Ocak 2012 Cilt:20 No:1 Kastamonu Eğitim Dergisi 219-236

ÖĞRETMEN ADAYLARININ MATEMATİKSEL TÜMEVARIM YOLUYLA İSPAT BECERİLERİ VE MATEMATİKSEL İSPAT HAKKINDAKİ GÖRÜŞLERİ

Gürsel GÜLER, Ercan ÖZDEMİR, Ramazan DİKİCİ
Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Erzurum

Özet

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri, matematiksel ispat hakkındaki görüşleri incelenmiş ve aralarındaki ilişki araştırılmıştır. Araştırmanın örneklemini, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üç ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören toplam 151 öğrenci oluşturmaktadır. Araştırmanın verileri İspat Görüş Anketi, Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Araştırma bulgularına göre, öğretmen adaylarının tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu, ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı ve ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu saptanmıştır.

***Anahtar Sözcükler**: Matematiksel tümevarım, ispat, öğretmen adayı*

PRE-SERVICE TEACHERS' PROVING SKILLS USING MATHEMATICAL INDUCTION AND THEIR VIEWS ON MATHEMATICAL PROVING

Abstract

This study investigated pre-service elementary mathematics teachers' mathematical proving skills using induction method and their views on mathematical proving; and we analyzed the correlation between these skills and views. The sampling of the study consisted of a total of 151 third and fourth grade students enrolled in the department of elementary mathematics teaching. Data was collected through Proof View Questionnaire, Mathematical Induction Knowledge Test (MIKT) and semi-structured interviews. The findings indicated that pre-service teachers have low level proof skill using mathematical induction method and they do not have a clear idea about what the proof means. It was also found that there was a positive and significant relationship between pre-service mathematics teachers' views and proving skills using induction method.

***Key Words**: Mathematical induction, proving, pre-service teacher*

1. Giriş

Matematik yapısı itibariyle daha önceki öğrenmelerle sıkı sıkıya bağlı, birikimli bir bilim dalıdır. Öğrenilen her bir matematiksel kavram sonraki öğrenmeler için bir basamak oluşturmaktadır. Bu nedenle herhangi bir kavramın öğrenilmesindeki güçlük ya da kavrama ilişkin edinilmiş yanlış bilgi daha sonra birçok kavramın öğrenilmesinde güçlükler yaşanmasına, kavramların yanlış algılanmasına neden olabilir (1). Bu yüzden matematiksel kavramların içselleştirilerek çok yönlü öğrenilmesi matematik başarısı için bir zorunluluk halini almaktadır. Matematiksel kavramların derinlemesine öğrenilebilmesi için öğrencilerin kavramları ezberlemek yerine kendi muhakeme becerileri ön plana çıkarılmalıdır. Öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için de matematiksel kavramların öğretiminde uygulamadan önce matematiksel ispatlarının ayrıntılı bir şekilde yapılması faydalı olacaktır.

Genellikle matematiğe özgü bir kavram sayılan ispatlama, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (2). Matematiksel ispat, matematiği diğer bilim dallarından ayıran en önemli özelliklerinden biridir (3, 4). Matematiğin vazgeçilmez bir parçası olan matematiksel ispat, ilköğretim seviyesinden itibaren, matematik etkinliklerinin merkezine alınmaktadır (5, 6, 7). Bunun 3 ana nedeni vardır. Birincisi; ispat matematiğin derinlemesine öğrenilmesi için gereklidir (8). İkincisi; öğrencilerin ispat yeterlilikleri geniş ölçüde matematik yeterliliğini ilerletebilmektedir "çünkü bir sonucu ispatlayabilmek için olası tüm düşünceleri ve durumları incelemek gereklidir"(9). Üçüncüsü ise üniversite ve yüksek okul öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili karşılaştıkları zorlukların çoğu, en azından bir kısmı, öğrencilerin yüksek okulda aniden ispatla karşılaşmalarından kaynaklanmaktadır (10, 11).

Matematikte kullanılan birçok ispat tekniği bulunmaktadır. Bu ispat teknikleri; tümdengelim ve tümevarım ile ispat olmak üzere ikiye ayrılmaktadır (12). Ayrıca tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat, dolaylı ispat, olmayana ergi, çelişki bulma gibi adlarla çeşitli yollara ayrılmaktadır. Ülkemizde ilköğretim müfredat programlarında, ispat yapmaktan bahsetmek güçtür. Ancak üstü kapalı da olsa ilköğretim müfredatının "mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir" şeklinde ifade edilen genel bir hedefinin olduğundan söz edilebilir (13). Ortaöğretim matematik programında ise "Mantık Öğrenme Alanı" içerisinde, "İspat Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı" kapsamında ispat kavramına yönelik iki kazanım olduğu görülmektedir. Bunlar "tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir" ve "ispat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar" ifadeleri şeklindedir (14). Bu yüzden matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat yapabilme becerisine sahip olmaları arzu edilmektedir. Matematiksel tümevarım ve basamakları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

Her bir n doğal sayısı için $P(n)$ bir önerme olmak üzere;

$P(1)$: (Doğrulama): $P(1)$ (ya da $P(n_0)$) önermesi doğru

$P(2)$: (Tümevarım hipotezi): $k \geq 1$ (ya da $k \geq n_0$) olmak üzere tüm k lar için $P(k)$ nın doğru olduğu varsayılarak,

$P(3)$: (Tümevarım basamağı): $P(k)$ dan yola çıkılarak $P(k+1)$ in doğruluğu gösterilmelidir.

Basamakları takip edilerek sonuca ulaşıldığında $P(n)$ önermesinin 1 ve 1 den (ya da n_0 ve n_0 dan) büyük tüm doğal sayılar için doğru olduğu sonucuna ulaşılır (15).

Matematiksel ispat tekniklerinden matematiksel tümevarım, ortaöğretimde öğrenilmesi oldukça zor olan bir kavramdır ve öğrenciler bu kavramı öğrenirlerken sorun yaşamaktadırlar (16). Bu konuda öğretmenlere büyük bir sorumluluk düşmektedir. Eğer öğretmen matematiksel tümevarım yöntemi ile ilgili zorlukları ihmal ederse, öğrencilerin matematiksel tümevarım yöntemini öğrenme süreci, konuyu anlamadan öğretmeni taklit etmenin ötesine geçemez (17). Matematiksel tümevarım, üniversite matematik müfredatının da merkezinde olmasına rağmen, lisans seviyesindeki birçok öğrencinin bu ispat metodunu anlamada eksikliklerinin olduğu yapılan birçok araştırmada gözlenmiştir (6, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23). Literatürde konuyla ilgili yapılan çalışmalar öğrencilerin matematiksel tümevarım alanındaki genel güçlüklerini belirleme açısından önemli sonuçlar verirken, konunun farklı değişkenler açısından daha derinlemesine inceleme yapılması gerekliliğini de ortaya koymuştur.

Ülkemizde matematiksel tümevarımla ilgili yurtdışında yapılmış çalışmaları derleyen bir kitap bölümü (24) bulunmakla birlikte, öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin araştırıldığı herhangi bir çalışmanın olmaması bu araştırmanın sonuçlarını önemli kılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yöntemiyle ispat becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaktır.

2. Yöntem

Nicel ve nitel araştırma yöntemlerinin birlikte kullanıldığı bu çalışmanın nicel bölümünde öğretmen adaylarına Matematiksel Tümevarım Bilgi Testi (MTBT) ve ispat görüş anketi uygulanmıştır. Nicel veri toplama sürecinin ardından MTBT puanlarına göre iyi, orta ve zayıf olarak adlandırılan 9 öğretmen adayı ile hatalarını derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır.

2.1. Veri Toplama Araçları

Matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini almak amacıyla, (25) tarafından hazırlanan ve (26) tarafından geliştirilip Türkçeye uyarlanan 5'li likert tipi ölçek kullanılmıştır. Yanıt seçeneği tamamen katılıyorum ile kesinlikle katılmıyorum arasında derecelenmektedir. Ölçeğin (26) tarafından 0.80 olarak hesaplanan güvenirliği çalışma grubu ile yapılan hesaplamada 0.82 bulunmuştur.

Matematik öğretmen adaylarının tümevarım yöntemi ile ispat becerilerini ölçmek amacıyla (19) tarafından hazırlanan ve 7 sorudan oluşan bilgi testinden uzman görüşleri alınarak 5 tanesi kullanılmıştır. Bu soruların ispatında tümevarım yönteminin kullanılması gerektiği yönergede belirtilmiştir. Ayrıca MTBT sonuçlarına göre iyi, orta ve zayıf olarak gruplandırılan 9 öğretmen adayı ile yaptıkları ispatları derinlemesine incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Mülakatlar öğretmen adaylarının da izni alınarak ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır ve yaklaşık 20–25 dakika sürmüştür. Her bir gruptan bir öğretmen adayı ile yapılan mülakat örnek olarak değiştirilmeden sunulmuştur. Mülakat sonuçlarının birbirine yakın olması bu seçimde etkili olmuştur.

2.2. Örneklem

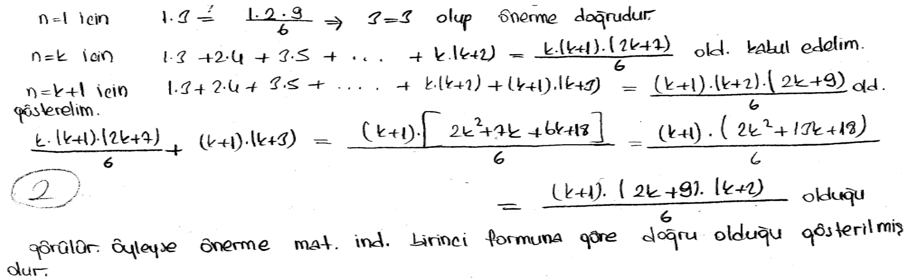
Araştırmanın örneklemini, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği programının üçüncü ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören 151 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından 91'i kız, 60'ı erkek olmak üzere 75'i üçüncü, 76'sı dördüncü sınıf öğrencisidir. Gönüllülük esasına göre 5 kız 4 erkek öğretmen adayı mülakatlara katılmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

İspat Görüş Anketine verilen yanıtlar 5–1 arasında puanlanarak analiz edilmiştir. Olumlu veya ispat açısından kabul gören maddeler; tamamen katılıyorum yanıtına 5, kesinlikle katılmıyorum yanıtına 1 verilmek suretiyle puanlama yapılmıştır. Bazı maddeler (5, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 20) ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek puanlanmıştır.

Öğretmen adaylarının MTBT 'deki tam doğru cevaplarına 2, kısmen doğru cevaplarına 1, yanlış ve boş cevaplarına 0 verilmek suretiyle puanlama yapılmıştır. Kısmen doğru cevap kategorisine, tümevarımın bilindiği fakat tümevarım basamağında tümevarım hipotezinin kullanılarak doğru cevaba ulaşılamadığı durumlar alınmıştır. Bu iki ölçekten elde edilen veriler SPSS programı yardımı ile analiz edilmiş, yüzde-frekans dağılımları ve korelasyon kullanılmıştır.

Öğretmen adaylarından 2. soruya doğru cevap vererek 2 puan ile değerlendirilen örnek bir cevap Şekil 1 de sunulmuştur.



n=1 için $1.3 \stackrel{?}{=} \frac{1.2.3}{6} \Rightarrow 3=3$ olup önerme doğrudur.

n=k için $1.3+2.4+3.5+\ldots+k.(k+2) = \frac{k.(k+1).(2k+7)}{6}$ old. kabul edelim.

n=k+1 için $1.3+2.4+3.5+\ldots+k.(k+2)+(k+1).(k+3) = \frac{(k+1).(k+2).(2k+9)}{6}$ old. gösterelim.

$$\frac{k.(k+1).(2k+7)}{6} + (k+1).(k+3) = \frac{(k+1).[2k^2+7k+6k+18]}{6} = \frac{(k+1).(2k^2+13k+18)}{6}$$

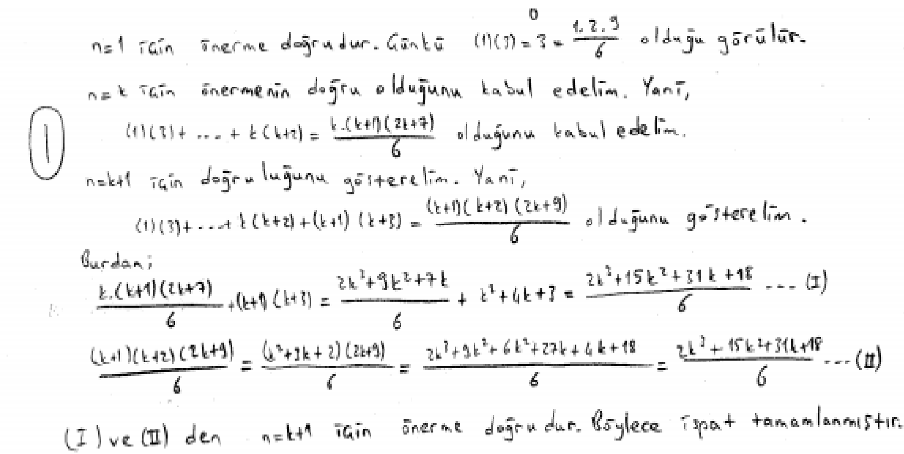
2

$$= \frac{(k+1).(2k+9).(k+2)}{6}$$ olduğu

görülür. Öyleyse önerme mat. ind. birinci formuna göre doğru olduğu gösterilmiş dur.

Şekil 1. 2. Soruya Doğru Cevap Vererek 2 Puan ile Değerlendirilen Örnek

Öğretmen adaylarından 2. soruya kısmen doğru cevap vererek 1 puan ile değerlendirilen örnek bir cevap Şekil 2 de sunulmuştur.



n=1 için önerme doğrudur. Çünkü $(1)(3) = 3 = \frac{1.2.3}{6}$ olduğu görülür.

n=k için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$(1)(3)+\ldots+k(k+2) = \frac{k.(k+1)(2k+7)}{6}$ olduğunu kabul edelim.

1

n=k+1 için doğruluğunu gösterelim. Yani,

$(1)(3)+\ldots+k(k+2)+(k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$ olduğunu gösterelim.

Burdan;

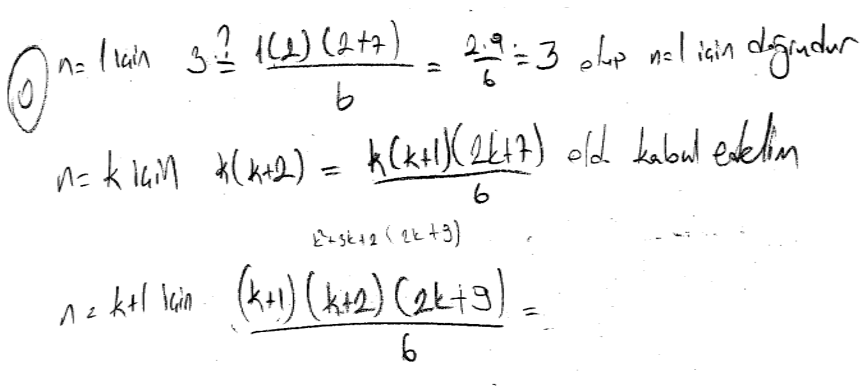
$$\frac{k.(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) = \frac{2k^3+9k^2+7k}{6} + k^2+4k+3 = \frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6} \ldots (I)$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6} = \frac{(k^2+3k+2)(2k+9)}{6} = \frac{2k^3+9k^2+6k^2+27k+4k+18}{6} = \frac{2k^3+15k^2+31k+18}{6} \ldots (II)$$

(I) ve (II) den n=k+1 için önerme doğrudur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Şekil 2. 2. Soruya Kısmen Doğru Cevap Vererek 1 Puan ile Değerlendirilen Örnek

Öğretmen adaylarından 2. soruya yanlış cevap vererek 0 puan ile değerlendirilen örnek bir cevap Şekil 3 de sunulmuştur.



Şekil 3. 2. Soruya Yanlış Cevap Vererek 0 Puan ile Değerlendirilen Örnek

3. Bulgular ve Yorum

Bu bölümde verilerin analizinden elde edilen bulgular tablolar halinde sunulmuş ve yorumlanmıştır.

Öğretmen Adaylarının Tümevarım Yöntemi ile İspat Yapabilme Becerileri

Çalışmanın bu bölümünde öğretmen adaylarının MTBT' de yer alan soruların ispatı ile ilgili düzeyleri tablolar halinde sunulacaktır.

Soru 1. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $n^4 - n^2$ ifadesinin 3 ile tam bölünebileceğini gösteriniz.

Öğretmen adaylarının 1. soruya verdikleri cevapların yüzde frekans dağılımı Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Öğretmen Adaylarının Birinci Soruya Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş	Toplam
f(%)	39(25,8)	89(58,9)	23(15,2)	0(0)	151(100)

Tablo 1'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının yaklaşık %26'sı sorunun ispatını doğru, yaklaşık %59'u kısmen doğru ve yaklaşık %15'i yanlış yapmışlardır. Birinci soru hiç boş bırakılmamıştır. Ancak öğretmen adaylarının yaklaşık %59'unun kısmen doğru cevap vermeleri şaşırtıcı bir sonuçtur. Öğretmen adaylarının yarısından fazlasının 1. soru için matematiksel tümevarımı uyguladıkları ancak tümevarım hipotezinden, tümevarım basamağına geçemedikleri ve ispatı tamamlayamadıkları görülmektedir.

Soru 2. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$(1)(3)+(2)(4)+(3)(5)+...+n(n+2)=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$ eşitliğinin doğru

olduğunu ispatlayınız.

Öğretmen adaylarının 2. soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekans dağılımı Tablo 2'de sunulmuştur.

Tablo 2. Öğretmen Adaylarının İkinci Soruya Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş	Toplam
f(%)	112(74,1)	34(22,5)	3(1,9)	2(1,3)	151(100)

Tablo 2'de görüldüğü gibi öğretmen adaylarının %74,1'i sorunun ispatını doğru, %22,5'i kısmen doğru, %1,9'u yanlış yapmışlardır. Bu soru yalnız 2 kişi tarafından boş bırakılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları ilk soruya %25,8 doğru cevap verirken ikinci soruda bu oranın %74,1'e yükselmesi şaşılacak ölçüde olumlu bir gelişmedir. Bu durum, öğretmen adaylarının bu tür tümevarım sorularıyla sıkça karşılaşmış olmasından kaynaklandığı şeklinde yorumlanabilir. Ayrıca öğretmen adaylarının %22,5'inin kısmen doğru cevap kategorisinde yer alması bu soru için tümevarım hipotezinden yararlanarak tümevarım basamağını oluşturmada gerekli işlem becerisini gösteremedikleri şeklinde yorumlanabilir.

Soru 3. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ eşitliğinin doğru olduğunu ispatlayınız.

Öğretmen adaylarının 3. soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekans dağılımı Tablo 3'de sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmen Adaylarının Üçüncü Soruya Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş	Toplam
f(%)	128(84,7)	12(7,9)	9(1,3)	2(1,3)	151(100)

Tablo 3 incelendiğinde öğretmen adaylarının doğru ispat yapabilme oranındaki artış göze çarpmaktadır. Öğretmen adaylarının 3. soruya, %84,7 doğru, %7,9 kısmen doğru (tümevarım hipotezinden hareketle tümevarım basamağını oluşturamama), %5,9 yanlış cevap verdikleri ve %1,3 oranında boş bıraktıkları görülmektedir. Bu sorunun doğru ispatlanma oranındaki artış bir önceki soruda olduğu gibi izah edilebilir.

Soru 4. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $n - 2 < \dfrac{n^2 - n}{12}$ eşitsizliğinin yeterince büyük n tamsayısı için doğru olduğunu gösteriniz.

Öğretmen adaylarının 4. soruya verdikleri cevapların yüzde ve frekans dağılımı Tablo 4'de sunulmuştur.

Tablo 4. Öğretmen Adaylarının Dördüncü Soruya Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş	Toplam
f(%)	10(6,6)	110(72,8)	31(20,5)	0(0)	151(100)

Tablo 4 incelendiğinde öğretmen adaylarının yalnız %6,6'sı doğru, %72,8'i kısmen doğru, %20,5'i yanlış cevap vermişlerdir. Bütün katılımcılar soruyu cevaplamışlardır.

Tablo 4'deki doğru cevap oranındaki azalma ve kısmen doğru cevap oranındaki artış, öğretmen adaylarının farklı türden bir problemin matematiksel tümevarım yöntemini kullanarak ispatlanmasında yaşadıkları sorunları göz önüne sermektedir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun kısmen doğru cevap kategorisinde yer alması matematiksel tümevarımın bilindiği fakat tümevarım basamağında sorun yaşadığını göstermektedir.

Soru 5. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ifadesinin 133 ile tam bölünebileceğini gösteriniz.

Öğretmen adaylarının 5. soruya verdikleri cevapların yüzde-frekans dağılımı Tablo 5'de sunulmuştur.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Beşinci Soruda Verdikleri Cevapların Yüzde-Frekans Dağılımı

	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Boş	Toplam
f(%)	38(25,1)	77(50,9)	24(15,8)	12(7,9)	151(100)

Tablo 5 incelendiğinde öğretmen adaylarının %25,1'i doğru, %50,9'u kısmen doğru ve %15,8'i yanlış cevap vermişlerdir. Bu sorunun boş bırakılma oranı %7,9 olmuştur. Tablodan kısmen doğru cevap verenlerin oranının yüksek olduğu görülmektedir. Bu durum öğretmen adaylarının 5. soru için de tümevarım ispat yönteminin bilindiği ancak tümevarım basamağını oluşturmada sorun yaşandığını göstermektedir. Ayrıca %7,9 oranında boş cevap verilmesi öğretmen adaylarının farklı türden tümevarım problemlerini yorumlayamadıklarını göstermektedir. Buradan tümevarım problemlerinin sadece özel durumlardan genellemeye gidilmesi gerektiği fikrinin etkili olduğu söylenebilir.

Beş sorunun tamamına yönelik olarak öğretmen adaylarının aldıkları puanların ortalamaları ve her bir sorunun standart sapmaları Tablo 6'daki gibidir:

Tablo 6. Öğretmen Adaylarının MTBT' deki Sorulara Verdikleri Cevapların Ortalama-Standart Sapma Dağılımı

N=151	Soru1	Soru2	Soru3	Soru4	Soru5
$\overline{X}$	1,10	1,70	1,77	0,86	1,01
SS	0,634	0,523	0,567	0,503	0,702

Tablo 6 incelendiğinde; MTBT' deki 1., 4. ve 5. sorulara verilen cevapların ortalamalarının kısmen doğru kategorisine yakın olduğu görülmektedir. Bu açıdan bakıldığında; öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımı bildikleri fakat tümevarım basamağını oluşturarak sonuca ulaşmada sorun yaşadıkları söylenebilir.

Yine Tablo 6'dan 2. ve 3. sorulara verilen cevapların ortalamalarının doğru kategorisine yakın olduğu görülmektedir. Bu iki soru için yapılan detaylı incelemede, soru tiplerinde eşitlik bulunmasından dolayı tümevarım hipotezinin kullanılmasında herhangi bir sorun yaşanmadığı ifade edilebilir.

Öğretmen Adaylarının İspat Hakkındaki Görüşleri

Matematik öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini belirlemek amacıyla uygulanan anketin değerlendirilmesinde (25) tarafından kullanılan puanlama esas alınmıştır. Buna göre; ölçekte her madde için 3,5 ve üstü puanlar yüksek ve istenilen bir puan olarak düşünülürse, toplamda 70 (3,5x 20= 70) puan ve üzeri alan kişilerin görüşleri istenilen yöndedir. Aynı düşünce ile her bir madde için 2,5 ve altı puanlar düşük düzeyde bir puan olarak kabul edilirse, toplamda 60 (2,5x 20= 60) ve altı puan alan kişilerin görüşleri istenilmeyen yöndedir. Toplamda 70–61 arası puan alanlar genelde kararsız guruba konulabilir. Bu değerlendirme sistemine göre öğretmen adaylarının aldıkları puanlar ve bu puanlara karşılık gelen görüşler Tablo 7'de sunulmuştur.

Tablo 7. Öğretmen Adaylarının İspat Hakkındaki Görüşlerinin Yüzde ve Frekansları

	Olumlu Görüşler	Kararsız	Olumsuz Görüşler	Toplam
f(%)	70(46,3)	54(35,7)	27(17,8)	151(100)

Tablo 7'den, olumlu görüşe sahip olanlar %46,3, olumsuz görüşe sahip olanlar %17,8 ve kararsızlar %35,7 olmuştur. Kararsız öğretmen adayları oranının %35,7 olması ilginç ve düşündürücü bir sonuç olarak nitelendirilebilir. Çünkü ölçekteki sorulara ilişkin kararsızlık aslında ispat yapmaya ilişkin kavramsallaştırmanın istenilen düzeyde olmadığı anlamına da gelebilir.

Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya İlişkin Görüşleri İle Tümevarım Yöntemi İle İspat Yapabilme Becerileri Arasındaki İlişki

Matematik öğretmen adaylarının ispat hakkındaki görüşlerinin alındığı ölçekten aldıkları puanlar ile MTBT' den aldıkları puanlar arasındaki ilişki basit korelasyon (Pearson korelasyon katsayısı) hesaplanarak incelenmiştir. Verilerin analizinde elde edilen bulgular Tablo 8'de sunulmuştur.

Tablo 8. Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Görüşleri İle MTBT Başarı Puanları Arasındaki İlişki

N=151		İspata Yönelik Görüş Puanı	MTBT Puanı
İspata Yönelik Görüş Puanı	r	1,00	,244
	p	,	,003
MTBT Puanı	r	,244	1,00
	p	,003	,

Tablo 8'den ispata yönelik görüş puanları ile MTBT puanları arasındaki korelasyon katsayısının $r = 0{,}244$ ve anlamlılık düzeyinin $p = 0{,}003$ olduğu görülmektedir. Burada $p < 0{,}01$ ve korelasyon katsayısının 0 'dan büyük olması öğretmen adaylarının ispata yönelik görüş puanı ile MTBT başarı puanı arasında pozitif ve anlamlı bir ilişkinin olduğunu ifade eder. Buna göre matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik görüş puanları arttığında, matematiksel tümevarım yöntemi ile ispat başarı puanlarının da arttığı söylenebilir.

Araştırmanın nitel bölümünü tamamlayabilmek amacıyla öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Bu mülakatlardan tümevarım bilgi testine verilen cevaplara göre iyi, orta ve zayıf olarak gruplanan 3 öğretmen adayının mülakatı aşağıda verilmiştir. Tümevarım bilgi testine göre iyi olarak isimlendirilen gruptan bir öğretmen adayı ile yapılan mülakat aşağıdadır (Öğretmen Adayı= ÖA olarak kodlanmıştır).

Mülakatçı: Tümevarım adımları hakkında kısaca bilgi verebilir misiniz?

ÖA1: *Öncelikle n=1 için bakıyorduk eğer ifadenin doğruluğu sağlanıyorsa n=k için kabul edip bundan yola çıkarak n=k+1 için doğru olduğunu ispatladıktan sonra verilen önermenin doğru olduğunu söylüyorduk.*

***Mülakatçı**:* Tümevarım ispat yönteminin olmazsa olmaz basamağı hangisidir? Neden?

***ÖA1**: Kabulden sonra yani ikisi bir arada n=k için kabul ediyoruz dedikten sonra n=k+1 için doğruluğunu gösterirken eğer bir yanlışlık yapılırsa tüm önerme gider. n=k içinde kabul olmazsa sonuç olmaz bunun içinde bir kabul şart bence. Çünkü ispat yaparken böyle yapıyoruz… Sonucu belli bir şeye dayandırmamız gerekiyor.*

Mülakatçı: Tümevarım ispat yöntemini hangi tür problemlerin çözümünde kullanabiliriz?

ÖA1: *Ne tip sorularda… Analiz konularında desem çok genellemiş olurum… Serilerin toplamında daha çok sanki…*

Mülakatçı: Tümevarım ispat yönteminin hipotezi (n=k için kabul) neden gereklidir?

ÖA1: *Çünkü ispatı yaparken belli bir hipotezimizin olması şart… Hipotezden yola çıkarak ispat için mesela ispatı bir bütün düşünürsek n=k için olan kısmını oluşturmamız önermenin n=k+1 için gösteriminin başlangıcı olduğunu düşünüyorum. Çünkü kabulden hareketle ispata gediyoruz.*

Mülakatçı: Birkaç örnekle bir ifadenin doğruluğunu göstermek tümevarım ispat yöntemiyle eşdeğer midir?

ÖA1: *Örneklerle genellemeye gidemeyiz. Çünkü en az bir tanesi sağlamadığı zaman ardından gelen n değeri için sağlayıp sağlamadığını kontrol edemediğimizden bir genelleme yapamayız. Yani biz bir ifadenin n=10'a kadar doğruluğunu gösterebiliriz ama bu tüm doğal sayılar için o ifadenin doğru olabileceği anlamını vermez ama tümevarım yönteminde zaten en genel haliyle biz önermeyi ispatladığımızdan sonuçtan şüphelenmeyiz.*

Tümevarım bilgi testine göre orta olarak isimlendirilen gruptan bir öğretmen adayı ile yapılan mülakat aşağıdadır.

Mülakatçı: Tümevarım ispat yönteminin adımları hakkında kısaca bilgi verebilir misiniz?

ÖA2: *n=1 için doğru olduğu gösterilmeli ardından n=k için kabul edilip n=k+1 için doğruluğu gösterilmelidir. Burada sistematik bir şekilde ispatın adımlarını takip edebilmek için önce n=k için kabul sonrada n=k+1 için ispatlamak söz konusudur.*

Mülakatçı: Cevap kâğıdın incelendiğinde 1.soru dışında tüm sorular için tümevarım adımlarını yazdığın ancak tümevarım basamağında sonuca ulaşamadığın görülüyor (Sadece 2. soruda sonuca ulaşılmış). Bunun sebebi ne olabilir?

ÖA2: *Evet, bunun böyle olmasının tek sebebi benim işlem yeteneğimin düşük olmasıyla ilgili olduğunu düşünüyorum. Ben tümevarım basamaklarını biliyorum ancak son aşamada istediğim ifadeyi elde edemiyorum.*

***Mülakatçı**:* Tümevarım ispat yönteminin olmazsa olmaz basamağı hangisidir? Neden?

ÖA2: *Bence n=k için kabul edilen basamaktır. Çünkü ispatlarda hep bir kabul söz konusudur.*

Mülakatçı: Tümevarım ispat yönteminin hipotezi (n=k için kabul) neden gereklidir?

> ***ÖA2:*** *Çünkü bir şeyi ispatlamak için onun önce bir şekilde bir zemine oturması lazım. Bunun için tümevarımda n=k için kabul edip istenen ifadeyi matematiksel olarak bir zemine oturtuyoruz.*

Tümevarım bilgi testine göre zayıf olarak isimlendirilen gruptan bir öğretmen adayı ile yapılan mülakat aşağıdadır.

Mülakatçı: Tümevarım ispat yönteminin adımları hakkında kısaca bilgi verebilir misiniz?

> ***ÖA3:*** *k=1 için doğru olduğunu göstermeliyiz. n=k için ifadenin doğru olduğunu kabul ediyoruz. n=k+1 ifadenin doğru olduğunu gösteriyoruz.*

Mülakatçı: Cevap kâğıdı incelendiğinde sadece 2. soruda sonuca ulaştığın görülüyor. Bunun sebebi sence ne olabilir?

> ***ÖA3:*** *Bende dikkat hatası olduğundan sorulara çok fazla yoğunlaşamıyorum. n=k için ifadenin kabul edilip n=k+1 için gösterilmesi durumlarında zorluk yaşıyorum. Bunun en büyük sebebi ifadeleri birbirine benzetmekte çok zorlanıyorum. İfadeleri birbirine benzetmek için gerekli olan işlemleri takip edemiyorum. Bunun en büyük sebebi matematik temelimin zayıf olmasından kaynaklandığını düşünüyorum.*

Mülakatçı: Tümevarım ispat yönteminin olmazsa olmaz basamağı hangisidir? Neden?

> ***ÖA3:*** *İfadelerin n=k+1 için ispatlanması. Çünkü n=k+1 için ispat yapamazsak ifadenin doğruluğunu gösteremeyiz.*

Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar sonucunda; görüşmeye katılan 3 grubun birbirine çok yakın ifadeler kullandıkları görülmektir. Keza görüşmeye katılan bütün öğretmen adaylarının tümevarım ispat yöntemini bildiği görülmüştür. Ancak orta ve zayıf olarak isimlendirilen gruplarda bulunan öğretmen adayları matematiksel tümevarımı uygulama konusunda yaşadıkları sorunların kaynağının matematiksel işlem bilgisindeki eksikler olduğunu vurgulamaktadırlar. Ayrıca görüşmeye katılan öğretmen adayları tümevarım ispat yönteminin ilk adımından hiç bahsetmemişlerdir.

4. Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Araştırma bulguları, öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arasındaki ilişkiyi tam olarak kavrayamadıklarını ve bu ispat yöntemini takip edilmesi gereken bir prosedür olarak algıladıklarını göstermektedir. Öğretmen adayları problemlerde sonuca ulaşamamalarını matematiksel işlem yeterliklerinin düşük olmasına bağlamaktadırlar. Araştırmada elde edilen bu bilgiler literatürdeki birçok çalışmanın (15, 16, 18, 19, 20, 23) bulgularını destekler niteliktedir. Yapılan mülakatlardan öğretmen adaylarının doğrulama basamağının kontrol edilmesine gerek duyulmayacak bir basamak olduğunu düşündükleri gözlenmiştir. Bu durum doğrulama basamağının garanti olduğu düşüncesi kavram yanılgısıyla (24) paralellik göstermektedir.

Tablo 6'dan matematik öğretmen adaylarının MTBT' nin 1., 4. ve 5. sorularında kısmen doğru, 2. ve 3. sorularında ise doğru cevaplara yakın oldukları görülmüştür. Buna göre öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım ispat yöntemini kullanarak sonuca ulaşabilecekleri soru türlerinin kısıtlı ve çoğunlukla içerisinde eşitlik işaretinin bulunduğu tür sorular olduğu söylenebilir. MTBT' nin tüm problemleri matematiksel tümevarım ispat metoduyla ispatlanabilecek türden olmasına rağmen 2. ve 3. problemler çalışma grubu açısından tümevarım hissi uyandırmış, 1., 4. ve 5. problemler aynı etkiyi oluşturamamıştır. Ayrıca 1., 4. ve 5. problemlerde verilen cevapların kısmen doğru cevap kategorisine yakın olmaları, matematiksel tümevarımın bilindiği fakat tümevarım hipotezini kullanarak tümevarım basamağının oluşturulamadığını göstermektedir. Mülakatlardan öğretmen adayları bu durumun işlem yapabilme becerileriyle doğru orantılı olduğunu ifade etmişlerdir.

Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin %46,3 olumlu, %35,7 kararsız ve %17,8 olumsuz olduğu dikkate alınırsa matematiğin vazgeçilmez bir parçası olan ispat yapmanın matematik eğitimi açısından önemini tam olarak kavrayamadıkları söylenebilir. Araştırmada ortaya çıkan bu sonuç (25) tarafından yapılan araştırma bulgularıyla benzerlik göstermektedir.

Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlar, MTBT' den alınan puanlara göre iyi, orta ve zayıf olarak adlandırılan grupların matematiksel tümevarım ispat bilgisi yönünden birbirlerinden çok farklı olmadıklarını göstermektedir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının büyük bir bölümü matematiksel tümevarım ispat yöntemini bildikleri halde sonuca ulaşma yönünden farklılık göstermektedirler.

Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ile tümevarım ispat yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki bulunduğundan ispat yapmaya yönelik olumlu görüş oranı yükseldikçe tümevarım ispat yöntemiyle ispat yapabilme becerisinin de arttığı söylenebilir.

İlköğretim ve orta öğretim matematik programlarında ispat yapmaya olan ilgi giderek artmaktadır. Bu nedenle matematik öğretmen adaylarının ispat yapma merkezli matematik etkinliklerini geliştirebilecek düzeyde eğitim almaları gerekmektedir. Öğrencilere bu tarz etkinlikler yaptırılıp keşfetme güdüsü ortaya çıkarılarak daha etkili bir matematik öğretimi yapılabilir.

Matematik öğretmen adaylarının eğitim sürecinde yüzlerce teorem ve bunların ispatlarını öğrendikleri göz önüne alınırsa, öğrenilen bilgilerin ezbere dayalı edinilmesinin önüne geçmek gerekmektedir. Bu amaçla öğretmen adaylarının ispat yapmayı içselleştirebilecekleri etkinlikler geliştirilmelidir. Yapılacak etkinliklerin hem öğretmen adayları hem de öğretim üyeleri tarafından ortak hazırlanması faydalı olabilir. Ayrıca öğretmen adayları tümevarım basamakları arasındaki ilişkilerin kavratılabileceği problemlere odaklandırılarak bu yöndeki soruna çözüm üretilebilir.

Matematiksel ispat yapma üzerine yapılan araştırılmaların her öğretim düzeyinde artırılması gerekmektedir. Matematiksel ispatın bir yük değil, matematiğin derinlemesine öğrenilebilmesi için bir yol gösterici olduğu gerçeği farklı değişkenler açısından araştırılarak ortaya konulmalıdır.

5. Kaynaklar

1. Duatepe Paksu, A. (2008). Üslü ve köklü sayılar konularındaki öğrenme güçlükleri (s. 9–39). In F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Eds.), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri. Ankara: Pegem Akademi. Ankara.
1. Yıldırım, C. (2000). Matematiksel Düşünme, İstanbul: Remzi Kitapevi.
2. Garnier, R. Taylor, J. (1997), 100% Mathematical Proof, John Wily&Sonsn Pub.
3. Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996) Proof and proving, (eds. Bishop, A.J.), International Handbook of Mathematics Education, (877-908).
4. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standarts for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
5. Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145–166.
6. Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. Journal of Mathematical Behavior, 13, 55–80.
7. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.
8. Fawcett, H. P. (1938). The nature of proof (1938 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York: Bureau of Publications, Teachers college, Colimbia University.
9. Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 87–125.
10. Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. The Mathematics Teacher, 91, 670–675.
11. Çallıalp, F. (1999). Örnekler İle Soyut Matematik, Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.
12. MEB, (2005a). İlköğretim (6–8). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.
13. MEB, (2005b). Ortaöğretim (9–12). Sınıflar Programları Tanıtım El Kitabı. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

14. Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. Educational Studies in Mathematics, 15, 173–189.
15. Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction I. Journal of Mathematical Behavior, 5, 305–317.
16. Genthew, L. Y. H. (2005). An evaluation of a teaching approach to improve students' understanding of mathematical induction. Dissertation Presented A Part Fulfillment Of The Requirement Of The Degree Of Master Of Education The University Of Hong Kong.
17. Baker, J. D. (1996). Students' Difficulties with Proof by Mathematical Induction. Educational Resources Information Center (ERIC). Presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.
18. Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. Journal of Mathematical Behavior, 8, 285–304.
19. Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The generic decomposition of induction and compactness. Journal of Mathematical Behavior,5, 55–92.
20. Harel, G. (2002). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.), Learning and Teaching Number Theory: Research in Ccognition and Instruction (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
21. Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. Journal for Research in Mathematics Education, *33,* 379–405.
22. Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. Journal of Mathematical Behavior, 12*,* 253–268.
23. Dunlap, H. D., Erdoğan, E. Ö., & Kılıç, Ç. (2008). Matematiksel Tümevarım: Karşılaşılan Kavram Yanılgıları ve Öğrenme Güçlükleri (s.291-328). In F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Eds.), Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri. Ankara: Pegem Akademi.
24. Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates interaction with proof: some implications for mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31: 6, 869-890.
25. Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi, 14, 1, 147–160.

EXTENDED ABSTRACT

In general, proof is considered as a concept specific to mathematics. With its general meaning, proof is an endeavor for a judgment, a proposition or a result to be accepted as true (or wrong) with necessary evidence. Mathematical proof is mathematics' most crucial property that separates it from the other disciplines. With this property, it can be considered as indispensable part of mathematics. In addition, mathematical proof is placed into center of most of the mathematical activities. The difficulties students faced in doing mathematical induction proof method were presented in previous studies. However, since there is no study which investigates the pre-service mathematics teachers' difficulties in doing mathematical induction proof in our country, the results of this study are important to consider.

The purpose of this study was to determine pre-service elementary mathematics teachers' proving skills using mathematical induction method and their views about mathematical proving; and to determine the relationship between their skills and views. The fact that the literature contains no other studies on proving skills using mathematical induction method makes the results of this study important.

This study used quantitative and qualitative methods in combination. In quantitative section of the study, Mathematical Induction Knowledge Test (MIKT) which was prepared by researchers and chosen from the mathematical induction problems in the literature and Proof View Questionnaire which was prepared by (25) and adapted to Turkish by (26) were applied. After quantitative data collection process, semi-structured interviews were conducted with 9 pre-service teachers who were termed as good, medium and low according to their MIKT scores, to analyze their mistakes in detail. The sampling of the study consisted of a total of 151 (75 pre-service teachers enrolled in third grade, 76 pre-service teachers enrolled in fourth grade) pre-service teachers enrolled in the Department of Elementary Mathematics Teaching in Erzurum Ataturk University.

It was observed that pre-service mathematics teachers choose partially correct answers in questions 1, 4 and 5 of MIKT; they choose correct answers in questions 2 and 3. Based on this finding, it can be suggested that question types in which pre-service teachers could reach a solution using mathematical induction proving method were limited and generally contained equation mark. Although all problems in MIKT could have been proven using mathematical induction method, problems 2 and 3 were considered as induction in terms of the study group; while problems 1, 4 and 5 could not create the same effect. In addition, the interviews with pre-service mathematics teachers indicated that the groups which were termed as good, medium and low according to the scores of MIKT did not significantly differ in terms of induction proving knowledge.

According to the responses of pre-service mathematics teachers' to Proof View Questionnaire, it was observed that 46.3% of their views were positive, 35.7% were indecisive and 17.8% were negative. Furthermore, it was found that there was a positive and significant relationship between the views of pre-service mathematics teachers about proving and their proving skills.

The interest in proving in elementary and secondary mathematics programs is growing increasingly. For this reason, pre-service mathematics teachers need to receive education to improve their proving centered mathematics activities. Activities should be developed to enable pre-service teachers to internalize proving. It would be beneficial to prepare the activities collectively by pre- service teachers and lecturers.

Study findings reveal that pre-service teachers could not fully understand the relationship between mathematical induction steps and did not consider this proving method as a procedure to follow. Pre-service teachers attribute their failure of reaching a solution in problems to their low mathematical operation capabilities. These findings obtained from the present study support the findings of various studies in the literature (15, 16, 18, 19, 20, 23).

Considering the views of pre-service teachers about proving, the fact that 35.7% of pre-service teachers were indecisive and 17.8% had negative views might suggest that the importance of proving, which is an indispensable part of mathematics, could not have been fully comprehended. This finding is consistent with the findings of (26).

There was a positive relationship between the views of pre-service mathematics teachers about proving and their skills of induction proving method. It can be suggested that as the ratio of positive views towards proving increased, the skill of proving using induction proving method increased as well. Given that pre-service mathematics teachers have learned hundreds of mathematical theorems and their proofs during their teacher-training, rote learning should be avoided. To this end, activities could be developed that allow pre-service mathematics teachers to internalize proof. This process will be more useful when these activities are prepared by both pre-service teachers and academics.