamma_n(\mathrm{P}) + (P'' \cap D))}/_{(P'' \cap D)} \cong {}^{\gamma_n(\mathrm{P})}/_{(P'' \cap D)} $$

olduğunu biliniyor. O halde,

$$\left.\left(P/(P''\cap D)\right)\middle/\gamma_n\left(P/(P''\cap D)\right)\right. \cong \left.\left(P/(P''\cap D)\right)\middle/\left((\gamma_n(P)+(P''\cap D))/(P''\cap D)\right)\right.$$

$$\cong \left.P/(P''\cap D)\middle/\left(\gamma_n(P)/(P''\cap D)\right)\right. \cong P/\gamma_n(P)$$

olur. P paraserbest olduğundan

$$P/\gamma_n(P) \cong F/\gamma_n(F)$$

olacak şekilde bir F serbest Lie cebiri vardır. O zaman,

$$\left.\left(P/P''\cap D\right)\middle/\gamma_n\left(P/P''\cap D\right)\right. \cong F/\gamma_n(F)$$

dir. Böylece $P/P''\cap D$ bölüm cebiri paraserbesttir.

Tanım 3.2. $P_1 *_{met} P_2$ paraserbest olduğundan bu çarpıma paraserbest metabelyen çarpım da denir.

F, $\{x,y\}$ kümesi tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve L herhangi bir Lie cebiri olsun. F'/F'', $[x,y]$ tarafından üretilen $U(F/F'')$-modül olup $K[x,y]$ polinom halkasının F'/F'' üzerindeki etkisi

$$x^r y^s.[x,y] = [[[x,y]\underbrace{x]\ldots]x]}_{r-defa}\underbrace{y]\ldots]y]}_{s-defa}$$

olarak tanımlanır. Böylece F'/F'' cebirine $[x,y]$ tarafından üretilen $K[x,y]$- modül yapısı kazandırılmış olur. O halde her $u \in F'/F''$ elemanı $\alpha(x,y) \in K[x,y]$ olmak üzere $u = \alpha(x,y)[x,y]$ formundadır.

Tanım 3.3. F de $V = \{u(x,y) | u(x,y) = 0, \forall g,h \in L\}$ kümesi tarafından üretilen alt cebire F de L tarafından tanımlanan verbal altcebir denir. Bu cebiri $V(L)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.4. $u(x,y) \in F$ olsun. Eğer $\forall g,h \in L$ için $u(g,h) = u(h,g)$ ise $u(x,y)$, elemanına L nin F deki 2-simetrik kelimesi denir.

Not 3.1. $F/V(L)$ rankı 2 olan göreceli serbest (relatively free) Lie cebiri olsun. $u(x,y)$, L nin F deki 2-simetrik kelimesi ise $u(x,y) \equiv u(y,x)\big(mod\, V(L)\big)$dir.

Şimdi Fox türevlerini hatırlayalım (Fox, 1953).

F_n, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ kümesi tarafından üretilen sonlu n ranklı bir serbest Lie cebiri, $A_n = F_n/F'_n$ ve $M_n = F_n/F''_n$ olsun. Herhangi bir $v \in F_n$ için $\bar{v}$ ve $\tilde{v}$ ile v nin sırasıyla $F_n \to A_n$ ve $F_n \to M_n$ doğal homomorfizmleri altındaki görüntüleri gösterelim. $i = 1,2,\ldots,n$ için ∂_i Fox türevi her $\tilde{u},\tilde{v} \in U(M_n)$

$$\partial_i(\tilde{u}+\tilde{v}) = \partial_i(\tilde{u}) + \partial_i(\tilde{v}),$$

$$\partial_i(x_j) = \delta_{ij},$$

$$\partial_i(\tilde{u}.\tilde{v}) = \bar{u}\partial_i(\tilde{v}) + \epsilon(\tilde{v})\partial_i(\tilde{u}),$$

olacak şekilde $U(M_n)$ den $U(A_n)$ ye olan lineer bir fonksiyondur. Burada δ_{ij} Kronecker delta ve $\epsilon: U(M_n) \to K$ her $i = 1,\ldots,n$ için $\epsilon(x_i) = 0$ olacak şekilde bir homomorfizmdir. $\tilde{w} \in M_n$ ve $\bar{\lambda} \in U(A_n)$ ise

$$\partial_i(\bar{\lambda}\tilde{w}) = \bar{\lambda}\partial_i(\tilde{w})$$

dir (Bryant ve Roman'kov, 1999). Şimdi genelleştirilmiş türevler ve Smel'kin gömmesini inceleyelim (Smel'kin ve Syrtsov, 2005).

$A_1, \dots, A_m$ sıfırdan farklı serbest abelyen Lie cebirleri, $A = A_1 * \dots * A_m$, $H = A/_{A'}$ ve $G = A/_{A''}$ olsun. Her $g \in U(A)$ için $\bar{g}$ ve $\tilde{g}$ ile g nin $U(A) \to U(H)$ ve $U(A) \to U(G)$ kanonik homomorfizmleri altındaki görüntülerini gösterelim. T bir bazı $\{t_1, \dots, t_n\}$ olan sol $U(H)$-modül $M(H,T)$, $\begin{pmatrix} H & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix}$ formundaki matrislerin cebiri yani

$$M(H,T) = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{a}_i & 0 \\ \bar{a}_i t_i & 0 \end{pmatrix} | a_i \in A_i, i = 1,2, \dots, n \right\}$$

olsun. $i = 1,2, \dots, n$ ve $a_i \in A_i$ olmak üzere

$$a_i \to \begin{pmatrix} \bar{a}_i & 0 \\ \bar{a}_i t_i & 0 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan fonksiyon çekirdeği A'' olan bir $\sigma: A \to M(H,T)$ homomorfizmi belirler. Böylece $A/_{A''}$, $M(H,T)$ içine gömülebilir. Bu gömme Shmel'kin gömmesi olarak bilinir. Herhangi bir $\tilde{a} \in A/_{A''}$ için

$$\sigma(\tilde{a}) = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} D_i(\tilde{a}) t_i & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu biliniyor. (Burada $i = 1,2, \dots, n$ için D_i genelleştirilmiş türevlerdir.)

$$D_i: U(G) \to U(H)$$

genelleştirilmiş türevleri aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlardır.

1) $D_i(\tilde{u} + \tilde{v}) = D_i(\tilde{u}) + D_i(\tilde{v})$, $\quad \tilde{u}, \tilde{v} \in U(G)$
2) $D_i(\tilde{u}.\tilde{v}) = \bar{u} D_i(\tilde{v}) + \epsilon(\tilde{v}) \partial_i(\tilde{u})$,
3) $D_i(\tilde{u}) = \bar{u}$, $\tilde{u} \in A_i$ ise
4) $D_i(\tilde{u}) = 0$, $\tilde{u} \in A_j$ ve $i \neq j$ ise

Burada $\epsilon: U(G) \to K$, $g \in G$ için $\epsilon(g) = 0$ olacak şekilde bir homomorfizmdir. Fox türevlerinde olduğu gibi $\tilde{w} \in G$ ve $\bar{\lambda} \in U(H)$ ise $D_i(\bar{\lambda}\tilde{w}) = \bar{\lambda} D_i(\tilde{w})$ eşitliği geçerlidir.

Şimdi bu çalışmamızın temel sonuçlarını vereceğiz.

4. Verbal Altcebir ve 2-Simetrik Kelimeler

$P_1, \dots, P_n$ paraserbest abelyen Lie cebirleri ve $P = P_1 * \dots * P_n$ ise $P_1, \dots, P_n$ paraserbest Lie cebirlerinin serbest çarpımı olsun.

Teorem 4.1. $L = P/_{P''}$ ise F de L tarafından tanımlanan verbal altcebiri F'' ne eşittir. Yani $V(L) = F''$ dür.

İspat. $F'' \subset V(L)$ olduğu açıktır. Şimdi $V(L) \subset F''$ olduğunu gösterelim. $u(x,y) \in V(L)$ olsun. $F'(modF'')$, $[x,y]$ tarafından üretilen $U(F/_{F'})$- modül olduğundan her $w \in F'(modF'')$ elemanı, $\alpha(x,y) \in U(F/_{F'})$ olmak üzere

$$w \equiv \alpha(\bar{x}, \bar{y})[x,y](modF'')$$

formundadır. Bu durumda

$$u(x,y) \equiv ax + by + \alpha(\bar{x}, \bar{y})[x,y](modF'')$$

olduğunu kabul edebiliriz. Her $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in L$ için $u(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 0$ olduğu tanımdan dolayı açıktır. Şimdi $\tilde{v}_1 = \tilde{c}_1 \neq 0$ ve $\tilde{v}_2 = 0$ alalım. O zaman

$$u(\tilde{c}_1, 0) = a.c_1 = 0$$

ve dolayısıyla $a = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{v}_1 = 0$ ve $\tilde{v}_2 = \tilde{c}_2 \neq 0$ seçilirse

$$u(0, \tilde{c}_2) = b.c_2 = 0$$

ve $b = 0$ bulunur. Buradan

$$u(x,y) \equiv \alpha(\bar{x}, \bar{y})[x,y](modF'')$$

yani $u(x,y) \in F'$ bulunur. Şimdi $v_1 = \tilde{c}_1 \in P_1$, $v_2 = \tilde{c}_2 \in P_2$ alalım. $\tilde{c}_1 \neq 0$, $\tilde{c}_2 \neq 0$ dır. O zaman

$$u(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = \alpha(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)[\tilde{c}_1, \tilde{c}_2] = 0$$

olur. $\tilde{c}_1$e göre genelleştirilmiş türevini alalım. Türevin değeri $U(F/_{F'})$ de olup

$$-\alpha(\bar{c}_1, \bar{c}_2)\bar{c}_2\bar{c}_1 = 0$$

buluruz. $U(F/_{F'})$ tamlık bölgesi olduğundan $\alpha(\bar{c}_1, \bar{c}_2) = 0$ elde edilir. Her $\tilde{c}_i \in P_i$ ve $\tilde{c}_j \in P_j$ için $\alpha(\tilde{c}_i, \tilde{c}_j) = 0$ olup $\alpha(x,y) = 0$ dır. Bu durumda $u(x,y) \in F''$ olup $V(L) = F''$ dür.

Sonuç 4.1. M, $P_1, \dots, P_n$ paraserbest abelyen Lie cebirlerinin metabelyen çarpımı ise $V(M) = F''$ dür.

İspat. $M = P/_{P'' \cap D}$ olup $i = 1,2, \dots, n$ için P_i ler abelyen olduğundan $P'' \cap D = P''$ dür. Dolayısıyla $M = P/_{P''}$ olur. Teoremden $V(M) = F''$ olduğu görülür.

Şimdi 2-simetrik bir kelimelerin $V(M)$ tarafından nasıl belirlendiğini gösterelim.

Teorem 4.2. $u(x,y)$, M nin F deki 2-simetrik bir kelimesi olsun. O zaman $u(x,y)$,

$$u(x,y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x,y)[x,y](mod\ F'')$$

formundadır. Burada $\alpha(x,y) \in U(F/_{F'})$ ve $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$ dir.

İspat. $u(x,y)$, M nin F deki 2-simetrik bir kelimesi ise $u(x,y) = u(y,x)$ dir. $F'/_{F''}$, $U(F/_{F'})$-modül olduğundan $u(x,y)$ elemanı, $v \in F''$ ve $\alpha(x,y) \in U(F/_{F'})$ olmak üzere

$$u(x,y) = ax + by + \alpha(x,y)[x,y] + v$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{x} = x + F''$, $\tilde{y} = y + F''$ olduğu göz önüne alınırsa

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) \equiv a\tilde{x} + b\tilde{y} + \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})[\tilde{x}, \tilde{y}]$$

olduğu açıktır. $u(\tilde{x}, \tilde{y}) = u(\tilde{y}, \tilde{x})$ eşitliği göz önüne alalım. Buradan

$$\begin{aligned} a\tilde{x} + b\tilde{y} + \alpha(\tilde{x}, \tilde{y})[\tilde{x}, \tilde{y}] \\ = a\tilde{y} + b\tilde{x} + \alpha(\tilde{y}, \tilde{x})[\tilde{y}, \tilde{x}] \end{aligned}$$

ve

$$a\tilde{x} + b\tilde{y} = a\tilde{y} + b\tilde{x} \quad (1)$$

$$\big(\alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) + \alpha(\tilde{y}, \tilde{x})\big)[\tilde{x}, \tilde{y}] \equiv 0 \quad (2)$$

elde edilir. (1) eşitliğinden $a = b$ bulunur. (2) eşitliğinin $\tilde{x}$ e göre genelleştirilmiş türevini alalım.

$$-\big(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha(\bar{y}, \bar{x})\big)\bar{y}.\bar{x} = 0,$$

bulunur. $U(F/_{F'})$ bir tamlık bölgesi olduğundan $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) + \alpha(\bar{y}, \bar{x}) = 0$ bulunur. $a = b = \lambda$ diyelim. O halde $u(x,y)$ elemanı

$$u(x,y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x,y)[x,y](modF'')$$

$$\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$$

formundadır.

Sonuç 4.2. $u(x,y)$, M nin F deki 2-simetrik kelimesi ise $u(x,y) - u(y,x) \in V(M)$ dir.

İspat. $u(x,y)$, M nin F deki 2-simetrik kelimesi olsun. Teoremden $u(x,y)$

$$u(x,y) = \lambda x + \lambda y + \alpha(x,y)[x,y] + v,$$
$$\alpha(x,y) \in U(F/_{F'}),\ v \in F''$$

formundadır. $u(x,y)$, 2-simetrik olduğundan $u(x,y) = u(y,x)$ olup

$$u(x,y) - u(y,x) = v(x,y) - v(y,x) = 0$$

elde edilir. O halde her $g,h \in M$ için

$$u(g,h) - u(h,g) = v(g,h) - v(h,g) = 0$$

dir. Yani $u(x,y) - u(y,x) \in V(M)$ dir.

$w \in V(M)$ ise her $g,h \in M$ için $w(g,h) = 0$ olup $w(g,h) = w(h,g)$ dir. Yani $w(x,y) \in F''$, M nin F deki 2-simetrik bir kelimesidir. Diğer taraftan

$$u(x,y) = ax + by + \alpha(x,y)[x,y](modF''),$$

$$\alpha(x,y) \in U(F/_{F'}) \text{ ve } \alpha(x,y) = -\alpha(y,x),$$

ise $w \in F''$ herhangi bir eleman olmak üzere

$$u(x,y) = ax + ay + \alpha(x,y)[x,y] + w,$$

M nin F deki 2-simetrik kelimesidir. Buradan açıkça görülüyor ki 2-simetrik kelimeler $V(M)$ tarafından mükemmel bir şekilde belirlenir.

Örnek 4.1. $\alpha(x,y) = x^2y - y^2x$ polinomunu alalım. $-\alpha(y,x) = -y^2x + x^2y$ olup $\alpha(x,y) = -\alpha(y,x)$ dir.

$$u(x,y) = x + y + \alpha(x,y)[x,y] + w, w \in F'',$$

M nin F deki 2-simetrik kelimesidir. Gerçekten

$$u(x,y) = x + y + (x^2y - y^2x)[x,y](mod\ F'')$$

$$= x + y + \left[\left[\left[[x,y],x\right],x\right],y\right] - \left[\left[\left[[x,y],y\right],y\right],x\right](mod\ F'')$$

ve

$$u(y,x) = y + x + \left[\left[\left[[y,x],y\right],y\right],x\right] - \left[\left[\left[[y,x],x\right],x\right],y\right](mod\ F'')$$

olup $u(x,y) = u(y,x)$ dir.

Açıklamalar

Bu çalışma 31. Ulusal Matematik Sempozyumunda (UMS 2018) sunulmuştur.

5. Kaynaklar

Baumslag, G. 1967. ‘’Groups with the same lower central sequence as a relatively free group I. The groups’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 129, 308-321.

Baumslag, G. 1969. ‘’Groups with the same lower central sequence as a relatively free group. II Properties’’, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 142, 507-538.

Baur, H. (1978). ‘’Parafreie Liealgebren und homologie’’, *Diss. Eth Nr., Zurich*, 6126, 60p.

Bryant, R.M. and Roman’kov, V.A. 1999. ‘’Automorphism groups of relatively free groups’’, *Math. Proc. Camb. Phil. soc.*, 127(3), 411-424.

Fox, R.H. 1953. ‘’Free differential calculus. I. Derivations in the free group ring’’, *Ann. Math.* 57(3), 547-560.

Pan, J. 2006. ‘’On 2-Symmetric words and verbal subgroup of metabelian product of abelian groups’’, *Alg. Colloquium*, 13(3), 535-540.

Shmel’kin, A.L. and Syrtsov, A.V. 2005. ‘’On embeddings of some factor algebras of free sums of Lie algebras’’, *J. Math. Sci*. 13(6), 6148-6152.