OYUN TEORİSİNİN GENİŞLEYEN EKONOMİ MODELİNE UYGULAMASI VE TÜRKİYE - AMERİKA EKONOMİLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

(VON NEUMANN MODELİ ÜZERİNE BİR DENEME)

Öğ. Gr. Teoman YAYIN

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, matriks oyunları teorisi (sıfır toplamlı iki kişilik oyunlar) hakkında giriş niteliğinde kısaca bilgi verildikten sonra bu teorinin genişleyen ekonomilerde Von Neumann modelnin [1] genelleştirilmesine uygulanması tartışılmaktadır. Özellikle, çalışmanın ilk bölümlerinde matriks oyunları ve genişleyen ekonomi modellerıne ilişkin basit örnekler verilmiş ve çözümlenmiştir. Çalışmanın daha sonraki bölümlerinde, Amerikan ve Türk ekonomilerine ilişkin çözümler yapılmıştır. Bütün bu çözümler Hamburger ve Thompson tarafından geliştirilen metoda dayanmaktadır [2]. Ayrıca çalışmanın ilk kısımlarında verilenden daha teknik olan çözüm metodu hakkında da kısa bir tartışma sunulmuştur.

Çalışmanın hedefi; burada tartışılan genişleyen ekonomiler modelinin, hem geçmişe ilişkin ekonomik datanın (bilgilerin) açıklamasında, hem de mevcut ekonomik sistemlerin kontrol ve ayarlanmasına yardımcı olarak kullanılabileceğini göstermektir. Özellikle,

---

(1) Von Neumann, J., 'A Model of General Economic Equilibrium' *Review of Economis Studies,* XIII, No. 33 (1945-46), 1-9.

(2) M.J. Hamburger and G.L. Thompson 'Computation of Expansion Retes for the Generalized von Neumann Economy of an Expanding Economy' Carnegie Institute of Technology, *O.N.R. Research Memorandum,* No. 72, 1960.

az gelişmiş ülkelerin, modeli kullanılabilirlik açısından yararlı bulacakları tavsive edilmektedir.

2. STRATEJİ OYUNLARI

Strateji oyunları teorisi kısaca, matematiksel analizlerin çatışan durumlara ilişkin abstract modellere tatbikatı şeklinde karakterize edilebilir. Bu tür analizler için faydalı matematik türleri ise doğrusal cebir ve Konveks setlerdir. Oyun teorisi matematikçi John Von Neumann'ın dehasının eseridir. Bu matematikçi sadece çatışan durumların incelenmesinin önemini göstermekle kalmayıp, bu inceleme için gerekli matematik türünü de icat edip geliştirmiştir. Bir çalışmada [3] Neumann ekonomist Oskar Morgenstern ile işbirliği yaparak, teorinin sunuluşunda özellikle iktisadi uygulamasını belirlemiştir.

Teorinin ele aldığı ilk çatışan durumlar modelleri satranç, poker, briç gibi oyunlar olmuştur. Daha sonraları ekonomi, sosyoloji, siyasal bilimler, işletmecilik, yöneylem araştırması, istatistiki karar teorisi ve askeri plânlama gibi davranışsal bilim dallarından gelişen modeller analiz edilmiştir. Diğer sahalarda, teorinin lisanı ve muhtevası düşünceyi aydınlatma amacıyla metamatik olmaksızın da kullanılmıştır.

Takip eden bölümlerde, oyun teorisi hakkında giriş mahiyetinde bilgi verilecektir.[4]

3. MATRİKS OYUNLARI

Matriks, sayıların dikdörtgen şeklinde gösterilmesidir. Şekil 1 iki sıralı ve iki sütunlu olan ve bu nedenle de 2x2 matriksi olarak adlandırılan bir matriksi göstermektedir. m sıralı ve n sütunlu bir matriks m x n matriksi olarak adlandırılmaktadır.

---

(3) M.J. Hamburger, G.L. Thompson and R.L. Weil «Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Economy of an Expanding Economy» Carnegie Institute of Technology, *Management Science Research Report*. No. 63, 1966.

(4) J.G. Kemeny, O. Morgenstern and G.L. Thompson 'A Generalization of the Von Neumann Model of an Expanding Economy' *Econometrica*, XXIV (April 1956), Shf. 115-135.

Herhangi bir matriks iki kişilik sıfır toplamlı oyunların tarifinde aşağıdaki şekilde kullanılabilir. Oyuncu, R, matriksin bir sırasını ve oyuncu C ise bir sütununu seçmektedir. C, R'ye seçtikleri sıra ve kolon'un ortak noktasındaki miktar kadar ödemektedir (bu miktar eksi ise R. C'ye bu miktar ödemelidir). Oyun sıfır toplamlı olarak adlandırılmaktadır. Çünkü bir taraf kazanırken diğer taraf kaybetmektedir. Matriksin sıraları ve kolonları sırasıyla R ve C oyunları için «Pure Stratejiler» olarak adlandırılmaktadır.

Şekil 1'deki oyunu nasıl çözümleriz? R oyuncusu (sıra oyuncusu) artı miktarları alacak, eksi miktarları ise ödemek zorunda kalacaktır. Bu nedenle bu oyuncuya **maksimize eden oyuncu** diyoruz. Benzer şekilde, C (sütun oyuncusu) artı miktarları ödemek zorundadır ve eksi miktarlar alacaktır. Öyleyse bu oyuncuya da **minimize eden oyuncu** diyoruz. Şekil 1'de, R 6 almak isteyecek, fakat bunun için ikinci sırayı seçmek durumunda kalacaktır.

$$\begin{array}{cc} & \text{C Seçiyor} \\ \text{R Seçiyor} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 1

Eğer böyle yaparsa, C birinci sütunu seçecek ve R 4 kaybedebilecektir. Şu halde, R herzaman için birinci sırayı seçmelidir ve ödemelerini minimize etmek isteyen C'de birinci sütunu seçecektir. Sonuç olarak R, C'den bir lira alacaktır. Oyunun değeri 1 dir, ve optimal (en etkin stratejiler R'nin birinci sırayı seçmesi, C'nin ise birinci sütunu seçmesidir.

Şekıl 1'deki örnek **kesinlikle saptanmış** bir matriks oyunudur. Matriksde öyle bir miktar vardır ki bu miktar bulunduğu sıranın minimumu olurken aynı zamanda yine bulunduğu sıranın maksimumudur. Adı geçen miktara, matriksin tatmin noktası (eyer noktası; saddle point) denilmektedir. Okuyucu, Şekil 1'deki matriksdeki 1 rakamının tatmin noktası miktarı olduğunu görebilmelidir. Birden fazla tatmin noktası bulunması halinde, bunların hepsinin eşit olacağı gösterilebilir. Kesinlikle saptanmış oyunlarda V'nin değeri tatmin noktasındaki miktardır. Oyuncular için optimal stratejiler : R için «Tatmin noktası ihtiva eden sırayı seçmesi», C için ise «Tatmin noktası ihtiva eden sütunu seçmesi» dir. Dikkat edilmelidir ki eğer R optimal strateji kullanırsa V'den daha az bir miktar alamayacaktır; çünkü V seçilen sıradaki en düşük değerdir. Benzer şekilde, eğer C optimal strateji kullanırsa, V'nin seçilen sütundaki en yüksek değer olması nedeniyle, V'den daha yüksek bir değer kaybetmeyecektir. Böylece görmekteyiz ki kesinlikle saptanmış oyunlar'ın çözümü ve optimal stratejiler ile oyun değerinin yorumlanması kolaydır.

Şimdi ise Şekil 2'deki matriks oyununu ele alalım. Bu R ve C oyuncularının eş zamanlı olarak H (Tura) veya T (Yazı) seçecekleri bir para oyunudur. Eğer her iki oyuncu da aynı tarafı seçerse (Yani R, C'ye uyumludur) R «1» kazanmaktadır; eğer oyuncular değişik seçerlerse (Yani R, C'ye uyumlu değilse) C «1» kazanmaktadır.

C Seçiyor

R Seçiyor

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H & \quad T \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ T \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 2

Bu oyunun kesinlikle saptanmamış bir oyun olduğu açıkca görülmektedir; çünkü tatmin noktası değerleri yoktur. Bu tür oyunların çözümü nasıl olacaktır? Bu oyunun oyuncularının yazı veya tura şeklindeki seçimlerini, seçmeden önce havaya para atarak, tesadüfi hale getirdiklerini biliyoruz. Bu nedenle oyuncular seçimlerinin ne olacağını bilememekte, ve sonuçlar şans faktörüne bağlı kalmaktadır. Hasımları da seçimin ne olacağını bilmemektedirler öncedende çıkarabilme olanakları yoktur. Bu yaklaşımı genişleterek, kesinlikle saptanmış olsun veya olmasın, matriks oyununun çözümünü verebiliriz.

Oyuncular stratejilerini tesadüfi olarak seçiyor olsunlar. Konuya başlık kazandırmak gayesiyle bir oyuncu için **karışık strateji'**yi, toplamları 1'e eşit, eksi olmayan sayıların oluşturduğu bir set olarak tarif edebiliriz. Şu halde m x n boyutlu bir matriks oyununda, R için karışık strateji, her bir $p_i \geqslant 0$ olan $p_1\ p_2 \ldots , p_n$ sayılarının oluşturduğu set'tir ve $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ dir. Benzer şekilde, her biri $q_j \geqslant 0$ olan $q_1, q_2 + \ldots + q_n = 1$ olan set de C oyunsunun karışık stratejisini belirlemektedir. Karışık stratejiyi kullanırken oyuncu, karşıt gelen ağırlıklara eşit olasılıkları bulunan almaşıkların seçimi esnasında şans faktörünü işletmektedir. Para oyununda, tesadüfi faktör, paranın havaya atılması şeklinde belirlenmektedir. Başka oyunlarda adı geçen faktör, örneğin, zar atılması veya tesadüfi rakamların seçilmesi şeklinde olabilmektedir.

Karışık stratejilerin yararlı unsuru, rakip oyuncunun karşı tarafın seçimini önceden kestirememesidir; çünkü şans faktörü işletilene kadar kendisi de seçimi bilememektedir. Dikkat edilmesi gereken nokta karışık stratejilerde oyuncunun şahsi seçiminin, şansın öngördüğü seçim ile ikame edilmesidir. Ayrıca p ve q karışık stratejilerinin diğer bir yararı oyundaki kazançları belirleyen G matriksindeki miktarların olasılık dağılımını da belirlemesidir. Şu halde, p ve q karışık stratejileri kullanıldığında, gerçek kazanç $p_i q_j$ olasılığı ile, G matriksinin i'inci sırası ve j'inci sütununda gözüken g_{ij} miktarıdır (entry). Her oyuncu için bu stratejilerin kullanımını değerlendirmek için, aşağıda, matematiksel bekleyiş (mathematical expectation) kavramını tartışacağız.

k kadar meydana gelmesi mümkün olan ve bunlardan sadece bir tanesinin gerçekleşmesi zorunluğu olan bir deneyi ele alalım. Olsun ki, bu olaylardan bir tanesinin gerçekleşmesi halinde olaylara karşı gelen parasal ödüller $m_1, m_2 \ldots m_k$ şeklinde belirlensin. $p_i \geqslant 0$ ve $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ koşullarıyla, adı geçen olayların herbirinin gerçekleşme olaşılığı $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olsun. Şu halde deneyimizin E ile gösterilen «matematiksel bekleyiş»i veya «beklenen kazanç»ı (expected payoff),

$$E = m_1 p_1 + m_2 p_2 + \ldots + m_k p_k$$

şeklinde tarif edilmektedir. Diğer bir deyişle «beklenen kazanç» sonuçların içerdiği parasal ödüller ile sonuçların meydana gelme olasılıklarının çarpımları toplamına eşittir.

Matriks oyununda ise, eğer G, m x n boyutlu matriks ise R oyuncusu için parasal sonuçlar g_{ij}, ve p ve q stratejilerinin kullanılması halinde bu ödülleri elde edebilme olasılığı $p_i q_j$ dir. Şu halde R için beklenen kazanç,

$$E(p, q) = g_{11} p_1 q_1 + q_{12} p_1 q_2 + \dots + g_{mn} p_m q_n \text{ dir.}$$

Benzer şekilde, C için her durumda kazanç $-g_{ij}$ ve beklenen kazanç $-E(p, q)$ dir, ki bu R'nin kazancının eksi işaretlesidir. Bu sonuç oyunun sıfır toplamlı olması şartının belirtisidir.

Şimdi sadece $E(p, q)$ kazancını (payoff) ele alalım. Görülmektedir ki R bu miktarı maksimize etmeyi isterken, C minimize etmeyi arzulamaktadır.

Oyuncuların stratejilerini nasıl seçeceklerini saptamak için orijinal oyunun değiştirilmiş şekli olan iki oyun gözönünde bulunduralım. Birinci oyunda C oyuncusu, R oyuncusu seçimini açıkladıktan sonra, seçimini yapmaktadır, ve ikinci oyunda ise R, C seçimini açıkladıktan sonra seçmektedir. Eğer C, R'den sonra seyor ise, sonucu minimize eden q'yu seçecektir; C, R'nin bu tür bir seçim yapacağını bildiğinden, önceden sonucu maksimize edecek olan p'yi seçecektir, bu durumda p ve q seçildiğinden $\max_p \min_q E(p, q)$ elde edilecektir. Diğer oyunda ise, ki burada R, C'den sonra seçmektedir, $\min_q \max_p E(p, q)$ elde edilecek şekilde p ve q seçilecektir. Böylece herhangi bir matriks oyunu için,

$$(1) \quad \max_p \min_q E(p, q) \leq \min_q \max_p E(p, q)$$

eşitsizliği kolayca tesis edilebilir. Bu eşitsizlikten de açıkca görülmektedir ki, R ve C stratejlerini seçerken mümkün olan ölçüde tutucu oynamaktadırlar.

1928 de ispatlanan John von Neumann'ın meşhur min-max teoremi (1) deki ifadenin daha ötesini bile doğru olarak belirlemektedir; Herhangi bir matriks oyunu için (1) de eşitlik sağlayabilecek p^o ve q^o karışık strateji vektörleri mevcuttur. Diğer bir deyişle,

$$(2) \quad E(p^\circ, q^\circ) = \max_p \min_q E(p - q) = \min_q \max_p E(p, = V$$

dir.

Min-max teoremi olmadan, oyun teorisi sadece açıklayıcı bir teori olmaktan öteye geçemezdi. Bu teorem ile, oyun teorisi bir matematik dalı olarak belirlenmektedir. p^o ve q^o stratejileri karşılıklı R ve C oyuncuları için **optimal karışık stratejiler** olarak adlandırılmakta ve $V = E(p^\circ - q^\circ)$ de oyunun değeri olarak belirlenmektedir. Kelimelerle ifade etmek gerekirse, min-max teoremi her matriks oyununun bir değeri, ve her oyun için optimal **stra-**

tejiler bulunduğunu ortaya koymaktadır. Şu halde her matriks oyununun muhakkak bir çözümü vardır.

Matriks oyununun çözümü için gerekli şartlar, başka fakat daha faydalı bir şekilde aşağıdaki şekilde gösterilebilir. G matriks oyunu olsun, V rakamı oyunun değeri ve p ve q vektörleri de,

$$p\ G \geq ve$$

$$G\ q \leq vf$$

şartlarının mutlak surette gerçekleşmesi halinde oyun için optimal stratejiler olmaktadırlar .Yukarıdaki eşitsizliklerde e bütün elemanları 1 olan bir sıra vektör, f ise bütün elemanları 1 olan bir sütun vektördür.[5]

Oyunun değeri olasılık teorisinin büyük sayılar kanunu ile yorumlanabilir. Şöyleki, eğer oyuncular p ve q stratejilerini kullanıyorlarsa ve eğer oyun çok fazla sayıda tekrar tekrar oynanmaya devam ederse, R nin ortalama kazancının oyunun V değerine eşit olacağını büyük sayılar kanunu yüksek bir olasılık ile garanti etmektedir. Oyunun beklenen değeri matriksdeki herhangi bir sayıdan değışik olsa bile, oyun yeterli sayıda tekrar tekrar oynandığında, ortalama sonuç yüksek bir olasılıkla beklenen değere yakın olacaktır.

Min-max teoremi için çeşitli ve enteresan ispatlar ileri sürülmüştür. Yukarda da belirtildiği gibi teorem bir «saf mevcudiyet» (pure existence) teoremidir ve belirli bir oyun için optimal stratejilerin nasıl bulunacağı hakkında bir ipucu vermemektedir. Fakat bu tür oyunların çözümlendirilmesi için metodlar geliştirilmiş olup, takip eden bölümde 2 x 2 hali için bu metodları ele alacağız. Daha büyük (geniş) matriks oyunları için elektronik bilgi sayarlar ile çözümlendirilecek metodlar da mevcuttur.

4. MATRİKS OYUNLARININ ÇÖZÜMÜ

Matriks oyunlarının çözümünü kısaca tartışacağız. m x n boyutlu matriks oyununu $G = \|g_{ij}\|$ ele alalım. Burada $i = 1, \ldots, m$ ve $j = 1, \ldots n$ dir. İki durum mevzubahis olabilir,

(5) *Op-cit.*, 115-135.

(a) G oyunu kesinlikle saptanmıştır. Yani bulunduğu sıranın minimumu ve yine bulunduğu sıranın maksimumu olan bir tatmin noktası vardır. Kesinlikle saptanmış oyunların çözümü kolaydır. Optimal stratejiler, R için tatmin noktasının bulunduğu sırayı, C için ise bu noktanın bulunduğu sütunu seçmek şeklinde belirlenir. Oyunun değeri herhangi bir tatmin noktası değerine eşittir. (bütün tatmin noktaları eşittir).

(b) G oyunu kesinlikle saptanmamıştır. Bu tür oyunların çözümlendirilmesi için genel metodlar geliştirilmiş olup ayrıca elektronik bilgi işlem makinaları için de programlanmışlardır. Birkaç yüz sıralı ve sütunlu matriks oyunları böylece çözümlenebilir. Biz burada sadece 2 x 2 boyutlu oyunları, daha ilerdeki bölümlerde de yararı olması açısından, tartışacağız. Bu amaçla G Şekil 3'deki matriks olsun. Gösterilebilir ki eğer G kesinlikle saptanmış değil ise, köşegendeki a ve d değerleri her ikisi birlikte, diğer iki değer b ve c'den büyük veya küçüktürler.

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Şekil 3

Bu tür oyunlar için aşağıdaki formüller çözümü sağlıyacaktır:

$$V = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

$$(3) \qquad X_1^o = \frac{d - c}{a + d - b - c} \qquad X_2^o = \frac{a - b}{a + d - b - c}$$

$$Y_1^o = \frac{d - b}{a + d - b - c} \qquad Y_2^o = \frac{a - c}{a + d - b - c}$$

Bu formülleri Şekil 2'deki para oyununa tatbik edersek aşağıdaki miktarlar ile çözüm elde edilecektir.

$$V = \frac{(1)\ (1) - (-1)\ (-1)}{1 + 1 - (-1) - (-1)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$X_1^o = X_2^o = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Y_1^o = Y_2^o = \frac{1-(-1)}{4} = \frac{1}{2}$$

Buradan görmekteyiz ki, oyunun oynama metodu (paraların havaya atılışı), optimal strateji ile uyumlu haldedir. Oyunun değerinin sıfır olması da, bu oyunda hiçbir oyuncunun birbirine karşı avantajı olmayacağı şeklinde, içgüdüsel olarak bilinen sonucu belirlemektedir.

Değeri sıfır olan oyunlar, hiçbir oyuncunun birbirine karşı bir avantaj olmaması nedeniyle «adil oyun» (fair game) olarak adlandırılmaktadır. Artı değerli oyunlar G'nin, eksi değerli oyunlarda ise C'nin avantajını içermektedir.

Yukarıdaki formüllerin yararını daha açık bir şekilde ortaya koyabilmek için, çözümü içgüdüsel olarak açık olmayan başka bir örneği ele alalım.

Oyun bir kâğıt oyunu olsun. R oyuncusunun kırmızı 1'lisi ve siyah 4'lüsü, C oyuncusunun ise kırmızı 2 lisi ile siyah 3 lüsü var. Oyuncular aynı anda birer kağıtlarını gösteriyorlar. Eğer renkler birbirine uyuyorsa, R oyuncusu kağıtlardaki rakamlar toplamı kadar kazanıyor; eğer renkler uymuyorsa bu sefer C oyuncusu kağıtlardaki rakamlar toplamı kadar kazanıyor. Oyun Şekil 4 deki matriksde özetlenmiştir.

$$\begin{array}{lll} & & \text{C Seçimleri} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Kırmızı 2} & \text{Siyah 3} \end{array} \\ \text{R Seçimleri} & \begin{array}{l} \text{Kırmızı} \quad 1 \\ \text{Siyah} \quad 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Şekil 4

R oyuncusu 3 veya 7, C oyuncusu ise 4 veya 6 kazanacağından, oyunun adil bir oyun olduğu kanaati uyanabilir. Halbuki, (3) nolu formüllere göre çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$V = \frac{(3)\ (7) - (-6)\ (-4)}{3 + 7 - (-6) - (-4)} = - \frac{3}{20}$$

$$x_1^o = \frac{13}{20}\ ,\ x_2^o = \frac{7}{20}\ ,\ y_1^o = \frac{11}{20}\ ,\ y_2^o = \frac{9}{20}\ .$$

Görülmektedir ki oyun, C oyuncusu lehine sapmalıdır. Şöyleki eğer kazançlar lira olarak ölçülürse, C oyuncusu oyunun her oynanışında ortalama 15 kuruş kazanacaktır. Bu örnek göstermektedir ki bazı oyunlar için matematiksel analizler içgüdüsel yargılara daha üstün durumdadır.

Oyun teorisine yukardaki kısa girişten sonra, takip eden bölümlerde teorinin genişleyen ekonomiler modeline tatbikatını tartışacağız.

5. GENİŞLEYEN EKONOMİ MODELİ

Genişleyen ekonomi modeli, Von Neumann tarafından ortaya atılmış modelin değiştirilmiş ve basitleştirilmiş[6] şeklidir. Bu modelde ekonomi denge halindedir ve genleşme sabit bir katsayı üzerinden oluşmaktadır. Model, ekonomik dengeyi sağlayıcı varsayımlar üzerine kurulmuştur. Zamanımızdaki bir çok iktisatçı Von Neumann modelini gerçeğe daha çok yaklaştıran katkılarda bulunmuşlardır.[7] Burada Von Neumann matematiğinin modelde nasıl kullanıldığı konusu üzerinde durulmuştur.

Ekonomide n kadar mal ve m kadar sürecin bulunduğunu varsayalım. Mallar, çelik, kömür, ev, ayakkabı vs. dir. Daha açık bir ifade ile mallar, ekonomide direkt olarak üretim için kullanılan iputlardır. Her bir mal uygun ünitelerle ölçülmüştür ki bu ünitelerin toplamı 1'dir. Üniteler, 2.75 ton çelik olabileceği gibi 2.75 ev de olabilecektir.

---

(6) D.G. Champernowne, «A note on J. Von Neumann's Article on 'A model of Economic Equilibrium' *Review of Economic Studies XIII* (1945-46), 10-18.
Bu eserde Champernowne (1945-46), buna 'yarı-istikrarlı' durum adını vermektedir.

(7) *Op. cit.*, 115-135.

İmalât sanayiindeki süreçlerin input olarak kullanılacak, ham madde şeklindeki mallara ihtiyaçları vardır. Bunları kullanarak bir veya birden fazla mal üretirler. Örneğin, bir ev yapmak için, çelik, tahta, cam vs. input olarak kullanılır. Tabii ki bu hammaddeler birden fazla ev yapmak için de kullanılır. Burada ortaya çıkan yoğunluk 'kavramı' kullanılan süreçlerin ağırlığını belirtir. Modelin temel varsayımlarından biri doğrusallıktır. k evleri, k defa ham madde gerektirir. Her bir süreci ölçmek için 'birim yoğunluk' kararlama olarak seçilir ve eğer model içinde birim süreç ve outputların üretimi için lüzumlu inputlar biliniyorsa o takdirde, faaliyet tam olarak tanımlanmış olur.

Birim yoğunluk ile işleyen i süreçleri, input olarak, j mallarından a_{ij} kadar miktarı gereksinecektir. (Eğer j malı i süreci için lüzumlu değilse o zaman $a_{ij} = 0$ olacaktır.) Öte yandan bu süreç birim yoğunlukla işlediğinde j malından i süreçleri b_{ij} kadar miktarı üreteceklerdir. a_{ij} ve b_{ij}'ler negatif olmayan sayılardır.

A matriksi (m x n) boyutlu bir input matriksi olup elemanları a_{ij}, B matriksi (m x n) boyutlu output matriksi olup elemanları b_{ij} olarak tarif edilmiştir. Tüm ekonomi bu iki tip matriks ile tanımlanmıştır.

Ekonominin belli devrelerle çalıştığı düşünülmelidir. Her bir devre, yeterli bir zaman içinde i sürecinde a_{ij} inputlarını b_{ij} outputları haline dönüştürür. Sonraki devrede, bu outputlar, o devrenin inputları olarak kullanılır. Bu devreler yıl, 5 yıl veya daha uzun zaman fasılaları şeklinde olabilir.

Basit bir örnek yardımı ile konuyu ele alalım. Ekonominin bir 'tavuk çiftliği' olduğunu varsayalım ve problemi ona göre düzenliyelim[8].

Mallar tavuk ve yumurta olsun. Ekonomide 2 süreç mevcuttur. 'Yumurtaların yumurtlanması' ve 'yumurtaların kuluçkaya yatırılması'. Bir tavuk verilen zaman içinde ortalama 12 yumurta yapsın ve bu yumurtaların hepsinin kullanıldığını varsayalım. Eğer bu yumurtaların kuluçkada kulanılacağı öngörülürse, o takdirde her devre ortalama 4 yumurtanın bu işe tahsis edileceğini düşünelim. Bu bilgilerden sonra A ve B matrikslerini kurabiliriz.

---

(8) *Op. cit.,* 115-135.

Süreçlerin yoğunluk ünitesi, bir tavuğun bir devre içinde ortalama ne yapabileceğidir. Birinci süreçteki input, bir tavuk ki bu bir ünite birinci mal demektir. Bu süreçteki output ise, bir tavuğun o devre zarfında ortalama olarak yapacağı yumurta sayısıdır. (Örnekte, 12 adettir.) (Uunutulmaması gereken şey, bir orijinal tavuğun ikinci dönemde yine kullanılacağıdır.) Buna göre, birinci maldan 1 ünite ve ikinci maldan 12 ünite output hasıl olmaktadır.

İkinci süreçte inputlar 1 tavuk ve 4 yumurtadır. Bu süreçteki output ise birinci maldan 5 ünitedir. (Orijinal tavuk, **artı** 4 tane kuluçkadan çıkan tavuklar). Şimdi bunları matriks formu içinde gösterelim :

	A Matriksi		B Matriksi	
Mallar / Süreçler	Tavuk	Yumurta	Tavuk	Yumurta
Yumurtlama	1	0	1	12
Kuluçkaya Yatırma	1	4	5	0

Şekil : 5

Elimizdeki bu input ve output matriksleri ile süreçleri ne kadarlık bir yoğunlukla kullanalım ki, outputu maksimize edecek bir genleşme katsayısı gerçekleşsin.

Çiftlikte, 3 tavuk ve 8 yumurta ile kuluçkaya başlanmasını arzularsak, o takdirde 2 ekstra tavuk ve 8 ekstra yumurtaya ihtiyaç doğacaktır. Bunun gereği için birinci sürecin 1 yoğunlukla, ikinci sürecin 2 yoğunlukla kullanılması lâzımdır. Yani X yoğunluk vektörünün $X = (1,2)$ şeklinde oluşması şarttır. Ancak bunun sayesinde, ihtiyaç bulunan 3 tavuk ve 8 yumurta elde edilebilir.

$$XA = (1,2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (3,8)$$

Bu yoğunluktaki output ise, 11 ünite birinci maldan 12 ünite ikinci maldan oluşacaktır.

$$XB = (1,2) \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (11,12)$$

Elde edilen 11 tavuğun 3'ü kuluçka için kulanılacaksa, o takdirde yeni yoğunluk vektörü

$X = (8,3)$ altında, yeni output vektörü

$XB = (23,96)$ olacaktır.

$$XB = (8,3) \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (23,96)$$

Bunun sonunda bir sonraki devre için kullanılabilecek tavuk sayısı 23, yumurta sayısı 96'dır. Fakat burada süreçler denge durumunda değildir.

Şimdi, üretime 2 tavuk ve 4 yumurta ile başlandığını varsayalım. Yoğunluk vektörü $X = (1,1)$ olsun. Bu yoğunluk altında, 12 yumurta ve 4 tavuk sayesinde yeni output $XB = (6,12)$ olacaktır.

$$XB = (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (6,12) = 3\ (2,4)$$

Bu durumda çiftçi, gerek yumurta malının, gerek tavuk malının genleşmesini eşitlemiştir.

Şimdi, 3 tavuk ve 3 yumurta ile yeni bir yoğunluk vektörü kullanalım. $X = (3,3)$ Bu yoğunluk vektörü ile $XB = (18,36)$'lık bir output elde edebiliriz.

$$XB = (3,3) \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (18,36)$$

Bu şartlar altında ve aynı oranlarda süreçleri devam ettirirsek outputu hep aynı oranda, her devre artırarak, ekonomiyi denge haline getirtebiliriz.

Örnekte görüldüğü gibi, süreçlerin yoğunlukları bir sıra vektör ile gösterilmektedir. i'ninci sürecin yoğunluğunu X_i ile gösterirsek, yoğunluk vektörü X'in tanımı $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ olacaktır. Her bir malın toplam miktarı ve toplam üretimi matriks çarpımı sonucunda kolayca bulunabilir. XA vektöründe j elemanlarının toplamı ($X_1\ a_{1j} + \ldots + X_m\ a_{mj}$) şeklinde gösterilebilir. Burada $X_1\ a_{1j}$, birinci süreçte kullanılan j malının miktarını, $X_2\ a_{2j}$, ikinci süreçte kullanılan j malının miktarını vs. gösterir. XA'nın j'ninci ünitesi, inputların içinde, toplam j malına olan ihtiyacı göstermektedir. Benzer şekilde XB ise, outputlar içinde değişik malların miktarını verir.

Bundan sonra, çeşitli mallar için fiyatları da modelin içersine sokalım. Y_j , j malının bir ünitesinin fiyatıdır; bu negatif olmayan bir sayıdır. (Aslında modeldeki mallar çok ucuzdur ve hatta serbest mallardır.) k ünitesindeki j malının maliyeti ky_j şeklinde gösterilir. Fiyat vektörü Y bir sütun vektörüdür.

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

AY, süreçlerdeki toplam input maliyetlerini gösteren bir vektördür. AY vektöründe i elemanlarının toplamı ($a_{i1}\ Y_1 + a_{i2}\ Y_2 + \ldots\ldots + a_{in}\ Y_n$) şeklinde gösterilir. Burada $a_{i1}\ Y_1$, süreçlerde kullanılan birinci malın maliyetidir. AY'nin i'nci ünitesi, i sürecinin bir birim yoğunlukla işlemesi halinde, inputların toplam maliyetini gösterir. Benzer şekilde BY, outputların maliyetini verir.

X, (1 x m) boyutlu, A, (m x n) boyutlu; Y ise (n x 1) boyutlu vektörleri ve matriksi gösterir. Eğer ekonomi X yoğunluğunda, Y fiyatlarında işlediğinde toplam inputların maliyeti XAY, ve üretilen bütün malların toplam değerleri deXBY'dir.

Yine tavuk çiftliği örneğine dönelim. Tavukların birim maliyetinin 10, yumurtalarında birim maliyetinin 1 olduğunu varsayalım.

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olacaktır.}$$

$$AY = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} \text{ ve } BY = \begin{pmatrix} 22 \\ 50 \end{pmatrix}$$

AY ve BY vektörlerini karşılaştırdığımızda, birinci süreç (yumurtlama) içine 10 birim maliyetle giren inputun bir devre sonunda 22 bırim maliyetle output verdiği görülür ki; 22/10 = 2.2 lik bir faktör ile öbür devre yatırımların artacağına işarettir. İkinci süreç (kuluçkaya yatırılmak), her biri 1 TL. için 50/14 = 3.57 TL. lık bir fazlalık doğuracaktır. Bu, her bir süreç'in genleşme katsayısının (= faiz haddinin) farklı olduğunu gösterir ki, bu optimal bir sonuç değildir.

Şimdi tavuk maliyetinin yumurta maliyetinin 6 misli olduğunu varsayalım.

Yani, $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ olacaktır.

$$AY = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ ve } BY = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Bu durumda her bir süreçteki maliyetler aynı olmaktadır. Yani hiç bir sektörde mali baskının olmadığı görülmektedir. Bu durumda fiyatlar dengeli bir haldedir ve ekonomide denge hali mevcuttur. Çünkü;

$18/6 = 3 \quad \text{ve} \quad 30/10 = 3$

Genişleyen ekonomi modelinde, şartları (aksiyomları) gerçekleştirmek için iki kavrama daha ihtiyaç vardır. Ekonomide genleşme haddi olan α, eğer X yoğunluğunda (bir devrede) işlerse, o zaman o devreden gelecek devreye intikali αX kadar olur. İkinci devreye intıkali ise $\alpha^2 X$ kadar olacak ve bu böylece devam edecektir. Buna benzer şekilde, faiz haddi β, eğer yatırım miktarının değeri Y kadar ise, birinci devrede βY, ikinci devrede $Y^2\beta$ kadar olacak ve bu böylece devam edecektir.

Gerek genleşme haddi, gerek faiz haddi 1'den büyük olabilir. Eğer $\alpha > 1$ ise o takdirde genişleyen ekonomi, $\alpha = 1$ ise, durgun ekonomi, $\alpha < 1$ ise gerileyen bir ekonomiden bahsedilir.

6. GENİŞLEYEN EKONOMİ MODELİNDEKİ ŞARTLAR

Genişleyen ekonomi modelinde, input ve output matriksleri A ve B, yoğunluk vektörü X, fiyat vektörü Y ve genleşme haddi ve faiz hadlerinde α ve β ile ifade edildiğini gördük. Şimdi bütün bu faktörlerin aşağıda sıralanacak olan şartları tatmin etmelerinin şart olduğunuda belirtmek yerinde olacaktır.

Ekonomide birinci devrenin outputları, ikinci devre input olarak kullanılırlar. **Verilen devrede herbir malın, bir sonraki devre gereklerine göre üretilmiş olması lazımdır.** Eğer ekonomi (X) yoğunluğunda işlerde bir devre sonraki fonksiyon (αX) olacaktır. Birinci devreden elde edilen output miktarı (XB) ve gelecek devrede arzu edilen input miktarı ise (αXA) dır. Bu bilgiler altında gerek-şartlar şunlardır :

Aksiyom 1 $\quad XB \geq \alpha XA$

Bu şart, α haddinde orantılı bir gelişmeyi öngörür. Bir dönem zarfında, bir önceki dönemde üretilenden daha fazla mal kullanılmayacağını göstermektedir. Öndeki çiftlik misalimize göre;

$$XB = (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (6,12)$$

$$XA = (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (2,4)$$

$$\alpha XA = 3\,(2,4) = (6,12)$$

$$XB = \alpha XA \ \dots\dots\dots\dots \ (1)$$

Dengeli bir durumda iken ekonominin mali şartını yerine getirmek lüzumludur. Bazı süreçlerin üretilen output değeri, onların inputlarının β ile çarpımı kadardır. Müteşebbisler kendilerinin üretiminin ölçüsünü arttırmak için alacakları borç paralara ödedikleri faizin nısbetinin artmasına hazırdırlar. Denge durumunda bulunan bir ekonomide faiz haddinin artması arzu edilemez. (öyle bir fiyat sistemi olacakki hiçbir süreç pozitif bir kâr sağlamıyacaktır). Aşağıdaki şart bunu yerine getirmek için ,konulmuştur. Böylece (AY) inputların maliyetini ve (BY) de outputların maliyetini göstermektedir.

Aksiyom 2 $\quad BY \leq \beta \; AY$

Örneğimize göre;

$$BY = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$AY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\beta\, AY = 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \text{dir ki;}$$

$$By = \beta\, AY \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

eşitliği sağlanmış olur.

Buna göre, hiç bir faaliyet kolu, yaptıkları fırsat yatırımlarından fazla bir kâr elde edemez. Yani kâr marjları eşittir.

Bundan sonraki şart, ekonomi içersindeki malların fazla üretimini önlemektedir. (α) dan daha yüksek bir had ile üretiloen mallar serbest mal olmalı ve dolayısıyla fiyatları sıfır olmalıdır. Yani, $XB - \alpha XA = X(B - \alpha A)$ şeklindeki denklem fazla üretilen her bir mal miktarını gösterir; o takdirde eğer fazla üretilen (j) malı ise, onun fiyatı olan (Y_j)'yi sıfır yapmalıdır. Bu durumda denklem şu şekli alacaktır.

Aksıyom 3 $\quad X(B - \alpha X)\ Y = 0$

$$\alpha A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M\alpha = (B - \alpha A) = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$X(B - \alpha A) = (1,1) \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$X(B - \alpha A)\ Y = (0,0) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$X(B - \alpha A)\ Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Aynı şekilde, negatif bir kâr getiren, daha açık bir ifade ile zararlı olabilecek bir süreç kullanılmamalıdır. Bunu ölçebilecek olan kıstas carî faiz haddi β'dır. $(BY - \alpha AY) = (B - \beta A)\, Y$ formülü outputların değeri ile gelecek olan inputların değeri arasındaki farkı gösterir. Buda negatif bir kâr getiren sürecin kullanılamayacağını belirlemektedir.

Aksiyom 4 $\qquad X\,(B - \beta A)\, Y = 0$

Burada da bir önceki aksiyomdaki çözüm gibi;

$$\beta A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

$$B - \beta A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot (B - \beta A) = (1,1) \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 2 & -12 \end{pmatrix} = (0,0)$$

$$X\,(B - \beta A)\, Y = (0,0) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$X\,(B - \beta A)\, Y = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(4)$$

Eğer $(B - \beta A)\, Y$, negatif bir değerde ise, o takdirde X vektörü sıfır olacağından 4'ncü aksiyom işi halletmiş olacaktır.

Son olarak, üretilen bütün malların değerlerinin her bir devrede pozitif olması loâzımdır. Bu şart, üretim ve fiyat vektörleri için lüzumludur.

Aksiyom 5 $\qquad XBY > 0$

Örneğimizde;

$X = (1,1)$

$$Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$ olduğundan,

$$XB = (1,1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (6,12)$$

$$XBY = (6,12) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = (36 + 12) = 48 \text{ dir.}$$

$XBY = 48 > 0$ olmaktadır.

Eğer, A ve B input ve output makriksleri verilirse X,Y ve α,β' lar bulunabilir. Bu bulunan değerler, yukarıdaki 5 aksiyomu sağladıkları takdirde, ekonomi için mümkün olan denge durumu ortaya çıkmış olur.

7. EKONOMİK DENGE MEVCUDİYETİ

Şimdiye kadar A ve B matriksleri iloe ilgili olarak herhangi bir varsayım ileri sürmedik. Ekonomide A matriksi sıfır matriks ve B matrikside sıfır olmayan bir matriks olursa bu modeli çözmek mümkündür; yani ekonomi içersinde üretilen mallar hiç bir input kullanılmaksızın üretilecektir; bunun ekonomik bir anlamı olmadığı meydandadır. Onun için A input matriksi için bir varsayım yapılması yerinde olacaktır.

Varsayım olarak;

(ı) Herbir sektör bir önceki dönemde üretilen malları input olarak kullanır, ve

(ıi) ekonomide her çeşit mal üretilebilir, diğer bir deyişle ekonomide bir mal üretildiğine göre bu malı üreten en az bir sektör var demektir:

Varsayım : A matriksinin her sırasının en az bir tane pozitif elemanı ve B matriksinin de sütunlarının her birinin en az bir tane pozitif elemanı vardır.

Bu varsayımın (i) ve (ii) için birer garanti teşkil ettiği açıkca görülmektedir.

Teorem : Eğer input ve output matriksleri yukarıdaki varsayımı yerine getirir mahiyette ise, denge çözümü herzaman mümkündür. Her bir çözümde genleşme haddi faiz haddine eşit olacaktır. ($\alpha = \beta$)

Bu teoremin tam ispatı Kemeny, Morgensten ve Thompson (1956) da gösterilmiştir.[9] İlk önce teoremin ikinci kısmını ele alalım ve bütün neticelerin 1-5 Aksiyomlarını sağladığını varsayalım. 3'ncü aksiyom $XBY = \alpha XAY$ ve 4 ncü aksiyom $XBY = \beta XAY$ dir. Buradan XBY ler birbirine eşit olduğundan;

$\alpha XAY = \beta XAY$ dir. Aksiyom 5'e göre

$XBY > 0$ dır. O halde $XAY > 0$ dır. Buradan, her iki tarafıda XAY'e bölerek; $\frac{\alpha XAY}{XAY} = \frac{\beta XAY}{XAY}$

$\alpha = \beta$ bulunur.

Eğer $\alpha = \beta$ ise o takdirde 3 ncü ve 4 ncü aksiyomlar birbirlerinin aynı olurlar. Bu takdirde 1 nci ve 2 nci aksiyomları yeniden yazarsak;

Aksiyom 1' $X(B - \alpha A) \geq 0$

Aksiyom 2' $(B - \alpha A) Y \leq 0$

3 ncü ve 4 ncü aksfiyomlar bu iki aksiyomun içinde gösterilebilir. 1'nci aksiyomu Y ile çarparsak,

$X(B—\alpha A)Y \geq 0$; ve 2' aksiyonuda X ile çarparsak $X(B—\alpha A)Y \leq 0$ olacaktır. Bu ikisinden çıkan netice ise;

$X(B - \alpha A)Y = 0$ dır. Bu da 3 ncü ve 4 ncü aksiyomları ihtiva eder. Eğer sonuçlar 1', 2' ve 5 nci aksiyomları sağlarsa o zaman denge çözümü elde edilmiş olur.

Bu durumdan sonra oyun matriksini düzenleyerek, bu matriksi sıfır yapan X ve Y optimal stratejilerini bulabiliriz. Yukarıda da açıklandığı üzere X ve Y negatif olmayan birer değerdirler ve toplamları 1 olan birim vektörüdürler.

Oyun matriksi $G_\alpha = B - \alpha A$ dır. Oyun matriksi çözümlendiğinde, eğer α° (optimal genleşme haddi), p° optimal yoğunluklar) ve q° (optimal fiyatlar), 1', 2' ve 5 nci aksiyomları sağlarsa o takdirde çözüm doğrudur. Bu aksiyomlar şu şekilde de ifade edilebilir.

(i) $(G\alpha_0)$ Oyunun değeri sıfır,

---

(9) G.L. Thapson 'On the Salution of a Game-Theoretic Problem'in Linear Inequalities and Related Systems. H.W. Kuhn ve A.W Tucker tarafından yayınlanmıştır. Princeton University Press, 1956. sh. 275-284.

(ii) p^o ve q^o oyun matriksinin içindeki optimal stratejilerdir,

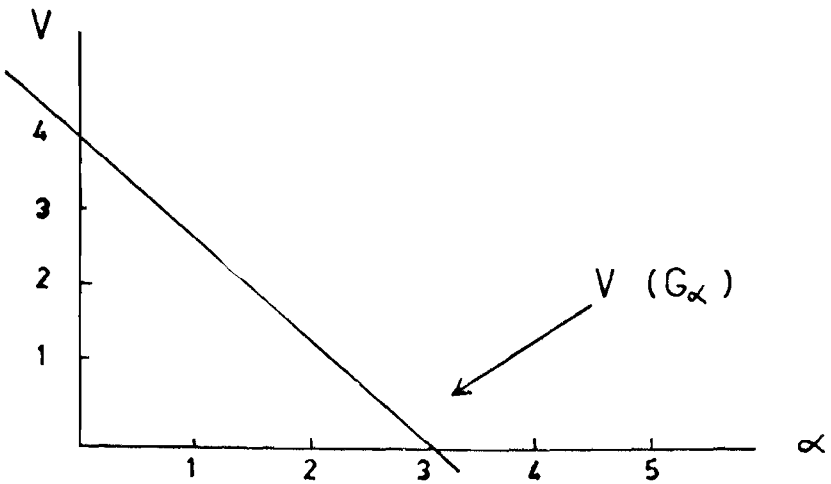
(iii) $p^o Bq^o > 0$

Yukarıdaki 3 şarttan, 1 ve 2 nci şartlar doğrudan doğruya oyun teorisi şartları, 3 ncü şart ise ekonomik bir şart olarak belirir. Eğer neticeler, 1 ve 2 nci şartları gerçekleştirir de 3 ncü şartı gerçekleştirmezse, o takdirde ekonomik bir çözümden bahsedilemez.

Yine tavuk çiftliği misaline dönelim :

$$G = B - \alpha A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 12 \\ 5 & -\alpha & -4\alpha \end{pmatrix} \text{ olacaktır.}$$

Şimdi sıra α yı seçmeğe geldi. Önceki hesaplamalardan α'nın 3 olduğu ($\alpha = 3$) biliniyor.(*) Aşağıdaki grafik (α) lı oyun matriksinin şeklini göstermeoktedir.



sekil: 6

(*) $V(G_\alpha) = \dfrac{(\alpha+5)(3-\alpha)}{\alpha+4}$ ve $V(G_\alpha) = 0$ da,

$(\alpha + 5)(3 - \alpha) = 0$

$3\alpha - \alpha^2 + 15 - 5\alpha = 0$

$-\alpha^2 - 2\alpha + 15 = 0$

$\alpha = 3$ (negatif değerler işimize yaramaz)

Bu problemi oyun teorisi yardımı ile çözümleyebiliriz.

$$G = B - \alpha A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 12 \\ 5-\alpha & -4\alpha \end{pmatrix} \text{ ki } \alpha = 3 \text{ idi,}$$

$$= \begin{pmatrix} (a) & (b) \\ -2 & 12 \\ (c) & (d) \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki oyun matriksinde tatmin noktası olmaması nedeni ile, oyun kesinlikle saptanmış değildir. Çünkü burada diogonal elemanların her ikisi birden (a ve d), diğer diogonal elemanlardan (c ve b) küçüktür.[10] Neticeye giden çözümleme aşağıdaki formüller yardımı ile olabilir.

$$V = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{24 - 24}{-2-12-12-2} = \frac{0}{-28} = 0$$

$$X_1^o = \frac{d - c}{a + d - b - c} = \frac{-14}{-28} = 1/2$$

$$X_2^o = \frac{a - b}{a + d - b - c} = \frac{-14}{-28} = 1/2$$

$$Y_1^o = \frac{d - b}{a + d - b - c} = \frac{-24}{-28} = 6/7$$

$$Y_2^o = \frac{a - c}{a + d - b - c} = \frac{-4}{-28} = 1/7$$

Bunun neticesinde $\alpha = 3$ ve optimal yoğunluk vektörünün $X = (1/2, 1/2)$ ve optimal fiyat vektöründe $Y = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ olduklarını görüyoruz. Bütün bu neticeler yukarıda sıraladığımız 1', 2' ve 5 aksiyomlarını yerine getiren neticeler olması dolayısı ile ekonomiktirler.

---

(15) Eğer diogonal elemanların her ikisi birden diğer diogonal elemanlara göre küçük veya büyükse, tatmin noktası yoktur ve oyun kesinlikle saptanmış bir oyun değildir.

Mevcudiyet teoreminin tam manası ile ispatı tavuk çiftliği örneğinde tipik olarak görülür. Burada G $= B + \alpha\ (-A)$ yazılabilir ve oyun matriksini düşünerek (B) ve $(-A)$ nin oyunlarını meczedebiliriz. Böylece, $\alpha = 0$ için $G_0 = B$ olur. Çok büyük bir α için ise, daha ziyade $(-A)$ da oyun oynanır.

Oyunun (B) de oynadığı da düşünülebilir. Varsayıma göre, (B) nin herbir sütununda en az bir pozitif giriş olacaktır. (Y) strateji vektöründe de en az bir pozitif eleman bulunur. Sıra oyuncusu kendisi için garanti teşkil edecek olan ve sıra ile aynı olasılıkta olan pozitif elemanı seçer ve bu sayıda B'ninde değeri pozitif olur.

Aynı şekilde, $(-A)$ nın herbir sırası en az bir negatif girişe sahip olmalıdır. Sütun oyuncusu kendisi için garanti teşkil edecek olan ve sütun ile aynı olasılıkta bulunan negatif elemanı seçer ve bu sayede $(-A)$ nın değeride negatif olur. Varsayıma göre, $V(B) > 0$ ve $V(-A) < 0$ dur. Buradanda, $G_0 = B$ ve $G = B + \alpha\ (-A)$ olduğundan, $\alpha = 0$ olduğu zaman oyunun değeri (G_α) pozitif, α çok büyük olduğu zaman $(-A)$ nın tesiri ile negatif olur. İşte bunun neticesi olarak (α^0) optimal α nın bulunabilmesi için oyunun değerinin G $= 0$ olması şarttır.[11]

Şimdi örneği bir hamle daha ileri götürerek oyunun daha değişik bir pozisyonda oynanmasını görelim.

Aynı çifltikte tavukçuluğun yanında mahsullük tohumda yetiştirildiği varsayılsın. Bu yetiştirilen mahsullerden bir kısmının satıldığını ve bir kısmının da tavuklar için kullanıldığını varsayalım. Bu durumda input ve output matriksleri aşağıdaki şekilde olacaklardır.

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Tavuklar} & \text{Yumurtalar} & \text{Mahsüller} \end{array} \\ A = \begin{array}{l} \text{Yumurtlama} \\ \text{Kuluçkaya Yatırma} \\ \text{Çiftçilik} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Tavuklar} & \text{Yumurtalar} & \text{Mahsüller} \end{array} \\ B = & \begin{pmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

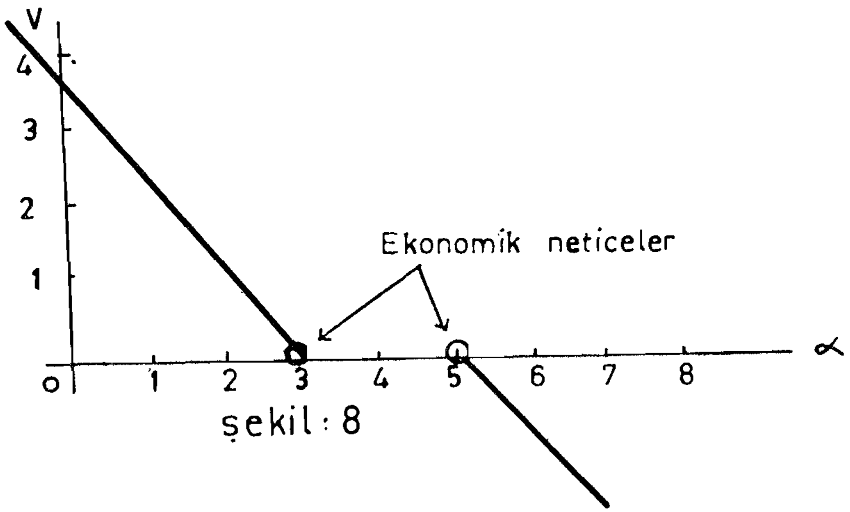
Şekil : 7

(11) G.L. Thompson 'Game Theory as Applied to Model of an Expanding Economy' *GSPIA Faculty Seminar on Operations Research for National Development Planning,* Jaunary 15-26, 1962.

Yukarıdaki matrikslere dikkat edilecek olursa önceki örnekteki 2 x 2 matriksine yalnız bir ekstra sıra ve sütun eklediği görülecektir. Bu da çiftçilikle ilgili sahadır. Şurasını belirtmek yerinde olacaktır ki, herbir devre zarfında mahsullerin bir ünitesi yumurtlama ve kuluçkaya yatırma süreçleri için yiyecek olarak sarfedilmekte ve bir ünitesinde, yine aynı devrede, çiftçilik için lazım olan ihtiyaçlar için sarfedilmektedir. Output matriksinde görüldüğü gibi bu işler için 5 ünite output çıkmaktadır. Şimdi oyun matriksini kuralım :

$$G = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 12 & -\alpha \\ 5-\alpha & -4\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 5-\alpha \end{pmatrix}$$

Burada hesaplamanın derinliğine inmeyeceğiz. Aşağıdaki grafikte α'nın aldığı değerler gösterilmektedir.



şekil : 8

Oyun matriksinin değeri sıfır olduğu zaman α nın değeri $3 \leq \alpha \leq 5$ arasındadır ki buradaki ekonomik optimal genleşme hadleri 3 ile 5 tir. Çünkü yalnız 3 ve 5, yukarıda gösterilen 1', 2' ve 5 nci aksiyomları sağlamaktadır.

$\alpha = 3$ için matriksi düzenlersek;

$$G_3 = \begin{pmatrix} -2 & 12 & -3 \\ 2 & -12 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bunlar için bulunan optimal stratejiler ise;

$$(4) \qquad X^{o} = (5/16,\ 5/16,\ 6/16) \quad \text{ve} \quad Y^{o} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dır.}$$

Bu neticelere göre, 3 malda üretilmiş ve 3 süreçte işelmiştir. Yalnız mahsül üretimi çok fazla olması nedeniyle fiyatı sıfır olmuştur.

Başka bir çifte göre optimal stratejiler;

$$(5) \qquad X^{o} = (0{,}0{,}1) \quad \text{ve} \quad Y^{o} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fakat yukarıdaki bu stratejiler 5 nci aksiyomu sağlamamaktadır ki bu da, bu çözümün ekonomik olmadığını gösterir.

Yukarıdaki bu stratejiler şu şekilde de gösterilebilir :

$$6 \qquad X^{\circ} = (5a/16,\ 5a/16,\ 1 - 10a/16) \text{ ve } Y^{\circ} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eğer $0 < a \leq 1$ arasında olursa ve $a = 0$ olmazsa bunlar 1', 2' ve 5 nci aksiyomları sağlıyabilirler. (A) daki vektörler en iyi neticelerin olduğu vektörlerdir. Çünkü tavuklar ve yumurtaların üretimi maksimumdur ve malların fiyatları da pozitiftir.

Şimdide $\alpha = 5$ için matriksi düzenlersek,

$$G_5 = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -5 \\ 0 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bunun çözümü 1', 2', 5 ci aksiyomları sağlar ve optimal yoğunluk ve optimal fiyat vektörleri aşağıdaki gibidir.

$$X^{o} = (0,\ 0,\ 1) \quad \text{ve} \quad Y^{o} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 - a \end{pmatrix}$$

$0 < a \leq 1$ olacaktır fakat $a = 0$ için değil.

Eğer $a < 1$ ise, tavukların fiyatları pozitiftir ve asla üretim yapılmaz. Bu durumda tavuklar için bir karaborsa tehlikesi mevcuttur. En iyi çözüm ise a = 1 olması halidir. Çünkü bu durumda yalnız maların fiyatı pozitiftir diğerleri sıfırdır.

$3 < \alpha < 5$ durumda ve V (G_α) = 0 olduğunda α, 1', 2' aksiyomlarını sağlamaktadır. Fakat bu arada ($3 < \alpha < 5$) hiç bir α, 5 nci aksiyomu sağlamamaktadır. Bu bize genleşme haddinin ekonomik bir anlamı olmadığını göstermektedir.

8. MODELİN VARYANTLARI

Birçok sayıda varyantlar modelin içine sokulabilirler. Burada dört ayrı varyantın modelin içine nasıl sokulabileceği üzerinde tartışalım.

Bunlar; A. Dahili talep (internal demand)

B. Dış yardımlar (outside aid)

C. Üretime verilen sübvansiyonlar (production subsidies)

D. Fiyat Desteklemeleri (price supports)

A. Normal modelde, her bir sektördeki işçilerin tüketimi modelin içersine sokulmamıştır. Bunun için model tüketimin para cinsinden değerini (yalnız fiyatlar) ihtiva etmez. Varsayalım ki D (m x n) bir negatif girişi olmayan bir matriks olsun. (d_{ij}); birim yoğunlukla işleyen (i) sektöründeki işçilere verilen (j) malını göstermekettdir. (d_{ij}) aynı zamanda (i) sektöründe ek input gereklerini de göstermektedir. Şimdi input matriksi (A) yerine (A + D) yazılabilir. Buradanda genleşme haddi :

(7) $\alpha = \dfrac{XBY}{XAY}$ idi, şimdi işçi talebinide işin içersine sokunca;

(8) $\alpha' = \dfrac{X\ B\ Y}{X\ (A + D)\ Y}$ olur.

Bu durumda paydada bir fazlalık olması nedeniyle $\alpha' \geq \alpha$ şeklinde belirir.[12] Buradan çıkan netice; **eğer işçi tüketimi artarsa otomatik**

(12) Bunun böyle olduğu, A.B.D. ekonomisi için tüketimli model çözümünde de görülmüştür. Amerikan ekonomisi için Tüketimsiz genleşme katsayısı α = 1.95 iken, tüketimli çözüm α' = = 1.20 vermiştir.

olarak genleşme katsayısı azalacaktır. En iyi ihtimalle aynı kalabilir.

B. Aynı durum kendini ekonominin dış kaynaklardan aldığı yardımlarda da gösterir. Varsayalım ki, ekonomi yardım olarak dışarıdan mal almaktadır B.u durumda (B') dış yardım matriksi olsun. (b'_{ij}) dışarıdan yardım olarak gelip, (i) sektöründe kullanılan (j) malını göstermektedir. Yeni output (B + B') olacaktır. Yardım almadan önceki genleşme katsayısı formülü $\alpha = \frac{XBY}{XAY}$ idi. Şimdi ise,

$$(9) \quad \alpha'' = \frac{X\ (B + B')\ Y}{XAY} \quad \text{olacaktır.}$$

Bu durumda $\alpha'' \geq \alpha$ olacaktır. Bunun neticesi olarak, **dış yardımlar genleşme haddini hiç bir zaman normalinden aşağı düşürmeyecek, bilakis daha da yükseltecektir.**

C. Diğer önemli bir faktör ise, hükümetin ekonomiye olan tesirleridir. Bu tesirler en azından 3 şekilde tezahür edebilir.

a) Vergileme suretiyle,

b) Kârlılık gözetmeksizin, işletmeci olarak (posta hizmetleri, ulaştırma, askerî malzeme üretimi vs.), ve

c) Bazı malların fiyatlarının desteklenmesi (çiftlik üretimleri, vs.)

Şimdi bunların genleşme katsayısını nasıl etkilediklerine değinelim.

Vergiler, genleşme katsayısını aynı dış talep gibi etkiler. **Yani genleşme katsayısında bir düşme meydana getirirler.**

Eğer ekonomi içersinde **kârsız faaliyetler** mevcutsa, o takdirde oyunda sıra oyuncusu herhangi bir optimal stratejide, bazı stratejileri pozitif almayacak şekilde zorlar. Bu onun için dejavantaj, sütün oyuncusu için ise bir avantajdır. Sonuç, **genleşme katsayısını düşürücü (azaltıcı) mahiyettedir.** Eğer hükümet **fiyatları desteklerse**, sütün oyuncusu optimal olmayan stratejiyi kullanmak için gerekli oyunu oynar, bu sıra oyuncusu için bir avantaj olabilir. **Genleşme katsayısını arttırıcı bir mahiyettedir.**

Bunlar gibi daha bir çok faktörler modelin içersine sokularak genleşme katsayısı (haddi) na olan tesirleri ölçülebilir ve benzer şekillerde analize tabi tutulabilir.

9. TÜRK VE AMERİKAN EKONOMİLERİ İÇİN YAPILAN ÇÖZÜMLERİN ANALİZ/ VE KARŞILAŞTIRILMASI

Von Neumann modelinin oyun teorisi yolu ile çözümü Türk ve Amerikan ekonomileri için denenmiştir. Her iki ekonomi için birbirine yakın yılların (sırasıyla 1968 ve 1966) input-output tabloları kullanılmıştır. Ancak ekonomilerin yapılarının farklı oluşu yanında bazı kayıtlayıcı faktörler orijinal tablolardaki sektörlerin benzer kapsamalarda toplulaştırılmasını engellemiştir. Buna rağmen farklılıklar iki ekonomiyi karşılaştırma olanağını ortadan kaldıracak nitelikte değildir.

Türk ekonomisinin 1968 yılı teknolojisini yansıtacak olan 1968 yılı input-output tablosu çalışmaları henüz sonuçlanmadığı için hizmetler sektörün alt sektörlerine ayırma olanağı bulunamamıştır. Amerikan ekonomisi için ise ulaştırma ve ticaret sektörlerini diğer hizmetlerden ayırmak mümkün olmuştur. Türkiye için düzenlenen tabloda inşaat sektörünün input yapısına teknoloji matriksi içinde yer veren, buna karşılık hasılasını nihai talepte gösteren bir yaklaşım benimsenmiştir. Oysa Amerikan tablosunda inşaat sektörünün hasılasının teknoloji matriksi içinde sıra dağılımı bulunmaktadır. Bu nedenle Amerikan ekonomisi için bu sektörü ayırdetme olanağı bulunmuştur. Öte yandan imalât sanayiinde Türk ekonomisi yönünden anlamlı olabilecek farklı bir toplulaştırmaya gidilmiştir.

Çözümler, ekonomik genleşme katsayısını optimal sektörel yoğunlukları ve optimal sektör fiyatlarını saptayacak şekilde yapılmıştır. Bulgular ve değerlendirmeleri aşağıda kısaca özetlenmiştir.

A. Ekonomik Genleşme Katsayısı

1966 Input-Output maotriksi kullanılarak, Amerikan ekonomisi için yapılan çözüm neticesinde (daha önce açıklanan model yardımı ile), ekonomiyi yarı kararlı denge (quasi-staticequilibrium) durumuna götürecek olan genleşme katsayısı = 1,95 olarak bulunmuştur. Genleşme katsayısını 1.95 olarak tesbit eden oyunun değeri V = 0.006425 olmuştur. Bu sayı sıfıra çok yakın bir değer olarak kabullenilerek oyun bu noktada kesilmiştir. Daha açık bir ifade ile ekonominin denge durumuna geldiği varsayılmıştır. Amerikan ekonomisi için bulunan genleşme katsayısının daha önce yapılan bu tür araştırma sonuçları ile karşılaştırıldığında, anlamlı olduğu görülmüştür,[13] Yapılan araştırmaya göre, 1919 yılı için α = 2.00, 1929 yılı için α = 2.06 1939 α = 2.25 ve 1947 yılı için α = 2.25 olarak hesaplanmıştır. Yukarıdaki araştırmanın ilk üçüne ait veriler. Leontief'in input-output tablolarından alınmıştır. Bu tablolar sırasiyle, 46X46; 46X46; 42X42 boyutlu tablolardı. Son, 1947 yılı input-output tablosu ise, Evans ve Hoffenberg'in hazırladıkları 47X47 boyutlu tablodur.

Bu çalışmada kullanılan tablo, 1966 yılında geliştirilen ve 100X100 boyutlu olan input-output tablosudur.[14]

Gerek ilk çalışma ve gerek bu çalışmada hesaplanan gelişme katsayıları arasındaki ufak, fark, değişik kaynaklı ve boyutlu tabloların kullanılmasından ileri gelmektedir.[15]

Amerikan ekonomisi için yapılan çözümün ikinci kısmında, her bir sektördeki işçilerin tüketimi de modelin içersine sokulmuştur.[16]

Tüketimin modele sokulması neticesinde, genleşme katsayısı büyük bir düşme göstermiştir. (α' = 1.20, V = 0.06). Bu düşme yüzde 38 oranında olmuştur. Bu düşüş Amerikada tüketimin oldukça yüksek bir düzeyde bulunşunun sonucu olarak yorumlanabilir.

Türk ekonomisi için yapılan optimal çözüm neticesinde bulunon optimal genleşme katsayısı α = 2.45, oyunun değeri ise, V = 0.0000581'dir. Buradaki oyun değerinin Amerikan ekonomisi çözümündeki oyun değerinden sıfıra daha yakın olduğu görülebilir.

---

(13) M. J. Hamburger and Grald L. Thompson 'Computation of Expansion Rates for the Generalized Von Neumann Model of an Expanding Economy' *Carnegie Institute of Technology,* O.N.R. Research Memorandum, No. 72. sh. 17.

(14) Fortuna Input-Output Table for the U.S. in 1966 *Fortune Marketing Service,* 1967.

(15) Hamburger, Thompson, and Weil 'Computatinon of Expansion Rates for the Generalized Von Neumann Economy of an Expanding Economy' *Management Science Research Report,* No. 63, 1966.

(16) Matematik yaklaşımı için bkn. J. Von Neumann 'A Model of General Economic Equilibrium', *Review of Economic Studies,* No 33 1945-46, p. 1-9.
İktisadi açıklaması için bkn. D.G. Champernewne, «A note on J.V. Neumann's Article on 'A Model of Economic Equilibrium', «*Review of Economis Studies,* XIII, 1945-46, 10-18.

Bu, Türk ekonomisi için yapılan çözümün daha hassas olduğunu göstermektedir. Yani ekonomi, yarı kararlı denge durumuna çok yaklaştırılmıştır. Türk ekonomisinin çözümünden elde edilen genleşme katsayısını, daha önce bu tür bir araştırma yapılmaması nedeni ile kontrol etme olanağı yoktur.

Bu çalışmada kullanılan veriler 1968 yılı 50x50 boyutlu, input - output çalışmasından elde etmiştir.[17] Türk ekonomisi için yapılan çalışma içine, işçilerin tüketimi, bazı kısıtlayıcılar nedeni ile ithal edilmemiştir.

Ekonomik genleşme katsayısının Türk ekonomisi için, Amerikan ekonomisi için çözümlenenden daha büyük çıkması, Türk ekonomisinin bugünkü teknolojisi ile yarı kararlı denge durumuna gelmesi halinde daha fazla genleşebilecek bir potansiyel taşıdığını ortaya koymaktadır.

B. Sektörel Yoğunluklar

Modelin çözümlenmesi ile optimal sektörel yoğunluklar optimal genleşme katsayıları vasıtasiyle, her iki ekonomi için hesaplanmıştır. Ayrıca her bir ekonominin sektörel carî yokunluklarıda, her bir sektörün outputunun toplam output içindeki yüzdesi olarak hesaplanmış ve aşağıda Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo'da görüldüğü üzere, Amerikan ekonomisi için bulunan cari ve optimal yoğunlukların (her bir sektörde) karşılaştırması oldukça anlamlı hakikatleri ortaya koymuş bulunmaktadır. Önceki kısımda ele alınan varsayımların ışığı altında konu incelendiğinde bazı sektörlerin optimal yoğunluklarının cari yoğunluğu altında, bazılarının ise üstünde olduğu görülmektedir. Tablo ince-

---

(17) Veri Kaynakları :
1. DİE tarafından hazırlanmakta olan Input-Output dökümleri *Basılmamış.*
2. Teoman Yayın «1968 Türk Ekonomisinde kamu kesiminin Endüstrilerarası Yapı İçindeki Yeri» Aralık 1973 *Basılmamış.*
3. Çetin Akbay «Dolaylı Vergilerin Sektörlere Dağılımı *Milli Gelir-Mal ve Hizmet Akımları Projesi Bildirisi,* No. 3, DİE, 1973.
3. Sühendan Ekşi «1968 Sektörel Küçük İmalât Sanayii Tahmini» *Milli Gelir-Mal ve Hizmet Akımları Projesi Bildiri,* No. 4, DİE, 1973.
5. Dr. A. K. Chakraverti, Cemil Çınar, Güler Canalp «Structural Interdependence of the Turkish Economy: 1963» *DPT,* 1970.

lendiğinde, Amerikan ekonomisi içindeki sektörlerden, madencilik, kâğıt ve basım, kimya ve plâstik, demir-çelik sektörlerinin optimal yoğunluklarının, cari yoğuluklarından çok yukarıda olduğu görülür. Bu sektörlerin, ekonominin denge durumunda, gelişmiş bir ülke için, çok yukarda yoğunluk vermesinin nedeni, bu dört sektörün ana sektörler olmasındandır. Daha açık bir ifade ile, Amerikan ekonomisi, ancak bu dört temel sektörün ekonomisi içindeki ağırlıklarını artırmak suretiyle, en yüksek genleşme katsayısı ile yarı kararlı denge durumuna ulaşabilecektir. (Bkn. Sektör No. Amerika 2, 7, 8, ve 9).

Çalışmada görülen diğer özellik ise, inşaat, gıda, taşıt araçları (otomobil) ve Ticaret sektörlerinin optimal yoğunluklarının carî yoğunluklardan daha aşağıda olmasıdır. Modelin, temel sektör olmayan bu dört sektörün optimal yoğunluğunu düşürmesi normaldir. Gıda ve Taşıt araçları (otomobil) sektörleri direkt tüketim malı üreten sektörlerdir. (Amerikan ekonomisinde otomobil sektörünün tüketime dönük sektör olarak nitelendirilmesi doğrudur.) İnşaat sektörü ve ticaret sektörleri ise tüketime dönük sektörler olması nedeniyle, ideal modelde yoğunlukları düşürülmüştür. Geri kalan sektörlerin cari ve optimal yoğunlukları çok az farklılıklarla birbirlerine yakındır.

Madelin Türk ekonomisi için çözümlenmesi sonucu ortaya çıkan sektörel optimal yoğunluklar ve carî yoğunluklar Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo'dan da görüldüğü üzere, Türk ekonomisini yarı kararlı denge durumuna getirecek olan optimal sektörel yoğunluklar ile cari yoğunluklar karşılaştırıldığında tarım, gıda ve hizmetler (Ulaştırma, İnşaat, Ticaret ve Hizmetler dahil) sektörlerinin büyük azalmalar gösterdiği görülür. Tekstil sektöründeki azalma ise diğerlerine nazaran daha azdır. Gelişmekte olan bir ekonomide, özellikle tüketime dönük sektörlerin, ekonomik kalkınma sürecine olan katkılarının azlığı düşünüldüğünde, sonuç anlamlıdır. En hızlı azalma ise tarımda görülmektedir. Çünkü, uzun dönemde tarımda hızlı artışı arz yönünden sınırlıyan teknolojik ve doğal engeller mevcuttur. Bu nedenle, hızla kalkınan ülkeler, milli gelirdeki yüksek artışları, daha çok tarım dışı sektörler ve özellikle sanayideki artışlarla gerçekleştirebilmişlerdir. Nitekim kalkınmış ülkelerin tarım sektörleri incelendiğinde toplam üretim içindeki paylarının ortalama yüzde 4-5 dolayında olduğu görülmektedir. (Amerika çözümünde bu hız, cari yüzde 5, optimal yüzde 6'dır). Öte yandan tarımda hızlı gelişmeyi talep yönünden de sınırlayan faktörler vardır. Çünkü tarım ürünlerine olan talebin gelir esnekliği genellikle bir'in altındadır ve ekonomik gelişme ile birlikte giderek azalmaktadır. Türkiye'nin gelişme sürecinde de tarımın milli gelir içindeki payı devamlı olarak düşmektedir. Sanayileşme yönündeki yapısal değişimde böyle bir eğilimi zorunlu kılmaktadır. Nitekim, tarım sektörünün gayrisafî yurt-içi hasıla içindeki payı 1963 yılında yüzde 33.9 dan 1968 yılında yüzde 26.9'a düşmüş bulunmaktadır. (Tarım, Ormancılık ve Hayvancılık birlikte) Ancak tarım sektörünün yurtiçi hasıla içindeki payı azalmakla birlikte, tarımsal hasılanın değeri mutlak olarak artmaktadır. Bu eğilimin «Yeni Strateji» ile kabul edilen hız ve biçimdeki sanayileşme amacı açısından devam etmesi sonucu, 1995 de tarımın gayrisafi yurtiçi hasıla içindeki payının yüzde 12 dolayına ineceği tahmin edilmektedir. Tarımın payındaki bu azalmaya rağmen, aynı dönemde tarımsal hasılanın mutlak olarak bugünkü düzeyinin üç katına yaklaşması beklenmektedir.[18] Yaptığımız denemede tarım sektörünün yoğunluğunun cari yoğunluğa göre önemli ölçüde düşmüş ve 1995 hedefine yaklaşmış olması, model sonuçlarının güvenilirliğini test etme açısından değerlidir.

Gıda ve hizmet sektörlerinin de modele göre yoğunluklarının düşük çıkması nedeni, tüketime dönük sektörler olmasındandır. Ayrıca, hizmetler sektörünün (Ulaştırma, İnşaat, Ticaret ve Servisler dahil), cari yoğunluk yüzdesinin yüzde 35 iken, model çözümünde yüzde 17'ye düşmesinin nedeni, Türkiye'de bu tür faaliyetlerin, gelişmiş ülkelere göre sanayii'e daha az dönük olmasıdır. Modelin, sanayi'e dönük olmayan bu tür üçüncül faaliyetleri çözümde düşük göstermesi doğaldır. Ne var ki, model tüketimi de içine alacak şekilde çözümlendiğinde tüketim malları sanayilerinin yoğunluklarının bu ölçüde düşmemesi, buna karşılık ana ham madde üreten sektörlerin yoğunluklarının ise elde ettiğimiz çözüm ölçüsünde artmaması beklenebilir.

Bunun yanında, modelin çözüm neticeleri incelendiğinde, Madencilik, Kimya, Demir-çelik sektörlerindeki büyümenin çok fazla, Makina ve Eenerji sektörlerinin orta, kağıt ve taşıt araçları sektörlerinin ise az bir biçimde olduğu görülmektedir.

---

[18] Yeni Strateji ve Kalkınma Planı, Üçüncü Beş Yıl, 1973-77. Sh. 208.

Uzun vadeli plân perspektifi içinde, madenclikte, önceliğin, metal sanayileri ile enerji hammadde ihtiyaçlarını karşılamasına dönük arama çalışmalarına yönetilmesi, ayrıca bilinen maden değerlerinin geliştirilmesi, kaynakların israf edilmeden en iyi biçimde değerlendirilmesi, kaynak dağılımında gözönüne alınan ilkeler olduğuna göre, ekonominin ideal durumuna gelmesi için optimal yoğunluğunu yüzde 1,5 dan yüzde 13'e çıkarılmasını normal karşılamak gerekmektedir.

İmalât Sanayiinde teknolojinin istenen bir düzeye ulaşması, ekonomik ve teknik yönden olumsuz dış etkenlere duyarlılığın azaltılması ve sanayiin yapısının değiştirilerek, imalât sanayii üretimi için de ara ve yatırım malı üreten sanayilerin daha çok ağırlık kazanmasına bağlı olduğuna göre, model çözümünün özellikle imalat sanayii için verdiği optimal yoğunluk değerleri anlamlı karşılanabilir. Çünkü, model neticelerine göre, imalat sanayiinin yüzde 54 civarına getirilmesi öngörülmekte ve bunun içinde de ağırlık, Kimya, Demir-çelik ve Makina sektörlerine (daha açık bir ifade ile, ara malı ve yatırım malı üreten sektörlere) tanınmaktadır. Örneğin, model çözümü, Kimya sektörünün optimal yoğunluğunu yüzde 15 (cari yoğunluk yüzde 5), demir-çelik sektörünün optimal yoğunluğunu yüzde 17 (cari yoğunluk yüzde 2,5) ve makina sektörünün optimal yoğunluğunu yüzde 3 (carî yoğunluk yüzde 1,7) olarak bulunmaktadır.

Bunun yanında montaj sanayiinin imalât sanayiine dönüştürülmesi plan hedefleri arasında belirlenmiş bulunmaktadır. Bu da öncelikle kendini taşıt araçları sektöründe belli etmektedir. Taşıt araçları sektörünün optimal yoğunluğu yüzde 2 olarak belirtmiştir. Oysa cari üretim yüzdesi 1,4 dir.

Enerji sektörünün optimal yoğunluğu incelendiğinde, enerjinin yurtiçi üretiminin yüzde 1'den yüzde 3'e çıkarılması modelde öngörülmüştür. Enerjide görülen bu az artışı olumsuz karşılamamak lâzımdır' İleri ekonomilerde, enerji sektörünün toplam output içindeki yeri yüzde 2-3 civarındadır.[19] Japonya'da yüzde 2, Amerika'da yüzde 2,2'dir.

---

(19) R.L. Weil 'The Generalized Von Neumann Model and International Comparisons of Productivity, *The Journal of Political Economy,* Volume 75, February - December 1967, Sh. 697-698.

C. Optimal Sektör Fiyatları

Denge halinde gelişme çözümünden elde edilen Y sektörü her bir mala atfedilen optimal sektör fiyatlarını verecektir. Bu fiyatların mevcut input-output verilerinde kullanılan fiyatlarla uyuşması gerekli ve genellikle mümkün olmayacağından iki fiyat setinin dikkate alınması lâzımdır. Input-Output analizlerinin output matriksi, her sektörün output'larının 1 lira kıymeti olduğunu belirleyen bir birim matrikstir. Böylelikle, bütün sektörlerin normalize edilmiş cari fiyatlarının (actual price) toplamı 1, bir tek sektörün normalize edilmiş fiyatı ise 1/n dir.[20]

Von Neumann çözümünün fiyat vektörü dengeli gelişmeyi destekleyen fiyatlardır. Y vektörü ile (1/n, 1/n, ..., 1/n) vektörü arasındaki mesafe, bir anlamda belli bir teknoloji ile desteklenebilecek sektörlerin dengeli gelişmeden ne kadar uzak olduğunu ölçer. Charnes ve Cooper (1961) vektörler arasındaki mesafenin ölçülmesi konusunu incelemektedirler.[21]

10. SONUÇ

Bu çalışma oyun teorisini Von Neumann'ın ekonomik büyüme modeline uygulama denemesidir. Model henüz akademisyenler arasında gerçekçiliği yönünde tartışılmakta ve geliştirilmeye açık bulunmaktadır. Bu durum bu aşamada modelin çözümünden elde edilen bulguların ihtiyatla yorumlanmasını gerektirmektedir.

Model olgunluğa erişmemiş olmasına rağmen, çözümü bir ölçüde anlamlı sonuçlar vermiştir. Ne var ki sonuçları değerlendirebilmek için matematik ifadelerin gerisindeki ekonomik anlamların daha fazla açıklığa kavuşturulması gerekmektedir. Bunun için model üzerinde tartışma ortamının yaratılması zorunlu idi. Deneme Türkiye'de bu konu üzerindeki çalışmalaıa ortam hazırlayabilirse amacına ulaşmış olacaktır.

---

(20) Bu çalışmada, gerek Türk ve gerek Amerikan ekonomileri için toplam cari fiyatlar 1, bir tek sektörün normalize edilmiş fiyatı ise 0.0625'dir Ekonomide 16 sektör vardır. Bu nedenle bir sektör fiyatı 1/16 = 0.0625'dir.

(21) A. Charnes ve N. W. Cooper, 'Management Models and Industrial Application of Linear Programming, 1961, 154-167.

Geliştirme çalışmalarına yardımcı olmak için denemede konu, model üzerinde çalışmak isteyenleri çözüm metodu yönünde belirli bir gelişme aşamasına ulaştıracak biçimde sunulmuştur. Geliştirmenin modelin varyantları gözetilerek, ekonomi politikalarının ekonomiye etkilerini araştıracak biçimde yönlendirilmesi politika geliştiren ve uygulayanlar yönünden ayrıca değer taşıyacaktır.

REFERANSLAR

Akbay, Çetin «*Dolaylı Vergilerin Sektörlere Dağılımı*» Mill Geelir — Mal ve Hizmet Akımları Projesi, Bildiri No. 3, T.C. Başbakanlık D.İ.E., Ağustos 1973.

Chakraverti A.K, Çınar Cemil, Canalp Güler «*Structural Interdependence of the Turkich Economy: 1963*» Republic of Turkey, Prime Ministry, State Planning Organization, İstanbul, 1970.

Champernowne, D. G. «A Note on J. V. Neumann'e Article on «A Model of Economic Equilibrium» *Review of Economic Studies,* XIII (1945-46), Shf. 10-18.

Charnes, A ve Cooper, W.W' «*Management Models and Industrial Aplications of Linear Programming*» New York : John Wiley, Sons, 1961.

Ekşi, Sühendan «*1968 Sektörel Küçük İmalât Sanayii Tahmini*» Milli Gelir — Mal ve Hizmet Akımları Projesi, Bildirisi No. 4, T.C. Başbakanlık D.İ.E. Ankara, 1973.

Hamburger , M.J. ve Thompson G.L. «Computation of Expansion Rates for the Generalized Von Neumann Economy of an Expanding Economy», Carnegie Institute of Technology, *O.N.R. Research Memorandum,* No. 72, 1960.

Hamburger, M. J., Thompson G.L. ve Weil, R.L. Jr. «Computation of Expansion Rates for the Generalized Von Neumann Economy of an Expanding Economy» Carnegie Institute of Technology, *Management Secience Research Report,* No. 63, 1966.

Kemeny, J.G. Morgenstern, O ve Thompson, G.L. «A Generalization of the Von Neumann Model of an Expanding Economy» *Econometrica,* XXIV (April, 1956), Shf. 115-135.

Von Neumann, John «A Model of General Economic Equilibrium», *Reviex of Economic Studies,* XIII, No. 33 (1945-1946), 1-9.

Thompson, Generald L. «On the Salution of a Game Theoretic Problem», *Linear Inequalities and Related System* içinde. Edited by, H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Princeton, N.J : Princeton University Press, 1956, Shf. 275-284.

———.. «Game Theory as Ppplied to Model of an Expanding Economy» *GSPIA Faculty Seminar on Operation Research for National Development Planning,* (January 1962, 15-26).

Weil, Roman L.Jr. «The Generalized Von Neumann Model and International Comparisons of Productivity» *The Journal of Political Economy,* Volume 75, Feb. — Dec. 1967, Shf. 696-705.

Yayın, Teoman «*1968 Türk Ekonomisinde Kamu Kesiminin Endüstrilerarası Yapı İçindeki Yeri*» Aralık 1973, Basılmamış.

. «*An Inquiry to the Optimum Growth Pattern of the United States Economy Using Von Neumann Model*» University of Pittsburgh, June 1968. Master Tezi.

———. «*Türk Ekonomisinde Kamu ve Özel Kesimlerin Mevcut Teknolojileri İçinde Gelişme Potansiyelleri*» Ankara Üniversitesi, SBF. Maliye Enstitüsü, Cumhuriyetin 50. yılında Türkiye'de Sanayileşme ve Sorunları Semineri, Tebliğ, 28-31 Ocak 1974, Ankara.