EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİLERİNİN DAĞILIMLARININ PEARSON KATSAYILARI İLE UYGUNLUĞU BOZAN TERİM ARASINDAKİ İLİŞKİ *

Çeviren :

P. N. MISRA

Ass. Ali Fuat YÜZER

Bu makalede genel bir lineer regresyon modeli parametrelerinin en küçük kareler yöntemi ile tahmin edicilerinin (estimators) üçüncü ve dördüncü momentlerini, uygunluğu bozan terimin (disturbance term) dağılımına ilişkin hiçbir varsayım yapmadan ele alıyoruz. Bu sonuçlar, en küçük kareler yöntemi ile bulunan tahmin edicilerin dağılımının Pearson katsayıları ile uygunluğu bozan terim arasında bir ilişki kurmak için kullanılacaktır.

1. GİRİŞ

Genel bir regresyon modelinde parametrelerin en küçük kareler yöntemi *(OLS)* ile elde edilen tahmin edicilerinin dağılımı, modelin içerdiği uygunluğu bozan terimin dağılımına bağlı olmasına rağmen, yöntemin kendisi böyle bir varsayımı gerektirmez. Dolayısıyla bu iki dağılımın özelliklerinin karşılaştırılabilmesi ancak bilinmeyen uygunluğu bozan terime önceden (a priori) bir dağılım şekli verilmesiyle mümkün olur. Buna rağmen, en küçük kareler tahmin edicilerinin ve uygunluğu bozan terimin dağılımlarının Pearson katsayıları arasında, sonuncunun dağılımına ilişkin bir varsayımda bulunmaksızın genel bir ilişki kurulabilir.

(*) P. N. MISRA : «Relation Between Pearsonian Coefficients of Distributions of Least Squares Estimators and the Disturbance Term»; **Journal of American Statistical Association**; Eylül 1972, cilt 67, No. 339, s. 662-663.

Bu makale, ilgili iki dağılımın β_1 ve β_2 (Pearson) katsayıları arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Teorem 1'de *OLS* tahmin edicilerinin üçüncü ve dördüncü momentlerini elde ettikten sonra, bu sonuçları ikinci teoremi ispatlamak için kullanacağız.

2. *OLS* TAHMİN EDİCİLERİNİN ÜÇÜNCÜ VE DÖRDÜNCÜ MOMENTLERİ

Genel bir lineer regresyon modelini, açıklayıcı değişkenler yardımı ile göz önüne alalım ve bunu matris notasyonu ile şöyle gösterelim :

$$y = X\beta + u \tag{2.1}$$

burada, y ve u, T X 1 sütun vektörleri, X, T X Λ matrisi, β, Λ X 1 sütun vektörü ve T, gözlem sayılarıdır. u (t) (t = 1, ... , T) nin dağılımı belirlenmeden aşağıdaki varsayımları yapacağız :

1. Bütün değişkenler hatasız ölçülmüştür.

2. Açıklayıcı değişkenler stokastik değildirler ve uygunluğu bozan terimle istatistiksel bağımsız, biribirleriyle de lineer bağımsızdırlar.

3. u (t) nin t'ye bağlı olmayan ilk dört momenti vardır ve özellikle birinci moment sıfırdır.

4. t = 1, ... , T için u (t) ler karşılıklı bağımsızdırlar.

Bilindiği gibi β'nın

$$b = (X'X)^{-1} X'y \tag{2.2}$$

şeklindeki *OLS* tahmin edicisi, daha önceki varsayımlar altında sistematik hata içermeyen en ıyi lineer şekildir.

b'nin β etrafındaki örnekleme hatası olan,

$$e = b - \beta = (X'X)^{-1} X'u \tag{2.3}$$

bir Λ X 1 vektörüdür. Şöyleki, e'nin λ. cı elemanı,

$$e_\lambda = \Sigma_t \, a_{\lambda t} \, u(t) \tag{2.4}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $a_{\lambda t}$,

$$A = (X' X)^{-1} X' \tag{2.5}$$

matrisinin λ. cı satır ve t. ci sütununun elemanıdır. Böylece, 2 ile 3 varsayımlarını ve (2.4) ilişkisini kullanarak ilk iki moment,

$$E\, b_{\lambda} = \beta_{\lambda} \tag{2.6}$$

ve

$$\mu_2 (b_{\lambda}) = E\, e_{\lambda}^2 = \mu_2 (u)\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}^2 \tag{2.7}$$

olarak elde edilir. Burada μ_2 (u) uygunluğu bazan terimin ikinci momentidir. Uygunluğu bozan terimin üçüncü ve dördüncü momentlerini bütün t'ler için

$$\mu_3 (u) = E\, u^3 (t) \quad \text{ve} \quad \mu_4 (u) = E\, u^4 (t) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlarsak, b'nin elemanlarının üçüncü ve dördüncü momentleri için aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 1 : Eğer (2.2) deki en küçük kareler tahmin edicileri olan b_{λ}, b'nin λ.'cı elemanı olacak şekilde verilmişse, o zaman öcneki varsayım ve notasyonlarla,

$$\mu_3 (b_{\lambda}) = E\, e_{\lambda}^3 = \mu_3 (u)\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}^3 \tag{2.9}$$

$$\mu_4 (b_{\lambda}) = E\, e_{\lambda}^4 = [\, \mu_4 (u) - 3\, \mu_2^2 (u)\,]\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}^4 + 3\, \mu_2^2\, (b_{\lambda}),$$

elde edilir. (2.10)

Teorem 1'in ispatı : b_{λ} 'nın üçüncü momenti,

$$\begin{aligned} \mu_3 (b_{\lambda}) &= E\, e_{\lambda}^3 = E\, [\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}\, u\, (t)\,]^3 \\ &= \Sigma_{tt't''} a_{\lambda t}\, a_{\lambda t'} a_{\lambda t''}\, E\, [\, u\, (t)\, u\, (t')\, u\, (t'')\,] \qquad (2.11) \\ &= \mu_3\, (u)\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}^3 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilmiştir. Burada, 2, 3 ve 4 varsayımları ile (2.4) ilişkisi kullanılmıştır.

b_λ 'nın dördüncü momenti

$$\mu_4 (b_\lambda) = E\, e_\lambda^4 = E\, [\, \Sigma_t\, a_{\lambda t}\, u\,(t)\,]^4$$

$$= \Sigma_{t \ldots t'''} a_{\lambda t}\, a_{\lambda t'} a_{\lambda t''}\, a_{\lambda t'''} \qquad (2.12)$$

$$E\, [\, u\,(t)\, u\,(t')\, u\,(t'')\, u\,(t''')\,]$$

şeklinde elde edilmiştir ve bunun terimleri ancak aşağıdaki durumlar için sıfır değildir.

Durumlar	*(2.12) nin alacağı durum*
$t = t' = t'' = t'''$	$\mu_4\ (u)\ \Sigma_t\ a_{\lambda t}^4$
$t = t'\ , t'' = t''', t \neq t''$	$\mu_2^2\ (u)\ [\Sigma_{tt''}\ a_{\lambda t}^2\ a_{\lambda t''}^2 - \Sigma_t\ a_{\lambda t}^4\ ]$
$t = t''\ , t' = t''', t \neq t'$	$\mu_2^2\ (u)\ [\Sigma_{tt'}\ a_{\lambda t}^2\ a_{\lambda t'}^2 - \Sigma_t\ a_{\lambda t}^4\ ]$
$t = t''', t' = t''\ , t \neq t'$	$\mu_2^2\ (u)\ [\Sigma_{tt'}\ a_{\lambda t}^2\ a_{\lambda t'}^2 - \Sigma_t\ a_{\lambda t}^4\ ]$

Bunlar ve (2.7) kullanılarak doğrudan doğruya (2.10) ilişkisi elde edilir.

3. UYGUNLUĞU BOZAN TERİM VE İLGİLİ *OLS* TAHMİN EDİCİLERİNİN İHTİMAL DAĞILIMLARININ PEARSON KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİ

(2.7) ve (2.9)'u kullanarak,

$$\beta_1 (b_\lambda) = \mu_2^{-3} (b_\lambda)\, \mu_3^2\, (b_\lambda)$$

$$= \beta_1 (u) \left(\Sigma_t\, a_{\lambda t}^2\right)^{-3} \left(\Sigma_t\, a_{\lambda t}^3\right)^2 \qquad (3.1)$$

elde ederiz. Burada,

$$\beta_1 (u) = \mu_2^{-3} (u)\, \mu_3^2\, (u). \qquad (3.2)$$

dur. Ayrıca, (2.10) ve (2.7) den

$$\beta_2 (b_\lambda) = \mu_2^{-2} (b_\lambda)\, \mu_4\, (b_\lambda)$$

$$= 3 + [\beta_2 (u) - 3] \left(\Sigma_t\, a^2_{\lambda t} \right)^{-2} \Sigma\, a^4_{\lambda t} \tag{3.3}$$

olduğunu biliyoruz. Burada

$$\beta_2 (u) = \mu_2^{-2} (u)\, \mu_4 (u). \tag{3.4}$$

dur.

Böylece aşağıdaki teorem, bütün λ lar için $(\lambda = 1, \ldots, \Lambda)$ β_t (u) ve β_1 (b_λ) arasındaki ilişkiyi gösterdiği gibi, β_2 (u) ve $\beta_2 (b_\lambda$ arasındaki ilişkiyi de verir.

Teorem 2 : β_1 (u) , β_2 (u) , β_1 (b_λ) ve β_2 (b_λ) Pearson katsayıları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarlar.

$$\beta_1 (b_\lambda) \leq \beta_1 (u) \quad \text{ve} \tag{3.5}$$

$$\beta_2 (b_\lambda) \leq \beta_2 (u) \tag{3.6}$$

(3.5) eşitsizliği

$$\left| \sqrt{\beta_1 (b_\lambda)} \right| \leq \left| \sqrt{B_1} (u) \right| \tag{3.7}$$

gerektirir ve pozitif ya da negatif olabilen b_λ 'nın ihtimal dağılımının çarpıklığı, uygunluğu bozan terimin dağılımının çarpıklığını hiçbir zaman aşamaz.

Bu eşitsizliklerden,

$$\begin{aligned} \beta_1 (b_\lambda) &\lesseqgtr 0 \text{ Yalnız ve yalnız } \beta_1 (u) \lesseqgtr 0 \\ \beta_2 (b_\lambda) &\lesseqgtr 3 \text{ Yalnız ve yalnız } \beta_2 (u) \lesseqgtr 3 \end{aligned} \tag{3.8}$$

yazılabilir.

Bu *OLS* tahmin edicilerinin ihtimal dağılımının, uygunluğu bozan terimin ihtimal dağılımına nazaran, normal dağılıma her zaman için daha yakın olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2'nin ispatı : Şayet aşağıdaki lemmayı ispatlarsak, teoremi kolayca ispatlayabiliriz.

Lemma : Şayet $a_1, \ldots\ldots, a_n$, n tane reel sayı ise,

$$\left(\Sigma_{i=1}^{n} \ a_i^3 \right)^2 \leq \left(\Sigma_{i=1}^{n} \ a_i^2 \right)^3 \tag{3.9}$$

dir ve eşitlik ancak bütün a_i'lerin eşit ya da sıfır olduğunda sağlanır.

Lemmanın ispatı : $(a_1^2, \ldots\ldots, a_n^2)$ ve $(a_1, \ldots., a_n)$ serileri göz önüne alınsın ve Cauchy-Schwarz [1, s. 42] eşitsizliği kullanılarak,

$$\left[\Sigma_i \ a_i^3 \right]^2 \leq \left[\Sigma_i \ a_i^4 \right] \left[\Sigma_i \ a_i^2 \right] \tag{3.10}$$

elde edilir. Yukarıda bütün tolpamlar $i = 1, \ldots, n$ dir.

Ayrıca,

$$\left[\Sigma_i \ a_i^2 \right]^3 - \left[\Sigma_i \ a_i^4 \right] \left[\Sigma_i \ a_i^2 \right]$$

$$= \left[\Sigma_i \ a_i^2 \right] \left[\left\{ \Sigma_i \ a_i^2 \right\}^2 - \Sigma_i \ a_i^4 \right] \geq 0 \tag{3.11}$$

olduğunu görmekteyiz. Nihayet (3.10) ve (3.11)'i bir araya getirerek (3.9)'daki sonucu elde etmekteyiz.

(3.1) ve (3.9) birlikte kullanılarak (3.5) elde edilir. Benzer şekilde, (3.6)'da (3.5) ve (3.1)'in birlikte kullanılmasıyla elde edilir.

REFERANS

[1] Rao, C. R., Linear Statistical Inference and its Applicationa, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1965.