İNVERS DÜZLEM VE BLOK DİZAYN

Şahin KORKMAZ,İbrahim ÖZGÜR

***Özet* – Bu çalışma invers düzlem ve blok dizayn hakkında bilinen çalışmaların bir derlemesidir. Özellikle projektif düzlem, Galois düzlemi , blok dizayn tanımları verilmiştir. Blok dizaynların kombinatöryel özelliklerinden bahsedildi. Daha sonra invers düzlem (Möbius düzlemi) ile ilgili tanım ve örnek verildi, invers düzlemin aksiyomları tanıtıldı.**

Anahtar Kelimeler: Möbius Düzlemi, İnvers Düzlem, Blok Dizayn, Galois Düzlemi

I.GİRİŞ

Bu çalışmada F.Karteszi'nin "An Introduction to Finite geometries" kitabı esas alınmıştır. Sayı, eşya ve benzeri şeylerin herhangi bir topluluğu cümle, cümleyi oluşturan şeylerden herbiri bu cümlenin elemanı olarak göz önüne alınır. n negatif olmayan herhangi bir tam sayı olmak üzere eleman sayısı n olan bir cümleye "sonlu cümle" denir. Bir cümle sonlu değil ise "sonsuz cümle" olarak düşünülür.[1]

Geometride kullanılan tanımsız (ilkel) kavramlar "nokta", "doğru", "düzlem" ve "üzerinde bulunma bağıntıları" dır. Eğer bir geometride kullanılan noktalar cümlesi sonlu, dolayısı ile bu cümlenin alt kümeleri olarak ele alınan doğrular cümlesi de sonlu olup böyle geometrilere sonlu geometriler denir.

Sonlu geometriler teorisinin ilk gelişimi klasik geometri ile uyumludur. Ancak kombinatöryel ve cebirsel konulardan etkilenmiştir.

II.TEMEL KAVRAMLAR

Sonlu elemanlı $\Sigma = \{ p_1, p_2, .. \}$ noktalar kümesi ile bu kümenin bazı alt kümelerinden oluşan doğrular kümesi göz önüne alınsın. p_i noktasının l_j doğrusu üzerinde olması da $p_i \in l_j$ ile gösterildiğinde bir projektif düzlem aşağıdaki aksiyom sistemi ile tanımlanır.

Ş.Korkmaz,Hereke Nuh Çimento Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi , Matematik Öğretmeni,Kocaeli
İ.Özgür,Sakarya Üniversitesi,Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü,Adapazarı

P_1: Eğer $p \in \Sigma$ ve $Q \in \Sigma$ ise $p \in l$ ve $Q \in l$ olacak biçimde bir tek l doğrusu vardır.
P_2: Eğer $d \subset \Sigma$ ve $l \subset \Sigma$ ise $p \in d$ ve $p \in l$ olacak biçimde bir p noktası vardır.
P_3: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.[2]

Sonlu projektif düzlemlerde aşağıdaki özellikleri sağlayan $q \geq 2$ pozitif tamsayısına projektif düzlemin mertebesi denir.

1)Her doğru üzerinde q+1 nokta vardır
2)Her noktadan q+1 doğru geçer
3)Toplam nokta sayısı ile toplam doğru sayısı birbirine eşit olup tam q^2+q+1 dir. [1]

Sonlu projektif düzlemde noktalar cümlesi ve dolayısı ile doğrular cümlesi bir K cisminin elemanları yardımıyla cebirsel olarak ta ifade edilebilir.Böylece Galois düzlemi de tanımlanabilir. p bir asal sayı, r bir pozitif tamsayı olmak üzere toplamsal birimi 0, çarpımsal birimi 1 ile gösterilen $q = p^r$ elemanlı Galois cismi K=GF(q) düşünüldüğünde, K'nın elemanları kullanılarak hepsi sıfır olmayan (x_1, x_2, x_3) sıralı üçlüleri ve bu üçlülerin λ katları olan $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ üçlüleri ($\lambda \in K$,$\lambda \neq 0$) aynı noktayı göstersin . Böylece nokta üçlülerine " homojen koordinat üçlüsü " denir. K=GF(q) da q tane eleman olduğundan (0,0,0) üçlüsü hariç tutulduğunda $q^3 - 1$ tane sıralı üçlü elde edilir. Yine sıfır hariç tutulursa , bu üçlülerin q –1 tane olan λ katları aynı bir noktanın homojen koordinatları olacağından, bu yolla bulunacak farklı noktaların sayısı $(q^3 -1) : (q -1) = q^2 +q + 1$ kadardır.Doğrulara gelince

$$a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + a_3 . x_3 = 0 \qquad (3)$$

denklemini sağlayan tüm noktalar kümesinin bir alt kümesi bir doğru olarak adlandırılır ve $[a_1, a_2, a_3]$ ile gösterilir.Bu denklemde $a_1, a_2, a_3 \in K$ olup hepsi sıfır değildir. Ayrıca $b_1 = \lambda . a_1$, $b_2 = \lambda . a_2$, $b_3 = \lambda . a_3$ ($0 \neq \lambda \in K$) için $b_1 . x_1 + b_2 . x_2 + b_3 . x_3 = 0$ denkleminin çözümü de (3) ile aynıdır.Tersine yukarıdaki iki denklem eğer aynı noktayı tanımlarsa bunların katsayıları da noktalar için geçerli olan aynı

bağıntıyı yani $b_i = \lambda . a_i$ ($i = 1,2,3 : 0 \neq \lambda$) eşitliğini sağlar.Böylece $[a_1, a_2, a_3]$ sıralı üçlüleri ve bunların $0 \neq \lambda \in K$ katları aynı bir doğrunun homojen koordinatlarını gösterir. Böylece doğruların toplam sayısı noktaların sayısını bulmakta izlenen yolun aynısı izlenerek $q^2 +q + 1$ olarak bulunur.

(x_1, x_2, x_3) ve (y_1, y_2, y_3) farklı iki noktadan geçen doğrunun homojen koordinatları

$$a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + a_3 . x_3 = 0$$
$$a_1 . y_1 + a_2 . y_2 + a_3 . y_3 = 0$$

denklemlerin ortak çözümü olan $[a_1, a_2, a_3] \neq [0,0,0]$ katsayılar üçlüleri, bu üçlülerin birinin λ katı alınarak belirlenir ve aynı doğruyu gösterir.

Benzer şekilde $[a_1, a_2, a_3]$ ve $[b_1, b_2, b_3]$ farklı iki doğru ise bu doğrular üzerinde bulunan ara kesit noktası olan bütün $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ sıralı üçlüleri, bu üçlülerden birinin λ katı alınarak bulunur. Buradan bu biçimde tanımlanan doğrunun ve noktanın, kesin olarak sırası ile p_1 ve p_2 aksiyomlarını sonucuna varılır.

Ayrıca her K=GF(q) cisminde toplamsal birim 0 ile çarpımsal birim 1 mutlaka bulunacağından (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) noktaların p_3 aksiyomunu sağladığı da açıktır. Sonuç olarak, bir doğru üzerindeki noktaların sayısını bulmak için, $[a_1 , a_2 , a_3] = [1,0,0]$ gibi bir doğru seçildiğinde; bu doğru üzerindeki (x_1 , x_2 , x_3) noktaları

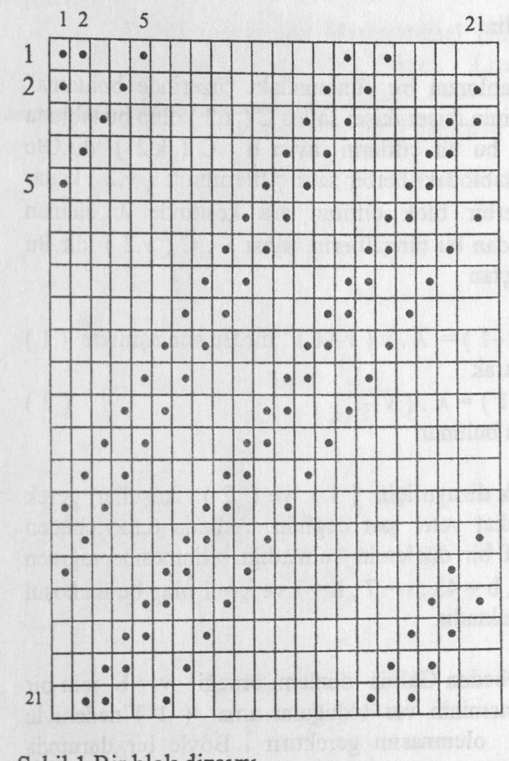
$$1.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = 0$$

denklemini sağlayacağından, $(0, x_2, x_3)$ biçiminde olmak zorundadır. İlk bileşen sıfır olduğundan diğer iki bileşen q^2 tane çiftten oluşur. Ancak $x_2 = x_3 = 0$ ise, elde edilen (0 ,0, 0) üçlüsü bir nokta olarak alınmayacağından, bu üçlü dışında q^2-1 tane (0 , x_2 , x_3) biçiminde noktalar vardır. Ancak bu noktalardan her q –1 tanesi aynı bir noktayı gösterir. Dolayısıyla bu [1,0,0] doğrusu ve genelde her doğru üzerinde $(q^2-1) : (q-1) = q+1$ tane nokta vardır. Benzer şekilde her bir noktadan q+1 tane doğru geçer.Bu sonuçlardan K=GF(q) cisminin eleman sayısı olan q gerçekte bu düzlemin mertebesini gösterir.Böylece daha önce aksiyomatik olarak ifade edilen sonlu projektif düzlem, bir cisim yardımıyla ifade edilmekte ve Galois düzlemi olarak adlandırılmaktadır.Şekil 1 aynı zamanda 4.mertebeden Galois düzleminin bir üzerinde bulunma tablosudur.

Burada sonlu geometrilerde oldukça kullanışlı, yeni bir kavram verilecektir.$B_1, B_2, ... , B_b$'ler bloklar olarak adlandırılan, H = { 1 , 2 , ... , v } cümlesinin boş olmayan alt cümleleri olsun.Bu kümeler aşağıdaki özellikleri sağlar .

1) H cümlesinin elemanlarının sayısı v' dir.
2) Blokların sayısı b' dir.
3) Her blokta tam k eleman vardır.
4) Her eleman tam olarak r blok üzerindedir.
5) Farklı her iki bloğun ara kesit kümesinde λ tane farklı eleman vardır.[2]

Bu koşulları sağlayan bir $\{ B_1, B_2, ... , B_k \}$ bloklar cümlesi bir "blok dizayn" olarak adlandırılır. Bir blok dizayn (4.mertebeden projektif düzlem) örneği şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1.Bir blok dizaynı

Blok dizayndaki v,b,r,k,λ parametreleri birbirinden bağımsız değildir. Bir "üzerinde bulunma" tablosu yardımıyla şekil.2 deki gibi bir blok dizayn sunulabilir.

	1	2	3	4	5	6
1	•	•	•			
2	•	•			•	
3	•		•	•		
4		•	•			•
5		•			•	•
6			•	•		•
7	•			•	•	
8				•	•	•

Şekil 2.Blok dizaynın üzerinde bulunma tablosu

Tabloda sıfırlara noktalar, sütunlara ise bloklar sıralandığında elde edilen v x b kareli tabloda, bir nokta bir bloğun üzerinde ise bu satır ile sütunun buluştuğu kareye bir • işareti konur, aksi halde kare boş bırakılır. Burada "üzerinde bulunma" işaretleri iki yoldan sayılabilir. Satırlardan hareket edildiğinde v tane satırın her birinde r tane blok işaretlendiğinde v . r tane işaret; sütunlardan hareketle de b tane sütunun her birinde k tane eleman olduğundan b . k tane işaret bulunur. Böylece

$$v \cdot r = b \cdot k \qquad (1)$$

elde edilir.

Şimdi tablonun bir sütunundaki "üzerinde bulunma" işaretlerinin ikişer ikişer sayısı C (k,2) olup bu tabloda bulunan bu tür çiftlerin sayısı b . C (k,2) 'dir.Öte yandan tablodaki herbir satır çiftlerinin C (v,2) kadar olup herbir blok çiftinin ara kesitinde λ eleman olduğundan bu tür çiftlerin sayısı λ . C (v,2) 'dir.Bu iki sonuçtan

$b \cdot k\,(k-1) = \lambda \cdot v\,(v-1)$ ' dir.Bu son eşitlikte (1) kullanılarak

$$r \cdot (k-1) = \lambda \cdot (v-1) \qquad (2)$$

bağıntısı bulunur.

Bir blok dizayn için (1) ve (2) koşulları gerek şarttır,fakat yeter şart değildir. Aslında 6.mertebeden projektif bir düzlemin olmadığı bilinmesine rağmen $v = 43$, $b = 43$, $r = 7$, $k = 7$ ve $\lambda = 1$ olup bu iki koşul sağlanmaktadır.

4 .mertebeden Galois düzlemi örneği v = b için bir blok sisteminin var olduğunu ama (1) nedeniyle k = r olunmasını gerektirir . Böyle bir durumda " Simetrik (v , k , λ) blok dizaynından" söz edilebilir . Bu "Simetrik (v , k , λ) – konfigürasyon" olarak adlandırılır. Bunun gibi bir blok dizaynın gerek koşulu (2)' dir ve simetri nedeniyle(yani r = k olduğundan)

$$\lambda \cdot (v-1) = k \cdot (k-1) \quad \text{dir.} \qquad (4)$$

Bu blok dizayn $v = q^2 + q + 1$, $k = q + 1$, $\lambda = 1$ iken q .mertebeden birer projektif düzlemdir.Detaylara girmeden bir simetrik (v , k , λ) - konfigürasyonunun varlığı için gerek şart bilinmekte olup bu şartın aynı zamanda yeter şart olduğu tahmin edilmektedir. Ancak bu tahmin yakın zamana kadar ispatlanamamıştır.Bu koşul Bruck-Ryser-Chowla teoreminin ikinci kısmı olup şöyledir.[3]

$$z^2 = (k-\lambda) \cdot x^2 + (-1)^{(v-1)/2} \cdot \lambda \cdot y^2$$

eşitliğini sağlayan x, y, z tam sayıları bulunabiliyorsa böyle bir (v, k, λ) - konfigürasyonu vardır. [2]

Simetrik (v , k , λ) blok dizaynı, t - (v , k , λ) blok dizaynı olarak aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde genelleştirilebilir.

1) H kümesinin v elemanı vardır.
2) Her blok k tane eleman içeren bir alt kümedir.
3) t elemanlı herhangi bir alt küme tam olarak λ tane blokta bulunur.

III-İNVERS DÜZLEM (MÖBİUS DÜZLEMİ) VE t - (v , k , λ) BLOK DİZAYNI

Bu bölümde öklid düzleminin bir genişletilmişi olan Möbius düzlemi ele alınacaktır.Öklid düzlemini, bu düzlemin her bir doğrusunun geçtiği farz edilen bir ideal nokta ile genişleterek Möbius düzlemi (invers düzlem) elde edilebilir. Bu yolla yapılan genişletmede çemberler ve doğrular arasında bir fark gözetilmemektedir,her ikisi de çemberler olarak adlandırılır. Böylece Öklid geometrisinde çemberlerle doğruların kesişimiyle ilgili teoremlerin birleştirilmiş bir formülasyonu elde edilir. Bir kürenin bir Möbius düzlemine aşağıdaki biçimde bir steografik izdüşümü varsa, Möbius düzleminin ve kürenin yapıları aynıdır. Γ küresinin t dönme ekseni, kürenin gelişigüzel bir U noktasından geçsin ve gelişigüzel bir Σ Möbius düzlemi t' ye dik olsun; kürenin U' dan farklı bir P noktası, düzlemin bir P' noktasına PP' doğrusu U dan geçecek biçimde ve U noktası da düzlemin ideal noktasına karşılık gelecek biçimde bir eşleme yapılsın. Bu eşlemede çemberler ve açılar korunur. Birbirine değen çemberler birbirine değen çemberlere, U' dan geçen çemberlerde düzlemin doğrularına taşınırlar. Bu steografik eşlemenin bir özelliği olarak, bir ideal nokta yardımıyla Öklid düzlemi genişletilirken, bu düzlemdeki doğrular çember olarak düşünülmelidir. [2] , [4]

Sonlu bir projektif düzlem örneği $t = 2$, $v = q^2+q+1$ ve $\lambda = 1$ olan bir blok dizaynı verilmişti. Şimdi geometrik olarak formüle edilen $t = 3$, $v = q^2+1$, $k = q+1$, ve $\lambda=1$ durumu ile ilgili $q = 3$ için bir örnek şekil-2'de verilmektedir. Sütunlar sırasıyla $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ noktaları olarak, satırlar da sırasıyla $c_1, c_2, \ldots, c_{30}$ olarak adlandırılsın. Şekil 3 .

Bu 10 nokta ve 30 çemberi içeren üzerinde bulunma yapısının şu özellikleri içerdiği kolayca kontrol edilebilir.

K1 - Her çemberin noktaları vardır.
K2 - Her hangi bir nokta üçlüsünden bir tek çember geçer.

K3 – $P_j \in c_r$ ve $P_h \notin c_r$ ise $c_r \cap c_s = \{P_j\}$ ve $P_h \in c_s$ olacak biçimde bir tek $c_s \neq c_r$ çemberi vardır.
K4 – Çembersel olmayan 4 nokta vardır.

K1 , K2 , K3 , K4 birlikte **K** "aksiyom sistemini " oluştururlar. **K** aksiyom sistemini sağlayan bir düzlem "invers düzlem" veya "Möbius düzlemi" olarak adlandırılır. Düzlemin noktalarının sayısı bu örnekte olduğu gibi sonlu ise sonlu bir Möbius düzlemi söz konusudur. Burada ilk oniki satırda, ilk sütun dışındaki noktalar 3.mertebeden bir afin düzlem oluşturur. Bu afin düzleme bütün doğrularının geçtiği P_1 ideal noktası katılarak 3.mertebeden bir Möbius düzlemi elde edilir.

	P_1				P_5	P_6				P_{10}
C_1	•	•	•	•						
	•				•	•	•			
	•							•	•	•
	•	•			•			•		
C_5	•			•			•			•
C_6	•		•			•			•	
	•	•				•				•
	•			•	•				•	
	•		•				•	•		
C_{10}	•	•					•		•	
C_{11}	•			•		•		•		
C_{12}	•		•		•					•
		•	•		•	•				
		•	•				•			•
C_{15}		•	•					•	•	
C_{16}		•		•	•		•			
		•		•		•			•	
		•		•				•		•
		•			•				•	•
C_{20}		•				•	•	•		
C_{21}			•	•	•			•		
			•	•		•	•			
			•	•					•	•
			•		•		•		•	
C_{25}			•			•		•		•
C_{26}				•	•	•				•
				•			•	•	•	
					•	•		•	•	
					•		•	•		•
C_{30}						•	•		•	•

Şekil 3. q = 3 için bir blok dizayn örneği

IV.SONUÇ

Bu çalışmada sonlu geometrilerin kombinatöryel özellikleri incelenmeye çalışıldı.Galois düzlemi ve blok dizaynları kombinatöryel özellikleri üzerinde duruldu.Möbius düzlemi ve aksiyomları verildi.Sonlu Möbius düzleminin stereografik izdüşüm yardımıyla elde edilmesi ifade edildi.Stereografik izdüşüm ve Möbius düzleminin kombinatöryel özellikleri üzerine yeni ve etraflı çalışmaların yapılabileceği gözlendi.

KAYNAKLAR

[1] Kaya,R. Projektif Geometri, .(1992)
[2] Karteszi,F. Introduction To Finite Geometries (1976)
[3] Demirtola,Ayşegül Matematiksel Dizayn Teori Üzerine,Uludağ Üniversitesi,Yüksek Lisans Tezi, (2000), Bursa
[4] Seidenberg,L. Lectures In Projective Geometry (1962)