Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(2), 778-782
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019, 12(2), 778-782
DOI:10.18185/erzifbed.487038
Research Article

Serbest Nilpotent Lie Cebirlerinin Otomerkezi Otomorfizmleri

Özge ÖZTEKİN[1*], Naime EKİCİ[2]

[1]Gaziantep Üniversitesi, Matematik Bölümü, Gaziantep, TÜRKİYE

Geliş / Received: 23/11/2018, Kabul / Accepted: 13/05/2019

Öz

F bir K cismi üzerinde sonlu üretilmiş serbest Lie cebiri, $\gamma_n(F)$ F nin, n-inci alt merkezi terimi olmak üzere $L = F/\gamma_n(F)$ olsun. Bu çalışmada L nin otokomütatörleri ve G, L nin otomorfizm grubunun bir alt grubu olmak üzere G ye göre L nin otomerkezi ve otomerkezi otomorfizmleri tanımlanmış olup bu otomorfizmlerin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca otomerkezi otomorfizmlerle ilgili sonuçlar elde edilmiş ve L nin merkezinin otomerkezi otomorfizmler grubu içindeki merkezleyeni tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Otomerkezi otomorfizmler, serbest Lie cebirleri

Autocentral Automorphisms of Free Nilpotent Lie Algebra

Abstract

Let F is a finite generated Lie algebra on a field K, and let $L = F/\gamma_n(F)$ where $\gamma_n(F)$ is the nth lower central term of F. In this study, the autocommutators of L and the autocentral, autocentral automorphisms of L according to G were defined (where G is a subgroup of automorphism groups of L). In addition, the results related to autocentral automorphisms were obtained and the centralizer of the center of L in autocentral automorphisms group is defined.

Keywords: Autocentral automorphisms, free Lie algebra

1. Giriş

K bir cisim ve F, K üzerinde sonlu ranklı bir serbest Lie cebiri ve $L = F/\gamma_n(F)$ n-inci sınıftan serbest nilpotent Lie cebiri olsun. L nin tüm otomorfizmlerinin grubunu $Aut(L)$ ile gösterelim. $\alpha \in Aut(L)$ ve $u \in L$ için $[\alpha, u] = \alpha(u) - u$ elemanı α ile u nun otokomütatörü olarak adlandırılır. Bu çalışmada, otokomütatörler kullanılarak L nin otomerkezi, otokomütatör altcebiri ve otomerkezi otomorfizmler grubunun yapısı hakkında bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Lie cebirlerinin farklı tiplerdeki otomorfizmlerini ve bu otomorfizmlerin özelliklerini incelemek literatürde üzerinde çalışılan önemli bir problem haline gelmiştir. Örneğin bir serbest center-by-metabelyen Lie cebirinin merkezi otomorfizmleri (Esmerligil, 2016), serbest nilpotent Lie cebirinin merkezi otomorfizmleri (Öztekin ve Ekici, 2017) ve bir serbest metabelyen nilpotent Lie cebirinin normal otomorfizmleri (Fındık, 2010) çalışılmıştır. Benzeri çalışmalara gruplar teorisinde de rastlanmaktadır (Attar, 2009; Hegarty 1994; Hegarty 1997; Moghaddam ve Safa 2010). Çalışmamızın temel amacı Moghaddam ve Safa (2010) da gruplar için elde edilen bazı sonuçların serbest nilpotent Lie cebirlerinde de doğru olduğunu göstermektir. Elde ettiğimiz sonuçlar benzese de ispatta oldukça önemli farklılıklar bulunmaktadır.

2. Temel Bilgiler

K karakteristiği sıfır olan bir cisim, F K üzerinde sonlu bir küme tarafından üretilen serbest Lie cebiri ve $\gamma_n(F)$, F nin alt merkezi serisinin n-inci terimi olsun. O zaman $L = F/\gamma_n(F)$ n-inci dereceden serbest nilpotent Lie cebiridir. $u, v \in L$ için $[u, v]$ komütatörü ile Lie çarpımını göstereceğiz.

* Sorumlu Yazar: ozgeoztekin@gantep.edu.tr

Kullanacağımız komütatörler sol normlu olup

$[u_1, u_2, \ldots u_{j-1}, u_j] = [[u_1, u_2, \ldots, u_{j-1}], u_j],\ j \geq 3$

şeklindedir. Her $v \in L$ için $adv(u) = [u, v], u \in L$, olarak tanımlanan $adv: L \to L$ lineer dönüşümü L nin bir türevi olup nilpotenttir. Yani $\gamma_n(L) = 0$ olduğundan $ad^{n-1}v = 0$ dır. O halde

$$e^{adv} = 1 + \frac{adv}{1!} + \frac{ad^2v}{2!} + \ldots + \frac{ad^{n-2}v}{(n-2)!}$$

lineer dönüşümü iyi tanımlı olup L nin bir iç otomorfizmidir. L nin tüm iç otomorfizmlerinin grubunu $Inn(L)$ ile göstereceğiz. İç otomorfizmler grubu, $Aut(L)$ nin bir normal altgrubunu oluştururlar.

$\alpha \in Aut(L)$ ve $u \in L$ için α ile u nun otokomütatörü $[\alpha, u] = \alpha(u) - u$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.1. G, $Aut(L)$ nin bir altgrubu olsun.

1. $L^G = \{u \in L \mid [\alpha, u] = 0, her\ \alpha \in G\ icin\}$

kümesine L nin G ye göre otomerkezi denir.

2. $[G, L] = \{[\alpha, u] \mid \alpha \in G, u \in L\}$ kümesi tarafından üretilen altcebire L nin otokomütatör altcebiri denir. Bu altcebiri $OK(L)$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.1. $G = Inn(L)$ ise

i) $L^G = Z(L)$ dir,

ii) $OK(L) = L'$ dir.

Burada $Z(L)$ ve L' sırasıyla L nin merkezi ve L nin türetilmiş altcebiridir.

İspat: $G = Inn(L)$ olsun.

i) $u \in Z(L)$ olsun. Her $\theta \in G$ için $[\theta, u] = 0$ olduğunu göstereceğiz. θ bir iç otomorfizm olduğundan bir $v \in L$ için

$$\theta = e^{adv} = 1 + \frac{adv}{1!} + \frac{ad^2v}{2!} + \ldots + \frac{ad^{n-2}v}{(n-2)!}$$

formundadır. Buna göre

$$\begin{aligned}[\theta, u] &= \theta(u) - u \\ &= u + [u, v] \\ &\quad + \frac{[u, v, v]}{2!} + \ldots + \frac{[u, v, \ldots, v]}{(n-2)!} \\ &\quad - u\end{aligned}$$

ve $u \in Z(L)$ olduğundan $[\theta, u] = 0$ elde edilir. Yani, $u \in L^G$ olup $Z(L) \subseteq L^G$ dir.

Şimdi $u \in L^G$ olsun. O zaman her $\theta \in G$ için $\theta = e^{adv}$ formunda olup

$$\begin{aligned}0 = [\theta, u] &= \theta(u) - u \\ &= [u, v] \\ &\quad + \frac{[u, v, v]}{2!} + \ldots + \frac{[u, v, \ldots, v]}{(n-2)!}\end{aligned}$$

ve $[u, v] = 0$ elde edilir. O halde $L^G \subseteq Z(L)$ olup eşitlik elde edilmiş olur.

ii) Her $u \in L$ ve $\theta \in G$ için $\theta = e^{adv}$, $v \in L$, formunda olup $[\theta, u] = \theta(u) - u = [u, v] + \frac{[u,v,v]}{2!} + \ldots + \frac{[u,v,\ldots,v]}{(n-2)!} \in L'$ dür. Yani $OK(L) \subseteq L'$ dür.

$u \in L'$ ise $v, w \in L$ için $u = [v, w]$ formundadır.

$u \in \gamma_{n-1}(L)$ ise $[v, w, w] = \ldots = [v, w \ldots w] = 0$ olup

$$\begin{aligned}u = [v, w] + v - v &= e^{adw}(v) - v \\ &= [e^{adw}, v] \in OK(L)\end{aligned}$$

dir. Şimdi $u \in L(mod\gamma_{n-1}(L))$ olsun. $adL = \{adv \mid v \in L\}$ olmak üzere $L/Z(L) \cong adL$ olduğu iyi bilinen bir sonuç olup $adL \cong L/Z(L) \cong F/\gamma_n(F)/\gamma_{n-1}(F)/\gamma_n(F) \cong F/\gamma_{n-1}(F)$ dır. Şimdi bu izomorfizmden $u \in F'/\gamma_{n-1}(F)$ olduğunu düşünebiliriz. Yani her u ya bir iç otomorfizm karşılık gelir. Dolayısıyla bir $e^{adz} \in Inn(L)$ için $e^{adz(t)} = u$ olacak şekilde $z, t \in L$ vardır. Buradan $u = [e^{adz}, t] \in OK(L)$ elde edilir. Yani $L' \subseteq OK(L)$ dır. Böylece $L' = OK(L)$ dir.

Tanım 2.2. $\alpha \in G$ olsun. Her $u \in L$ için $[\alpha, u] \in L^G$ ise α ya G ye göre otomerkezi otomorfizm denir. Dikkat edilirse $[\alpha, u] = \alpha(u) - u \in L^G$ ise $\alpha(u) \equiv u(modL^G)$ dir. G ye göre tüm otomerkezi otomorfizmlerinin grubunu $OC_G(L)$ ile göstereceğiz. $OC_G(L)$, $Aut(L)$ nin bir normal altgrubudur.

Teorem 2.1. $OC_G(L) \cong Hom(L/L^G, L^G)$ dir.

İspat. $\psi: OC_G(L) \to Hom(L/L^G, L^G)$ homomorfizmini, $\psi_\alpha: L/L^G \to L^G, \psi_\alpha(u + L^G) = \alpha(u) - u$ olmak üzere her $\alpha \in OC_G(L)$ için $\psi(\alpha) = \psi_\alpha$ olarak tanımlayalım.

ψ nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Bunun için önce ψ_α nın iyi tanımlı olduğunu göstermek gerekiyor.

$u_1 + L^G$, $u_2 + L^G \in L/L^G$ için $u_1 + L^G = u_2 + L^G$ olsun. O zaman $u_1 - u_2 \in L^G$ olup her $\alpha \in G$ için $\alpha(u_1 - u_2) = u_1 - u_2$ dir. Buradan $\alpha(u_1) - u_1 = \alpha(u_2) - u_2$ ve dolayısıyla $\psi_\alpha(u_1 + L^G) = \psi_\alpha(u_2 + L^G)$ elde edilir. Yani ψ_α iyi tanımlıdır. Şimdi $\alpha, \beta \in OC_G(L)$ için $\psi(\alpha) \neq \psi(\beta)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\psi(\alpha)(u + L^G) = \alpha(u) - u \neq \beta(u) - u == \psi(\beta)(u + L^G)$, her $u \in L$ için olup $\alpha \neq \beta$ dır. Yani ψ iyi tanımlıdır.

$\alpha \in ker\psi$ ise $\omega(\alpha) = 0$ dır. Her $u \in L$ için $0 = \psi(\alpha)(u + L^G) = \alpha(u) - u$ ve $\alpha(u) = u$ olup $\alpha = Id$ dır. O halde $ker\psi = Id$ olup ψ birebirdir.

Her $\beta \in Hom(L/L^G, L^G)$ için $\alpha: L \to L$ homomorfizmini $\alpha(u) = u + \beta(u + L^G)$ olarak tanımlayalım. Buna göre $\alpha(u) - u \in L^G$ olup $\alpha \in OC_G(L)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \beta(u + L^G) = \alpha(u) - u = \psi_\alpha(u + L^G) \\ = \psi(\alpha)(u + L^G) \end{aligned}$$

eşitliklerinden $\beta = \psi(\alpha)$ elde edilir. Yani ψ örtendir.

Böylece ψ nin bir izomorfizma olduğu görülür.

Not. $\alpha, \beta \in OC_G(L)$ ve her $u \in L$ için $\alpha\beta(u) \equiv \beta(u)(modL^G) \equiv u(modL^G) \equiv \beta\alpha(u)(modL^G)$ olup $\alpha\beta = \beta\alpha$ dır. Yani $OC_G(L)$ abelyandır.

Şimdi $OC_G(L)$ nin G deki merkezleyenini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} H = Z_G(OC_G(L)) = \{\alpha \in G \mid \alpha\beta \\ = \beta\alpha, her\ \beta \in OC_G(L)\} \end{aligned}$$

$W = [H, L]$ diyelim.

Lemma 2.2. $[InnL, L] \subseteq W$dur.

İspat. Önce $L^G \subseteq Z(L)$ olduğunu gösterelim. $u \in L^G$ ise her $\theta \in G$ için $\theta(u) = u$ dur. Özel olarak θ bir iç otomorfizm ise yine $\theta(u) = u$ olup Önerme 2.1 den $L^G \subseteq Z(L)$ olduğu görülür.

Şimdi $InnL \subseteq H$ olduğunu gösterelim.

Her $\beta \in OC_G(L)$ ve $u \in L$ için $\beta(u) = u + w$ olacak şekilde bir $w \in L^G$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $L^G \subseteq Z(L)$ olduğundan her $v \in L$ için $[w, v] = 0$ dır. $\alpha \in InnL$ ise $\alpha = e^{adv}$, olacak şekilde bir $v \in L$ vardır. Her $\beta \in OC_G(L)$ ve $u \in L$ için

$$\begin{aligned} \alpha\beta(u) &= \beta(u) + [\beta(u), v] + \frac{[\beta(u), v, v]}{(2!)} + \ldots + \frac{[\beta(u), v, \ldots, v]}{(n-2)!} \\ &= u + w + [u + w, v] + \frac{[u+w, v, v]}{(2!)} + \ldots + \frac{[u+w, v, \ldots, v]}{(n-2)!} \\ &= u + [u, v] + \frac{[u,v,v]}{(2!)} + \ldots + \frac{[u, v, \ldots, v]}{(n-2)!} + w + [w, v] + \frac{[w,v,v]}{(2!)} + \ldots + \frac{[w, v, \ldots, v]}{(n-2)!} \\ &= \alpha(u) + w \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\beta\alpha(u) = u + w$ dır. O halde $\alpha\beta = \beta\alpha$ olup $\alpha \in H$ dir. Yani $InnL \subseteq H$ dir. Böylece

$$[InnL, L] \subseteq [H, L] = W$$

elde edilmiş olur.

Lemma 2.3. $OC_G(L)$, W üzerinde birim olarak etki eder.

İspat. $\beta \in OC_G(L)$, $\alpha \in H$ ve $u \in L$ olsun.

$$\begin{aligned}\beta([\alpha,u]) &= \beta([\alpha,u]) - [\alpha,u] + [\alpha,u]\\ &= \beta(\alpha(u)) - \beta(u) - \alpha(u) + u + [\alpha,u]\\ &= \alpha\big(\beta(u)\big) - \beta(u) - \alpha(u) + u + [\alpha,u]\\ &= \alpha(\beta(u) - u) - \beta(u) + u + [\alpha,u]\\ &= \beta(u) - u - \beta(u) + u + [\alpha,u]\\ &= [\alpha,u].\end{aligned}$$

Teorem 2.2. $OC_G(L) \cong Hom(L/W, L^G)$ dir.

İspat. $\psi: OC_G(L) \to Hom(L/W, L^G)$ fonksiyonunu her $\alpha \in OC_G(L)$ için $\psi(\alpha) = \psi_\alpha$ olarak tanımlayalım öyle ki $\psi_\alpha(u + W) = \alpha(u) - u$ olsun. Lemma 2.3 den $OC_G(L)\, W$ üzerinde birim olarak etki ettiğinden $u_1 + W = u_2 + W$ için $u_1 - u_2 \in W$ olup Lemma 2.3 den $\alpha(u_1 - u_2) = u_1 - u_2$ ve dolayısıyla $\alpha(u_1) - u_1 = \alpha(u_2) - u_2$ bulunur. O halde $\psi_\alpha(u_1 + W) = \psi_\alpha(u_2 + W)$ dur. Yani ψ_α iyi tanımlı olup ψ de iyi tanımlıdır. ψ nin birebir ve örten olduğu Teorem 2.1 deki gibi gösterilebilir.

Teorem 2.3. $Hom(L/L^G, L^G) \cong Hom(L, L^G)$ dir.

İspat. $\theta: Hom(L/L^G, L^G) \to Hom(L, L^G)$ fonksiyonunu her $\alpha \in Hom(L/L^G, L^G)$ için $\theta_\alpha = \theta(\alpha)$, öyle ki her $u + L^G \in L/L^G$ için $\theta(\alpha)(u + L^G) = \theta_\alpha(u + LG) = \alpha(u + L^G)$ olarak tanımlayalım.

θ nın iyi tanımlı olduğunu göstermek için önce θ_α nın iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

Her $u_1, u_2 \in L^G$ için $\theta_\alpha(u_1) \neq \theta_\alpha(u_2)$ olsun. $\theta_\alpha(u_1) = \alpha(u_1 + L^G) \neq \alpha(u_2 + L^G) = \theta_\alpha(u_2)$ dir. $\alpha \in Hom(L/L^G, L^G)$ iyi tanımlıdır. Dolayısıyla $u_1 + L^G \neq u_2 + L^G$ olup $u_1 \neq u_2$ dir. Yani θ_α iyi tanımlıdır. Şimdi $\theta(\alpha_1) \neq \theta(\alpha_2)$ olduğunu kabul edelim. $\alpha_1 = \alpha_2$ olsa $\theta(\alpha_1)(u) = \theta\alpha_1(u) = \alpha_1(u + L^G) = \alpha_2(u + L^G) = \theta(\alpha_2)(u)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olup θ iyi tanımlıdır.

θ birebirdir: $\alpha \in ker\theta$ olsun $\theta(\alpha) = 0$ olup her $u \in L$ için $\theta(\alpha)(u) = \alpha(u + L^G) = 0$ dır. Buradan $\alpha = 0$ olup $ker\psi = 0$ dır.

θ örtendir: Her $u \in \beta \in Hom(L, L^G)$ için $\alpha: L/L^G \to L^G$ homomorfizmini $\alpha(u + L^G) = \beta(u)$ olarak tanımlayalım. Buradan $\beta = \theta(\alpha)$ olduğu kolayca görülür.

Böylece $Hom(L/L^G, L^G) \cong Hom(L, L^G)$ elde edilir.

Teorem 2.4. $OC_G(L) \cong Hom(L, L^G)$ dir.

İspat. Teorem 2.1 ve Teorem 2.3 den sonuç hemen görülür.

Tanım 2.3. $Z(L)$ nin $OC_G(L)$ içindeki merkezleyeni

$$C_{OC_G(L)}(Z(L)) = \{\alpha \in OC_G(L) \mid [\alpha, u] = 0, her\ u \in Z(L)\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.4. $C_{OC_G(L)}(Z(L)) \cong Hom(L/Z(L) + [H, L], L^G)$ dir.

İspat. $\theta: C_{OC_G(L)}(Z(L)) \rightarrow Hom(L/Z(L) + [H,L], L^G)$ fonksiyonunu her $u \in L$ için $\theta_\alpha(u + Z(L) + [H,L]) = \alpha(u) - u$ olmak üzere $\theta(\alpha) = \theta_\alpha$ olarak tanımlayalım. α, $Z(L)$ ve $[H,L]$ üzerinde birim olduğundan θ_α iyi tanımlıdır. θ nın izomorfizma olduğu Teorem 2.1 deki gibi gösterilir.

3. Kaynaklar

Attar, M. S. 2009. "On the marginal automorphisms of a group", *Comm. Alg*. 37, 2300-2308.

Esmerligil, Z. 2016. "On central automorphisms of free center-by-metabelian Lie algebras", *IARJSET*, 3,7.

Fındık, Ş. 2010. "Normal and normally outer automorphisms of free metabelian nilpotent Lie algebras", *Serdica Math. J*. 36, 171-210.

Hegarty, P. V. 1994. "The absolute centre of a group", *J. Alg*. 169, 929-935.

Hegarty, P. V. 1997. "Autocommutator subgroups of finite groups", *J. Alg*. 190, 556-562.

Moghaddam, M. R., Safa, H. 2010. "The group of autocentral automorphisms", *Group Theory Conf., Ferdowsi Uni. of Mashad*, Mashad, 81-83.

Öztekin, Ö., Ekici, N. 2017. "Central automorphisms of free nilpotent Lie algebras", *Journal of Algebra and Its Applications*, 16, 11 (2017).