REEL DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR TEORİSİNİN MÜFREDATI VE BİLİMLER ARASINDAKİ YERİ HAKKINDA

Ferhad H. NASİBOV
Kastamonu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Kastamonu.

Özet

Bu makalede Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi'nin kısa tarihçesi, müfredatı, bilimler arasındaki yeri açıklanarak Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi'nin öğretiminde var olan durum incelenmiştir. Makalede, Fonksiyonların Metrik ve Descriptive Teorileri, onların kendi aralarında var olan ilişkilerine de değinilmiştir. Ayrıca Fonksiyonlar Teorisi'nin; Klasik Matematik Analiz ve Fonksiyonel Analiz arasındaki yeri, ortak ve farklı taraflar da kısaca açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: reel değişkenli fonksiyonla teorisi

ON THE CONTENTS AND THE PLACE OF THE THEORY OF FUNCTIONS WITH REAL VARIABLES

Abstract

In this article a short history, subject, place and connection with other sciences (mathematical analysis, functional analysis, geometry, differential. equations, probability i.e.), are investigated. We also investigate the education teaching and learning of theory of the functions with real variables.

Keywords: theory of functions with reel variable

1. Giriş

Çağdaş matematiğin farklı bilim dalları arasında temel oluşturan birkaç alt dalının büyük önemi vardır. Bunlardan Matematik Analiz, Karmaşık Analiz, Reel Analiz, Fonksiyonel Analiz, Geometri (çeşitli geometriler), Cebir, … gibi dalların ne derecede gerekli ve faydalı olduğu iyi bilinmektedir. Bunların arasında da, kısaca "Reel Analiz" olarak adlandırılan aslında Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi olarak bilinmekte olan bilim dalının önemli bir yeri vardır.

Bu yazının amacı, Reel Analiz müfredatının bilimler arasındaki yeri hakkında kısaca bilgi vermek ve Türkiye'deki bazı üniversitelerde Reel Analiz öğretimine ve öğrenimine yeteri kadar yer verilmediğine, bir anlamda kendi değerine ve önemine uygun olmayan bir yerde tutulduğuna ve ayrıca bulunması gerekmeyen bir yerde bulunmasına dikkat çekmektir.

Günümüzde kümelerin ve fonksiyonların ölçüm teorisi, çeşitli integral kavramları ve onların özellikleri, Fourier serileri, Fourier dönüşümleri, ortogonal sistemler ve ortogonal seriler, Laplace dönüşümleri gibi çok önemli konulara ait teorilerin uygulanmadığı bir bilim dalı bulmak gerçekten çok zordur.

Teorik Fizik'te, Olasılık Teorisi'nde, Matematiksel İstatistik'te; Stieltjes integrali, küme fonksiyonları ve onların kullanımı, integral dönüşümlerinin kullanımı ve bu teorilerin yardımıyla sözü edilen dallarda tamamen yeni tip yaklaşımların mümkün olduğu da iyi bilinmektedir.

Fakat, saygın üniversitelerin bazılarında bile Reel Analiz'in hak ettiği değeri almamış olması, gereken yerde olmaması, neredeyse bir dönem, hatta seçmeli ders olarak, okutuluyor olması anlaşılabilecek bir durum değildir.

Normalde Reel Analiz'in iki dönemlik zorunlu bir ders olarak okutulması gerekirken tam tersine, bir dönem ve dört yıllık üniversite eğitiminin son yarıyılında görülüyor olmasını anlamak mümkün değildir. Fonksiyonel Analiz dersinin yüzde yüz Reel Analiz'e dayalı, onu taban alarak öğretilmesi gerekirken, yedinci yarıyılda fonksiyonel analiz, son yarıyıl olan sekizinci yarıyılda ise Reel Analiz'in okutulduğu görülmektedir. Bu iki dersin hayli yıldır bu şekilde okutulmasının normal olmadığını gören ve müfredatın bu şekilde olmasına karşı çıkmayan öğretim üyelerini de anlamak mümkün değildir. Onlar bu dersleri böylesine aksak bir planlamayla nasıl anlatıyorlar? İşlerin böyle yürümesini kimse hiçbir şekilde savunamaz.

Tüm izlenimlerim sonucunda şu kanıya vardım. Çoğu kez bu derse, dersin ait olduğu uzmanlık alanında, uzman olmayan öğretim üyeleri girmektedir. Oysa, Analiz, Diferansiyel Denklemler, İntegral Denklemler, Olasılık, Geometri gibi uzmanlık alanlarının seçilmesinin, o alanda bilim adamı olarak yetiştirilmiş olmanın anlamı nedir? Bir diş doktoru iç hastalıklarının tedavisinde ne derece başarılı olabilir!

Bu durum görmezden gelinemeyeceği için bu yazı yazılması amaçlanmıştır. Belki bu çalışma, Reel Analiz dersini programlayanların ve sınıflarda anlatanların konuyu gereğince değerlendirmelerine katkı sağlayabilir.

İşlerin bu yere gelmesinin çeşitli nedenleri olabilir. Uzman öğretim üyesi yokluğu veya yetersizliği bir sebep olabilirken, diğer önemli bir sebep de Reel Analiz müfredatının tam olarak bilinmemesidir. Bu nedenle, bu yazıda Reel Analiz'in uluslararası matematikçiler topluluğunca kabullenilmiş konuları da verilecektir. Aynı zamanda bu dersin tarihi kökenine kısaca değinilecek ve diğer bilimlerin arasındaki yeri nedir? sorusuna da açıklık getirilecektir.

2. Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin Gelişimi ve Müfredatı

29 Nisan 1927 tarihinde Rus matematikçileri 1. Kurultayında SSCB Bilimler Akademisi'nin akademik üyesi N. N. Luzin, akademinin ona vermiş olduğu görev gereğince "Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin Çağdaş Durumu" konulu bir Rapor hazırlamıştır. Bu Rapor 1933 yılında ayrıca bir broşür haline getirilerek yayınlanmıştır [5].

Bu kitapçığa, 1. Kurultay'dan sonraki 5 (beş) yıl içinde gelişmiş olan yenilikleri içeren 27 sayfalık bir "EK" de konulmuştur. Kitapçık 60 sayfa olarak yayınlanmıştır. Bunu kısaca Rapor diye isimlendirelim. N. N. Luzin, Raporu hazırlarken A. Lebesgue'nin [1] ve [2] kaynaklarını kullandığını da yazmaktadır.

"Rapor" un girişinde; "Geçen yüzyılın ortalarından başlayarak matematikçiler bütün güçlerini kendi çalışmalarında mutlak isabetliliğe yöneltmiş oldular" denilmektedir. Bu yaklaşım Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi (kısaca RDFT) gibi tek bir ad altında birleşmiş olan birçok çalışmanın ortaya çıkmasına neden oldu. Bu konuda çalışmaların çok sayıda olmasına, hatta bu çalışmalara özgü yayın organı olmasına rağmen, onların hepsi çok da büyük olmayan iddialar etrafında toplanabilir. Buna uygun olarak RDFT üç esas kısma ayrılabilir.

1. Fonksiyonların Metrik Teorisi;
2. Fonksiyonların Descriptive Teorisi;
3. Topoloji.

Görüldüğü gibi, akademik N. N. Luzin, Topoloji'nin RDFT'nin bir dalı olduğunu anlatıyor. Topoloji'nin serbest bir bilim dalı olarak hüviyet kazanmış olduğunu dikkate alarak, Metrik Teori ile Topoloji arasında mevcut olan ortak ve farklı noktaları anlatmaya girmeden, Topoloji'nin aynı zamanda Geometri'nin bir dalı olarak algılandığını da vurgulayalım..

Topoloji, homeomorfizm altında değişmeyen uzayları ele alır ve inceler. Homeomorfizm, bire-bir sürekli, tersi de var ve sürekli olan dönüşümlerdir. Bu, Geometri'de var olan çeşitli dönüşümlerden (hareket, benzerlik, paralel izdüşümü, merkezi izdüşümü, projektiv izdüşümü vs.) bir tanesidir.

Bu makalenin hazırlanışında ağırlıklı olarak [5], [6], [7], [8] ve [9], kaynaklarından yararlanılmıştır. Makalede, önce Metrik Teori'ye sonra da Descriptive Teori'ye değinilecektir.

Matematik tarihçileri RDFT'nin tüm gelişim tarihini üç aşamaya ayırırlar.

1. 1867 yılında B. Riemann'ın (1826-1866) "Fonksiyonların Trigonometrik Seriler Vasıtasıyla Gösterimi" adlı kitabının yayınlanmasından [11], 1895-1902 yılları arasında E. Borel (1871-1956), R. L. Baire (1874-1932) ve A. Lebesgue'nin (1875-1941) ilk çalışmalarına kadar olan süre.
2. E. Borel ve A. Lebesgue'nin bu çalışmalarından S. Banach'ın (1892-1945) "Lineer Operatörler Teorisi" ([12], 1947), S. Kaczmarz (1895-?) ve H. Steinhaus'un (1887-1902) "Ortogonal Seriler Teorisi" ([14], 935), S. Saks'ın (1897-1942) "İntegral Teorisi" ([13], 1935) kitaplarının yayınlanmasına (XX. yüzyılın 30'lu yılları) kadar olan süre.
3. XX. yüzyılın 30'lu yıllarından sonraki süre.

Birinci periyot şöyle karakterize edilebilir: Bu zaman zarfında Klasik Analiz alanındaki çalışmalar Fonksiyonlar Teorisi alanındaki çalışmalarla karışık bir şekilde (yani, ayrım yapılmadan) yapılıyordu. Bu dönemde tanınmış bilim adamları olarak, B. Riemann, G. Darboux (1842-1917), M. Cantor (1829-?), G. Cantor (1845-1918), U. Dini (1845-1918)'nin isimleri verilebilir.

Bu bilim adamlarının esas problemi: Riemann integralinin tanımlanması ve özelliklerinin araştırılması, çeşitli türev kavramlarının tanımlanması, genel trigonometrik serilerin ve diğer ortogonal serilerin araştırılmasına başlamak, noktasal kümelerin ölçüm teorisinin işlenip hazırlanması ve bunlarla ilgili problemlerin incelenmesi olmuştur.

İkinci periyot, RDFT'nin $n-$boyutlu Öklid uzayında noktasal kümeler teorisine dayanarak, özel bir matematiksel teori olarak gelişmesi periyodu olarak isimlendirilebilir.

Burada esas sonuçlar: A. Lebesgue, A. P. Denjoy (1884-?), O. Perron (1880-?), A. Ya. Khinchin (1894-1959) integrallerin tanımlanması ve incelenmesi, özel olarak da Stieltjes (1856-1894) tipi integrallerin tanımlanması ve araştırılması, diferansiyelleme alanındaki araştırmaların daha da derinleştirilmesi, serilerin toplanabilirlik yöntemlerinin ortaya çıkarılarak hazırlanması, küme fonksiyonlarının öğrenilmesi gibi konulara ait olmuştur.

Üçüncü periyot ise esasen Fonksiyonlar Teorisi'nin fonksiyonel analiz ile sıkı ilişkide olması şeklinde karakterize edilebilir.

Belirtelim ki bu şekilde aşamalara ayırma görecelidir, başka yaklaşımlar da olabilir. En önemlisi, 30'lu yıllardan sonra 1. ve 2. periyotlarda esas araştırma objesi olan konuların unutulduğu düşünülmemelidir. Tam tersine, yalnızca 30'lu yıllarda değil, hatta günümüzde de sözü edilen konular geniş boyutta çalışma objesi olarak karşımızda bulunmaktadır. XX. yüzyılın sonlarına doğru dünyanın çeşitli bilim merkezlerinde çalışmalar devam ettirilmekte, yeni problemlerin ortaya çıkması ile yeni yöntemler, yaklaşımlar ortaya konulmaktadır. Örneğin Fonksiyonların Constructive Teorisi, iktisadi bilimlerde bir devrim oluşturan matematiksel (lineer, dinamik, stokastik, …) programlama, simpleks yöntemler, … bu zaman zarfında ortaya çıkmış ve gelişmiş teorilerdir.

Unutulmamalıdır ki, bütün matematik teoriler birbirleri ile sıkı ve mantıki bir bağıntı ile bağlıdırlar. Biri diğerlerinin gelişiminde, yenilenmesinde önemli derecede kullanılır. RDFT ile ilgili de pek çok çalışma, pek çok yaklaşım vardır. Onların hepsinin incelenmesi, RDFT'nin müfredatını açıklamak için bir temel teşkil eder. Bu hususta en son yazılmış kitaplardan biri olan ve dünyanın farklı dillerine tercüme edilerek geniş bir okuyucu kitlesine ulaşan I. P. Natanson'un (1906-1964) [6] Kitabı ve [9]'da verilen açıklamalar dikkate alınırsa, RDFT'nin müfredatı aşağıdaki şekilde sergilenebilir:

1. Kümelerin (bir ve n boyutlu) yapı ve ölçüm teorisi
2. Fonksiyonların yapı ve ölçüm teorisi
3. Lebesgue integrali
4. Toplanabilir fonksiyonlar. Toplanabilir fonksiyonların sınıfları
5. Sonlu salınımlı ve mutlak sürekli fonksiyonlar
6. Çeşitli türev kavramları ve uygulamaları
7. Stieltjes integralleri
8. Seriler teorisi, ıraksak seriler. Toplanabilirlik problemleri
9. Fourier serileri ve Fourier dönüşümleri
10. Fonksiyonların Constructive Teorisi
11. Singüler integraller ve yaklaşım teorisinde uygulamaları
12. Ortogonal sistemler ve ortogonal seriler

13. Fonksiyonların Descriptive Teorisi
14. Transfinit sayılar. Fonksiyonların sınıflandırılması
15. İntegral kavramının çeşitli genelleşmeleri (Perron, Denjoy, Khinçin, Kolmogorov vb. anlamda integraller)

Burada sıralanmakta olan konuların bazıları günümüzde serbest ders olarak okutulabilir. Örneğin, Seriler Teorisi ve Fonksiyonların Constructive Teorisi gibi. Bu konuların çağımızda çok gelişmiş kapsamlı teoriler haline gelmiş olduğu unutulmamalıdır. Bu konular yalnızca lisans öğrencileri için değil, yüksek lisans öğrencileri için de çok faydalı ve gerekli konulardır. Diferensiyel ve integral denklemler (ve benzeri) teorilerinde yaklaşık çözümler, bu çözümlerin kesin çözümlere yaklaşımı gibi problemlere Constructive Teori'nin, yaklaşım teorisinin yardımı, kullanımı olmadan netlik kazandırılması mümkün değildir.

3. Fonksiyonlar Teorisi ve Klasik Analiz

RDFT ve kümeler teorisi, birlikte meydana gelmiş ve her zaman birbiriyle sıkı ilişki içinde olmuştur. RDFT' nin önemli konularından biri fonksiyonlar ve fonksiyon sınıfları hakkında olan çalışmalardır. Ölçülebilir fonksiyonlar, toplanabilir fonksiyonlar, monoton fonksiyonlar, sürekli ve sürekli olmayan fonksiyonlar, periyodik fonksiyonlar, transandant fonksiyonlar, türevlenebilir ve türevlenebilir olmayan fonksiyonlar, analitik ve quasi-qnalitik fonksiyonlar bu tür fonksiyon sınıfı örnekleridir.

Fonksiyonlar Teorisi'nin çok önemli bölümlerinden biride, aslında serbest bir teori haline gelmiş seriler (sayısal, fonksiyonel seriler, Fourier serileri, ortogonal seriler, ıraksak seriler ve toplanabilirlik) teorisidir.

Fonksiyonlar Teorisi'nin daha çok önem taşıyan, geniş uygulama alanları olan dallarından birisi de Fonksiyonların Constructive Teorisi'dir. Bu kavram, bu konuda çok önemli çalışmaları ve rolü olan S. N. Bernstein'e (1880-1968) aittir. Bu teori de, gerçekte XX. yüzyılda gelişmiş ve mükemmel bir teori haline gelmiştir. Burada esas hizmet P. L. Tchebishev (1821-1894), K. Weierstrass (1815-1897) ve S. N. Bernstein' e aittir. Constructive Teori'nin temelini atan bu matematikçiler, onun sistemli ve mantıklı bir teori haline gelmesi için hayatları boyu çalışmışlardır.

N. Bor tarafından ortaya atılmış olan Sanki-Periyodik Fonksiyonlar, S. N. Bernstein tarafından ortaya konulan Quasi-Analitik Fonksiyonlar Teorisi de Fonksiyonlar Teorisi'nin önemli dallarındandır.

RDFT'nin müfredatını oluşturan bu konuların bir kısmı Klasik Matematik Analiz'de de esas konular olmuştur. Çeşitli fonksiyonların araştırılması, seriler ve onların yakınsaklık problemleri, türev alma, integral alma işlemleri, çeşitli limit alma işlemleri Klasik Analiz'in de esas konularıdır. Fakat RDFT' de bütün bunlar, daha yüksek seviyede ele alınmaktadır.

Mükemmel ve gelişmiş serbest teoriler haline gelmiş olan Diferansiyel Denklemler ve Karmaşık Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Klasik Matematik Analiz'den çıkarılırsa, RDFT'nin geliştirilmiş, derinleştirilmiş ve genelleştirilmiş Matematik Analiz olduğu görülür. Bu açıdan C. Jordan' ın (1838-1922) Analiz Kursu [15] kitabının ikinci baskısı çok önemlidir. Bu kitabı hem Matematik Analiz alanında, hem de aynı derecede

Fonksiyonlar Teorisi alanında bir baş eser olarak adlandırmak mümkündür. Aynı sözler Vallee Poussin'in (1866-1962) "Sonsuz Küçükler Analizi ([16], 1933)" adlı kitabı içinde söylenebilir. Bu iki kitap, analizin RDFT ile ilişkisini çok açık bir şekilde göstermektedir.

Matematik tarihi açısından ilginç olan, U. Dini (1845-1918)'nin "Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin Esasları" kitabıdır [17]. Bu kitapla ilk kez 1878 yılında Fonksiyonlar Teorisi serbest bir bilim dalı olarak ayrılmış ve onun müfredatı, tarihçilerin ifadesine göre, çok doğru belirlenmiştir. Üstelik bu kitapta trigonometrik seriler konusu ele alınmadığı halde, 1907 yılında da E. W. Hobson' un (1856-1933) "Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi ve Fourier Serileri Teorisi" adlı kitabı çıkmıştır [18]. Bu kitapta da müfredat, trigonometrik seriler konusu hariç tutulmak kaydıyla, U. Dini'de olduğu gibidir.

O zamandan günümüze değin matematikçiler bu müfredatı kabul etmişlerdir. Böylece, klasik matematik analiz ile RDFT sıkı ilişkidedir ve birçok ortak noktaları vardır. Buna göre, şu soruları akla getirmek gerekir.

Bu iki bilim dalı gerçekten bir (tek) bilim dalı mıdır, yoksa farklı birer bilim dalları mıdır? Onları farklandıran bir şeyler var mıdır?

Hemen akla gelen, Matematik Analiz'de teorik–kümesel yaklaşımın ve bu yaklaşımın fonksiyonların araştırılmasına uygulanmasının açık şekilde olmamasıdır.

Analiz'in temel objesi olan fonksiyon, Analiz'de adeta reel eksen üzerindeki bir parçada, düzlemin veya uzayın bir kısmında (bölümünde) tanımlanmıştır.

Fonksiyonlar Teorisi'nde ise fonksiyonlar her hangi bir kümede tanımlanır. Bu kümeler ise çok karmaşık bir yapıya sahip olabilir ve çok şey de bu yapıya bağlıdır. Ona göre ilk önce kümelerin gereken teorisini oluşturmak, sonra bu teoriye dayanarak fonksiyonlar üzerinde yapılacak işlemleri incelemek ve araştırmak gerekir.

Örneğin, Riemann anlamında integral konusunu ele alalım. Bu integral, küme teorisi ile ilişkili olmayan bir şekilde, bir integral toplamının limiti olarak tanımlanır. Bu tanım esas alınarak Riemann anlamında integrallenebilecek fonksiyonların sınıflarını belirlemek mümkün olmaz. Şöyle ki, Klasik Analiz'de verilen bir fonksiyonun integrallenebilir olması veya olmaması problemini çözmek için iki yol vardır.

1. Söz konusu integrali sadece hesaplamak gerekir.
2. İntegrali söz konusu olan fonksiyonun, kabul edilmiş integral kavramına göre integrallenebilir fonksiyonlar sınıfına ait olması ispatlanır, fakat bu yöntemin kendisi de kümeler teorisine dayalıdır.

Yalnızca, kümelerin ölçüm teorisi oluşturulduktan sonra bu problemi çözmek mümkün olmuştur (meşhur Baire Teoremi). Bu bağımlılığı 1889 yılında R. Baire açığa çıkarmış olsa da, onu daha önceden de anlamış olanlar vardır. H. Hankel'in 1870, H. Smith'in 1875, U. Dini'nin 1878 yılında yayınlanan eserlerinde bu fikre rastlanmaktadır.

Kümeyi oluşturan noktalarda herhangi bir yük (kütle, elektrik yükü, herhangi başka yükler) de yerleşmiş olabilir. Üstelik de bu yükler o noktalarda farklı yoğunlukla dağılmış olabilir. Bu ve buna benzer problemlerin çözümü Stieltjes integralini gündeme getirmiştir. Matematik Analiz ile RDFT arasındaki bir başka farklı nokta, hesaplama işlemleri ile ilgilidir. Matematik Analiz'de hesaplamalara (limit, türev, integral) daha çok dikkat edilirken, RDFT'de teorik tipli çalışmalara daha çok ağırlık verilmektedir. RDFT'de çoğunlukla bir hedefe yönelik problemler araştırılır. Bunlar da sonuçta bir teorem veya formül şeklinde ifade olunur. Burada "hesaplamalı" sözcüğü yerini çoğunlukla "ispatlamalı" sözcüğüne bırakır.

Bu tarz yaklaşım, yalnızca RDFT'ye ait değildir ve genelde XVII. -XVIII. yüzyıllar matematiği ile XIX.-XX. yüzyıllar matematiği arasında da hissedilmektedir. Hesaplama ağırlıklı çalışmalar, gittikçe daha çok teorik çalışmalar, formül-teoremler cinsinden çalışmalara dönüşmektedir.

Klasik Matematik Analiz ile RDFT arasında mevcut olan farklılıklardan bir tanesi de gerek Klasik Matematik Analiz'in, gerekse RDFT' nin başlıca işlemleri olan türevleme ve integralleme işlemlerinin nasıl anlatılacağında ve hangi sıralama ile verileceğindedir.

Klasik Matematik Analiz'de önce diferansiyel hesap, sonra integral hesap anlatılırken, RDFT' de tam tersine bir yöntem uygulanır. Önce integral kavramı tanımlanır, özellikleri öğretilir, bundan sonra diferansiyelleme kavramları tanımlanır ve bunlar birbirlerine bağlı olmayan işlemler şeklinde sunulur ve buna da belli derecede bir özen gösterilir. Bunların dışında, klasik matematik analizde yalnızca bir türev kavramı varken, RDFT'de çeşitli türev kavramları tanımlanmakta ve uygulanmaktadır.

Klasik Matematik Analiz ve RDFT arasında mevcut olan farklı noktalardan bir tanesi de seri konusu ile ilgilidir. Analizde yalnızca serilerin yakınsaklık-ıraksaklık problemleri incelenmesine karşın, RDFT' de esaslı bir şekilde serilerin toplanabilirlik problemleri öne çıkar. Iraksak serilerin varlığı önceden de bilinmekte idi. Fakat, yalnızca XIX. yüzyılın sonlarından başlayarak bu konu matematikçilerin dikkat merkezi haline geldi ve birçok matematikçi bu konuyla ilgili çalışmalar yapmaya başladı. G. H. Hardi' nin (1877-1947) "Iraksak Seriler ([19], 1949)" ve R. G. Cook' un "Sonsuz Matrisler ve Diziler Uzayı ([20], 1950)" adlı kitapları bu konuya olan ilginin belirgin kanıtları olabilir.

Klasik matematik analiz ile RDFT arasında pek önemli olmayan başka farklılıklar da bulunabilir, fakat klasik matematik analiz ve RDFT arasında mevcut ilişkileri anlayabilmek için burada verilenler de yeterlidir.

Görüldüğü üzere, Klasik Analiz ve RDFT arasında hem müfredat hem de yöntem açısından farklılıklar vardır. Aynı zamanda onların arasında ciddi bir sınır çizmek de imkansızdır. Birinin esas bölümleri diğerinin de önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Yalnızca, RDFT'de bu kavramlar daha isabetli, daha zengin, daha geniş kapsamlı, daha yüksek soyutluluk derecesindedir. RDFT'de teorik çalışmalara daha çok ağırlık verilmektedir. Fonksiyonlar Teorisi, Klasik Analiz'in daha yeni, daha yüksek, daha çok gelişmiş, daha kapsamlı, daha soyut bir derecesidir.

4. Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz

Fonksiyonlar Teorisi ile Klasik Matematik Analiz arasındaki ilişkiye benzer bir ilişki RDFT ile Fonksiyonel Analiz arasında da vardır.

Fonksiyonlar Teorisi'nde esas araştırma objesi fonksiyonlar olduğu halde Fonksiyonel Analiz'in araştırma objesi fonksiyon kavramının genelleşmişi olan fonksiyoneller ve operatörlerdir. Fonksiyonel Analiz'de çeşitli fonksiyonel ve operatör türleri (lineer, adjoint, analitik) esas araştırma konularıdır.

RDFT'de önce sonlu boyutlu Öklid uzaylarında noktasal kümeler, onlarla ilişkili problemler araştırılırken, Fonksiyonel Analiz'de metrik, normlu, topolojik, Banach, Hilbert gibi sonsuz boyutlu uzaylarda bulunan kümeler araştırılır. Buradan, RDFT ile Fonksiyonel Analiz arasında önemli farklılıklar ortaya çıkar:

Fonksiyonlar Teorisi'nde Öklid uzayları araştırılmaz, onların özellikleri başka kaynaklardan, örneğin geometriden, bilindiği ve önceden verilmiş olduğu varsayılır. Fonksiyonel Analiz de ise uzayların kendisinin araştırılması güncel problem olarak kalmaktadır. Bunun yanı sıra, bu problemin büyük bir kısmı topolojide incelenmektedir. Fonksiyonel ve operatörlerin tanım kümesi olan böylesine uzayların önceden öğrenilmesi gerekliliğini daha önceden de anlamış kişiler vardır ve onlardan J. H. Hadamard (1865-1963) öncül olarak bu fikri 1912 yılında basılan "Le Calcul Functionel [21]" adlı kitabında geniş bir şekilde anlatmıştır.

Fonksiyonel Analizde zorluklar, adi anlamda fonksiyon kümelerinde tanımlanmış fonksiyonel ve operatörlerden daha genel argümanlara sahip olan fonksiyonel ve operatörlere geçiş yapıldığında ortaya çıkmaktadır.

Hadamard'ın bu fikrini 1928 yılında M. Frechet (1878-1973) daha da geliştirmiş ve soyut kümelerin öğrenilmesi–incelenmesi gerektiğini açıklamıştır.

Diferansiyelleme ve integralleme işlemleri Fonksiyonel Analiz'de fonksiyonel ve operatörler üzerinde yapılacak benzeri işlemlere dönüşür. Fonksiyonel Analizde bu iki işlemin özellikleri onların Fonksiyonlar Teorisinde aralarında bulunan ilişkiyi daha açık bir şekilde gösterir. Onların birbirlerine bağlı olmadan öğrenilmesi ve türev kavramının integral kavramı ile tanımlanması fikri V.Volterra (1860-1940) tarafından 1887 yıllarında Fonksiyonel Analiz'e ait ilk çalışmalarda ifade edilmiştir.

Fonksiyon serileri alanındaki çalışmalara paralel olarak fonksiyoneller ve operatörler serileri üzerinde çalışmalar da vardır. Fakat Fonksiyonel Analiz'de bu çalışmalar Fonksiyonlar Teorisinde var olan genişliğe ve derinliğe henüz ulaşmamış durumdadır. Bunun da yanı sıra, Fonksiyonel Analiz'de limit kavramına daha çok dikkat edilir. Bu da, Fonksiyonel Analiz'de araştırma objesinin daha geniş ve çeşitli olmasından kaynaklanır ve bu doğal bir şeydir (Güçlü yakınsaklık, zayıf yakınsaklık, noktasal ve düzgün yakınsaklık, metrik'e göre yakınsaklık).

Ayrıca şunu söylemekte de fayda vardır, Fonksiyonel Analiz'in ilk basamakları RDFT de değil, karmaşık değişkenli Fonksiyonlar Teorisi modelinde olmuştur. Bu da doğal olarak şöyle açıklanabilir. O zamanlarda, Borel, Baire, Lebesgue'nin düşünceleri henüz yok idi. Fonksiyonel Analizin temelini atanlardan V. Volterra ve S. Pincherle (1853-1936) çalışmalarına on yıl önce başlamışlardı.

Fakat, RDFT düzenli bir şekil aldıktan sonra M. Frechet (1878-1973) bu teoriyi esas alarak Fonksiyonel Analiz binasını yeniden yapmaya başlamıştır. Bundan sonra Fonksiyonel Analiz, M. Frechet'in modeli üzerinde gelişmeye başlamış (son yıllarda Fonksiyonel Analiz'de V. Volterra ve S. Pincherle modeline dönme çabaları görülmektedir) ve bu güne kadar karşılıklı etkileşimle her ikisi birlikte gelişmektedir.

Özetle, Fonksiyonlar Teorisi'ne Klasik Matematik Analiz'in genelleşmişi olarak bakıldığı gibi, Fonksiyonel Analiz'e de genelleşmiş RDFT olarak bakılabilir. Fonksiyonel Analiz daha soyut bir şekilde, sonsuz boyutlu kümelere taşınmış Klasik Analiz'dir demek mümkündür. J. Dieudonne (1906-?) tarafından 1960'ta yazılmış olan "Çağdaş Analizin Esasları [22]", G. Y. Shilov (1917-1975) tarafından 1969-1970 yıllarında yayınlanmış olan "Matematik Analiz, 1.–3.ciltler [23]" adlı kitaplar bu düşünceyi kanıtlayan kaynaklardır.

5. Fonksiyonlar Teorisinin Diğer Matematik Alanları ile İlişkisi

1. Kümeler Teorisi

Bu teorinin RDFT ile ilişkisinden yukarıda söz edildi. Riemann anlamında integralin birçok problemi çözmediği bilinmektedir. Yalnızca kümeler teorisinin gereken şekilde gelişimi, birçok problemin çözüme kavuşmasını sağlamış oldu. Örneğin, bir fonksiyonun Riemann anlamında integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli şartlar (Baire Teoremi), trigonometrik seriler teorisinde açılımın bir tek olması, serilerin terim terime türevlenebilir olması, integrallenebilir olması, Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların belirlenmesi vs. gibi problemler, noktasal kümelerin yapı ve ölçüm teorileri, çok önemli araçlardır.

2. Topoloji

Topoloji, RDFT'nin bir dalı olarak ortaya çıktı. Günümüzde ise, Topoloji yeteri kadar gelişmiş, kapsamlı bir bilim dalı olarak serbest bir matematik teorisi niteliğindedir. Burada limit kavramının, komşuluk kavramının özel şekilde tanımlanabilmesi, birçok neticelerin Fonksiyonel Analiz dilinde ifade olunmasını sağlamaktadır.

Topoloji alanında çalışan birçok matematikçi vardır. Bunlara birer örnek olarak P.S.Aleksandrov (1896-?), C.Kuratowsky (1896-?), N.Bourbaki vd. gösterilebilir.

3. Olasılık Teorisi

D.Hilbert, 1900 yılında Paris'te düzenlenen II. Uluslararası kongrede bir müfredat konuşması yapmıştır. Bu konuşmada Hilbert 23 tane problem sıralamış ve bununla matematiğin gelişim yönünü belirlemiştir. Sonradan Moskova'da "Nauka" neşriyatı tarafından bu problemler bir kitap halinde, "Hilbert Problemleri" adı altında yayınlanmıştır. Burada sıralanmış olan problemlerden 6. Problem Olasılık Teorisi hakkındadır. Hilbert burada Olasılık Teorisi'ni bir fizik bilim dalı olarak tanımlamış ve onun geliştirilmesini istemiştir. Bu kitapta B. V. Gnedenko Hilbert'in "Altıncı Problemi Hakkında" adlı bir makale yazmış ve yayınlamıştır. Bu makalede, " Olasılık Teorisi'nin çağdaş gelişimi önemli bir şekilde kümeler ve Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi'nin iddialarının etkisi altındadır. Yalnızca bu iddialar Olasılık Teorisi'ni bir matematiksel dal olarak tanımaya, kendi kavramlar sistemini belirlemeye imkan sağlamıştır" denilmektedir.

Ayrıca, belirtelim ki, bu hususta esas hizmet A. N. Kolmogorov'a aittir. A. N. Kolmogorov Olasılık Teorisi'ne yeni bir yaklaşım uygulamış, onu fonksiyonların metrik teorisi ile ilişkilendirmiştir. A. N. Kolmogorov tarafından olasılık teorisine temel oluşturan aksiyomlar verilmiş ve bu aksiyomlar sonradan herkes tarafından kabul görmüştür. Bunu esas alarak Olasılık Teorisi, düzenli ve sistemli bir hale gelebilmiştir. Çeşitli dağılım kanunları, büyük sayılar kuralını ifade eden merkezi limit teoremleri vb. fonksiyonların metrik teorisi kavramlarına dayalı bir şekilde ifade olunmaktadır. Olasılık teorisinde kullanılmakta olan önemli araçlar arasında Stieltjes integralleri bütün dağılım fonksiyonlarının ifade olunmasına olanak vermektedir.

4. Diğer Bilim Dalları

Bunlara örnek olarak, Karmaşık Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Varyasyon Hesap, Adi ve Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler Teorisi, İntegral Denklemler Teorisi, Nümerik Analiz, Sayılar Teorisi, Geometri, Teorik Fizik, Mekanik, Sibernetik vb. gösterilebilir.

Fonksiyonlar Teorisi'nin bir dalı olarak esasen XX. yüzyılda gelişmiş ve sistemli, düzenli bir teori haline gelmiş Fonksiyonların Constructive Teorisi hakkında yukarıda söz edilmiştir. Burada ekleyelim ki, matematikte uzun zamanlar çözülemeyen problemler bu teorinin uygulanması sonucunda çözüme kavuşabilmiştir. Yaklaşık çözümler, hataların değerlendirilmesi, deney sonuçlarının işlenmesi, antenler teorisi, iletişim teorisi uygulama alanları arasında yer almaktadırlar. Trigonometrik ve ortogonal serilerin yakınsaklık problemleri, yakınsaklık hızının belirlenmesi gibi problemler de Constructive Teori'nin esas konularından olan en iyi yaklaşımlar teorisi ilkelerine ve neticelerine dayanarak incelenebilmektedir.

Kümeler ve Fonksiyonlar Teorisi'nin esas problemleri üzerindeki tartışmalar, XX. yüzyılda matematiğin esaslandırılması ile ilişkili felsefi ve genel matematiksel tartışmalara neden olmuş ve sonuçta bunların hepsi genelde matematiğin, özel de Fonksiyonlar Teorisi'nin mükemmel, esaslı, mantıklı, geniş ve gelişmiş, kapsamlı bir bilim dalı olarak şekillenmesine neden olmuş ve böylece matematiğin soyut bir bilim dalı olmasının yanı sıra, onun geniş uygulama alanlarına sahip olmasını da sağlamıştır.

6. Fonksiyonlar Teorisi**nin XX. Yüzyılın Sonlarında Gelişimi Hakkında Notlar**

XX. yüzyılın 20'li 30'lu yıllarında Fonksiyonlar Teorisi üzere çalışmaların merkezi Moskova'ya geçmiş oldu. Moskova da akademik N. N. Luzin'in (1883-1950) başkanlığı ve katkısıyla Fonksiyonlar Teorisi üzerine güçlü bir okul kurulur. 1914 yılından itibaren Fonksiyonlar Teorisi konularını tam olarak benimseyen ve anlamış olan N. N. Luzin 1915 yılında "İntegral ve Trigonometrik Seri" adlı yüksek lisans tezini (Master) yazmış ve büyük başarıyla savunmuştur. Savunma jürisi onun tezini son derece önemli bulmuş ve ona Master unvanı yerine direkt olarak Pür Matematik Doktoru unvanını vermiştir.

N.N. Luzin'i ilgilendiren esas problem, kümeler teorisinin problemleri olmuştur. Fakat bu aşamada yapmış olduğu çalışmalarla N.N.Luzin tamamen yeni bir teorinin Fonksiyonların Descriptive Teorisi'nin temelini koymuş oldu. N.N.Luzin ömrünün son 20 yılında Descriptive Teori üzerine çalışmalarına devam etmiş, aynı zamanda diferansiyel geometri ve uygulamalı matematiğin birçok konusunda önemli sonuçlar elde etmiştir.

N. N. Luzin ve onun etkisi altında olan İ. İ. Privalov (1881-1941) ve V. V. Stepanov'un (1889-1950) yanı sıra kendisinin ilk öğrencileri olan M. A. Suslin (1894-1919), A. Ya. Khinçin (1894-1959), P. S. Urison (1898-1924), P. S. Aleksandrov (1896-?), D. Y. Menşov (1892-?) bu okulun öncüleri idiler. Daha sonra bu okula N. K. Bari (1901-1961), A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentgev (1900-?), P. S. Novikov (1901-?), L. V. Keldış (1904-?), L. S. Pontryagin (1908-?) gibi yeni güçler de eklendi.

Fonksiyonlar Teorisi üzerine Moskova okulunda aşağıdaki konularda önemli sonuçlar elde edilmiştir. İntegraller Teorisi, Trigonometrik ve Ortogonal Seriler Teorisi, Reel ve Karmaşık Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, Monogenlik Teorisi, Karmaşık Değişkenli Fonksiyonların Geometrik Teorisi, Quasi-Konform Yansıma Teorisi.

G. Bor (1887-1951) anlamında Sanki-Periyodik Fonksiyonlar Teorisi üzerine de çok çalışmalar yapılmışdı. Analitik Kümeler Teorisi'nde M.A.Suslin, Projektiv Kümeler Teorisi'nde N.N.Luzin, Topoloji'de P.S.Urison, P.S.Aleksandrov, A.N.Kolmogorov, A.N.Tikhonov (1906-?) vb. çok önemli sonuçlara varmışlardı. Söz konusu süreç içerisinde M.A.Lavrentyev Analitik Fonksiyonlar Teorisi üzerine çalışmalara başlamıştır. Diğer genç matematikçilerin yanında, daha sonra SSCB Bilimler Akademisi Başkanı olan M.V.Keldış (1911-?) da bu çalışmalara katılmıştır.

30'lu yıllarda Moskova başka yeni bir teori üzerine çalışmaların merkezine dönüştü. Akademik S.N.Bernştein ve onun öğrencileri Fonksiyonların Constructive Teorisi üzerine çok önemli çalışmalar yaptılar ve dünyada bu teorinin öncülleri olarak çalışmalarını devam ettirdiler.

Daha o zamanlar, Moskova matematik okulunun etkisi altında Bakü, Tiflis, Taşkent gibi kentlerde de bilim merkezleri oluşur ve SSCB Bilimler Akademisi'nin şubeleri açılır. O tarihlerde, Moskova matematikçileri arasında yetişmiş olan İ. İ. İbrahimov Azerbaycan'a Fonksiyonlar Teorisi konusunu getirmiş, Bakü'de Fonksiyonların Constructive Teorisi üzere bir okul kurmuştur. İ. İ. İbrahimov, ömrünün sonuna kadar bu okula başkanlık yapmış, bu konularda çalışan 100'den fazla bilim adamı yetiştirmiştir. Ayrıca belirtmek gerekir ki, matematik dalında doktora unvanı almış ilk Azerbaycanlı (1939 yılında) da İ. İ. İbrahimov olmuştur.

Gerek Bakü'de, gerekse Moskova'daki bilim merkezlerinde görülen başarıların itici gücünün esas etkeni bu merkezlerde mevcut olan çalışma ortamı olmuştur. Bu merkezler; bütün bilim dallarında olduğu gibi ünlü matematikçilerin önderliğinde daimi faaliyette olan **bilimsel seminerleriyle** gerek matematikçilerin gerekse de matematiğin gelişiminde son derece faydalı, gerekli müesseseler olmuşlar ve olmaya da devam etmektedirler.

Böyle seminerlere katılmak, orada sunulan raporları dinlemek gençlere, aynı zamanda orada bulunan herkese çok önemli etki yapar, güncel matematiksel hayatla uyum sağlayabilmek, çalışmalarını amaca yönelik yürütmek, edinilmiş sonuçların tartışmasını yapmak gibi eşsiz yararlar sağlamaktadır.

Moskova matematikçileri için önemli özelliklerden bir tanesi de, Fonksiyonlar Teorisi üzerine edinmiş oldukları sonuçları matematiğin diğer dallarında, fizikte, mekanikte vb. alanlarda uygulamaya çaba göstermeleridir. N. N. Luzin'in doğrudan etkisi altında olan Polonyalı matematikçi V. Serpinsky ve onun öğrencileri K. Kuratovsky (1896-?), S. Mazurkeviç (1896-1945), A. Zygmund Fonksiyonlar Teorisi ve topoloji alanlarında önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Finlandiyalı matematikçiler R.Nevanlinna (1895-?), L.Ahlfors (1908-?) tarafından Tam ve Meromorf Fonksiyonlar Teorisinde, Alman matematikçiler tarafından ünivalent Fonksiyonlar Teorisinde; Çok Değerli Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri üzerine, Fransız P.Montel (1876-?) tarafından fonksiyonların normal aileleri konulu çalışmalar dünya matematiğine çok önemli katkılar olarak değerlendirilebilir.

XX. yüzyılın sonlarına doğru S. L. Sobolev, S. M. Nikolsky ve onların ardışılları tarafından Fonksiyonlar Teorisi'nde yepyeni bir dal; "Dahil Olma Teorisi' olarak adlandırılan bir dal oluşturuldu ve geliştirildi. Bu konuda elde edilmiş olan sonuçlar, örneğin, matematiksel fizikte enine boyuna uygulanmış ve böyle de devam etmektedir.

7. Fonksiyonların Descriptive Teorisi Hakkında Kısa Notlar

Kısaca Fonksiyonları Descriptive Teorisi üzerine de değinelim. Artık anlaşıldığı gibi metrik teori, kümeler teorisini taban alarak düzenlenmiştir. Bu teori içerisinde kümelerde elemanların sırası hiçbir önem taşımaz. Descriptive Teori'de ise kümelerde üyelerin sırası çok önemlidir. Metrik teoride $A=\{a,b,c\}$ ve $B=\{b,c,a\}$ } aynı kümeler iken, Descriptive Teori'de bunlar farklı kümelerdir.

Dolayısıyla, Descriptive Teori'de sıralı kümeler, tamamen sıralı kümeler, bunlarla ilişkili işlemler söz konusudur.

Metrik Teoride kümelerin gücü kavramı denklik kavramına dayalı olarak tanımlanır. Descriptive Teori de ise **benzerlik** kavramı, onun da yardımı ile **sıra tipi** tanımlanmaktadır. Tamamen sıralı kümelerin sıra tipine **sıra sayısı** denilir. Sonsuz gücü olan sıra sayısına **transfinit** sayı denilir. Tamamen sıralı kümenin gücüne **alef** denilir. Bu tanımlar esas alınarak, kümeler hakkında çeşitli teoremler ispatlanır.

1927-1933 yıllarında Descriptive Teori üzerine önemli sonuçlar alınmış olmasına karşın önemli tartışmalar gündeme gelmişdi ve hatta Hadamard'ın ifadesiyle "Matematikte bir zelzele" başlamış idi. Bu, "E. Zermelo (1871-1953) Aksiyomu" veya "Serbest Seçim Prensibi" olarak adlandırılan aksiyom ve onun "her küme tamamen sıralı yapılabilir" teoremi [9,10] etrafında başlayan tartışmalardı.

Bu tartışmalar matematikte zelzele diye adlandırılabilecek olan bir kriz yarattı. İş öyle bir yere geldi ki, birçok bilir kişi tarafından o zamana kadar oluşan matematik bilgilerin tümünün yanlış veya gereksiz olduğu tartışılmaya başlandı. Söz konusu aksiyom 1904 yılında ispatlanmış, kendisi ile beraber de tartışmaları gündeme getirmiştir. Bu tartışma içerisinde yer almış olan bilim adamları farklı görüşler sergilerken, D. Hilbert bu krizi yatıştırmak ve en önemlisi o zamana kadar oluşan matematiksel bilgileri koruyabilmek için derin ve mantıklı bir teori yaratmak yoluna gitmeyi uygun bulmuştur.

Aralarında H. Poincare'nin (1854-1912) de bulunduğu bazı bilim adamları Zermelo aksiyomunu kabul etmezken, aralarında D. Hilbert'in de bulunduğu diğerleri onu kabul ediyordu. Burada tartışma, genelde matematiğin esaslandırılması üzerine yapılmakta idi, aslında.

E. Borel, matematikte yalnızca sonlu veya sayılabilir sayıda işlemleri içeren (constructive olan) tanımların kabul edilmesinden yana idi.

D.Hilbert farklı bir yol öneriyordu. Onun önerdiği yöntem **formalizm** olarak adlandırılmış oldu. Söz konusu, kümeler teorisinin aksiyomlaştırılması idi. Hilbert ve onun yandaşları şöyle bir prensip ortaya çıkardılar. "Herhangi matematiksel kavramın çelişkisiz olması onun var olmasıyla eş anlamlıdır". Buna göre, matematiğin esaslandırılması işi onun çelişkisiz olduğunun ispatlanması işine dönüştürülmesi oldu. Bunun içinde aritmetiğin çelişkisiz olduğunu ispatlama problemi ön plana çıkmış oldu. Bunun içinde söz konusu teori formalize bir hale getirilmelidir: Onun belli sembollerle yazılmış olan tekliflerini, somut anlamdan mahrum şeyler olarak görmeli, bu sembollerin bağdaşması için kurallar göstermeli ki, bu kuralları kullanarak verilmiş teori içerisinde bu bağdaşmanın gerçek olduğu gibi, inkarının da gerçek olduğunu ispatlamak mümkün olmasın. Düşüncelerin böyle formaliteleştirilmesi de **formalizm** olarak adlandırılmıştır.

Bu yönde Hilbert ve onun yandaşları tarafından yapılan çalışmalar matematiksel mantığın gelişimi için çok önemli oldu. Hilbert ve ekibinin şöyle bir sloganları vardı. "Hiç kimse bizi, Cantor'un bizim için yaratmış olduğu cennetten kovamaz!"

Bu türlü tartışmalar, kümeler teorisinde yeni yaklaşımlar oluşturarak matematiğin yeniden, aksiyomatik yollarla esaslandırılması sonucunu doğurdu. Yeni yeni türev, integral kavramlarının tanımlanması, fonksiyonların yeni esaslara göre sınıflandırılması Fonksiyonların Descriptive Teorisi'nin müfredatını oluşturmaktadır. Bu teoride emeği geçen bilim adamları olarak Hadamard, Baire, Borel, Lebesgue, Luzin, Kolmogorov, Cantor, Hilbert vd. gösterilebilir.

NOT: Eski kümeler teorisinde çelişkili problemlerin ortaya çıkması da bu teorinin yeniden yapılandırılması problemini ortaya çıkarmıştır. Bu problemin çözümü olarak 1910-1913 yıllarında B. Rassel (1872-?) ve H.İ.Uaythed (1861-1947) tarafından yazılmış "Prencipia Mathematica" adlı üç ciltlik eserde kümeler teorisi aksiyomları verilmiştir. Bunun yanı sıra, F.Hausdorf'un (1868-1942) "Kümeler Teorisi (1913,[24])" kitabı konuya ait çalışmalar arasında öncü kabul edilmektedir.

Kaynaklar

1. Lebesgue H., 1925/26 yıllarında "College de France "de "İutegrasyon Teorisi" üzerine okumuş olduğu kurs;
2. Lebesgue H., 1926 yılında Kopenhag Matematik Cemiyetine sunulmuş bildiri: "Sur le development de la notion d'integrale" (Matematik Tidsskrift, 1926)
3. Hilbert D., Die logischen Grundlagen der Mathematik, "Math.Annalen", 88,1922
4. Luzin N.N., Lesons Sur les Ensembles Analitiques et leurs Applicetions, Paris, Gauthiers – Villars, 1930.
5. Luzin N.N., Sovremennoye Sostoyaniye Teorii Funktsiy Deystvitelnogo Peremennogo (Reel Değişkenli Fonksiyonlar Teorisinin Çağdaş Durumu), Moskova, 1933.
6. Natanson İ.P., Teoriya Funktsiy Veşestvennoy Peremennoy, Moskova,1957.
7. Pesin İ.N., Razvitiye Ponyatiya İntegrala, Moskova, 1966.
8. Struik D.Ya., Abriss Der Geschichte Der Mathematik, Berlin, 1963. (Kratkiy Ocherk İstorii Matematiki, Rusca, Moskova, 1969)
9. Medvedev F.A., Ocherki İstorii Teorii Funktsiy Deystvitelnogo Peremennogo, Moskova, 1975.
10. Zermelo E., Beweis, dass jede Menge Wohlgelordnet Werden Kann, M.A.,1904,59,514-516.
11. Riemann B., Fonksiyonların Trigonometrik Serilerle Gösteriminin Mümkün Olması Hakkında, (1867), Eserleri, M –L Göstekizdat, 1948, s.225-261.
12. Banach S, "Lineer Operatörler Teorisi" (1932), Kiyev, Ryadanska Şkola, 1948.
13. Saks S., "Teoriya Integrala" (1937), Moskova, İL, 1969.
14. Kaczmarz S., Steinhaus H., "Teoriya Ortogonalnıkh Ryadov" (1935), M. Fizmatgiz, 1958.
15. Jordan C., "Analiz Kursu" –Cours D'analyse de l'Ecole Politechnique, 3. Vols, Paris, 1893-1896.
16. De la ch. Vallee Poussin, Kurs Analiza Beskoneçhno Malikh, c.c. I – II, M. – L; GTTİ, 1933.
17. Dini U., Fondamenti Per la Teorica Delle Funzioni de Variable Reali, Pisa, 1878.
18. Hobson E.W., "The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series", Cambridge, 1907.
19. Hardy G.H., "Iraksak Seriler (1949)", Moskova, İL, 1951.
20. Cook R.G., "Sonsuz Matrisler ve Diziler Uzayı", (1950), Moskova, Fizmatgiz,1960.
21. Hadamard J., Le Calcul Fonctionel – L'Enseign, Math.,1912, 14,5-18.
22. Dieudonne J., "Osnovı Sovremennogo Analiza"(1960), Moskova, MİR, 1964.
23. Shilov G.Y., "Matematiçeskiy Analiz", c.c. 1. – 3., Moskova, Nauka, 1969-1970.
24. Hausdorf F, "Teoriya Mnojestv" (Kümeler Teorisi), (1913), M. – L., 1937.