ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ПО ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Проф. др. Авыт АСАНОВ
Кыргызско-Турецкий Университет «Манас»

Классические понятия производной и дифференциала функции изложены во многих работах. Например, в [1,2,3]. Здесь мы дадим новые определения этих понятий. Эти опредления обобщают понятия производной и дифференциала функции. На основе этих определений мы обобщаем известные классические теоремы математического анализа.

1. Производная и дифференциал функции по $\varphi(x)$

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены на интервале (a, b). Будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ – строго возрастающая непрерывная функция всюду на интервале (a, b). Возьмем точку $x\in(a,b)$. Зададим x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ получат приращение $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ и $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$.

Определение 1. Производной по $\varphi(x)$ функции $f(x)$ в точке $x\in(a, b)$ называется предел отношения приращения функции $\Delta f(x)$ к приращению функции $\Delta\varphi(x)$ при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует):

$$f'_{\varphi}(x) = \frac{df}{d\varphi}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)} \qquad (1)$$

Нахождение производной функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ будем называть дифференцированием по $\varphi(x)$ этой функции. Если функция $f(x)$ в точке $x\in(a, b)$ имеет конечную производную по $\varphi(x)$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой по $\varphi(x)$ в этой точке. Функция $f(x)$, дифференцируемая по $\varphi(x)$ во всех точках интервала называется дифференцируемой по $\varphi(x)$на (a, b).

Т е о р е м а . Если функция $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$, то она в этой точке непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По условию функция $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} = \frac{df}{d\varphi}(x_0) = f'_\varphi(x_0)$$

где $\frac{df}{d\varphi}(x_0)$ – постоянная величина, не зависящая от Δx .

Тогда на основании теремы о связи бесконечно малых с пределами функций можно записать

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)} = f'_\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x), \qquad (2)$$

где $\alpha(\Delta x)$ –бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta f(x_0) = f'_\varphi(x_0)\Delta\varphi(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta\varphi(x_0).$$

Отсюда, при $\Delta x \to 0$ на основании свойств бесконечно малых устанавливаем, что $\Delta f(x_0) = f(x_0 + x) - f(x_0) \to 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 является непрерывной.

Нетрудно убедиться, что непрерывность функции – необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости функции по $\varphi(x)$.

Замечание. Производная непрерывной функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную по $\varphi(x)$ на (a, b), то функцию $f(x)$ будем называть гладкой по $\varphi(x)$ на (a, b). Если же производная функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то функция $f(x)$ на (a, b) называется кусочно гладкой по $\varphi(x)$.

Определение 2. Линейная функция $g(\Delta\varphi) = c\Delta\varphi$ называется дифференциалом функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ точке $x = x_0$, если

$$\Delta f(x_0) \sim c\Delta\varphi(x_0) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е.

$$\Delta f(x_0)=c\Delta\varphi(x_0)+\gamma(\Delta x)\Delta\varphi(x_0),$$

где $c\in R$ и $\gamma(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Дифференциал функции *f(x)* по *φ(x)* в точке *x* обозначается $d_\varphi f(x)$ или просто $d_\varphi f$. Из определения вытекает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}=c,$$

т.е.

$$d_\varphi f(x)=f'_\varphi(x)\Delta\varphi. \qquad (3)$$

Определив дифференциал функции *f(x)=φ(x)* имеем:

$$d_\varphi f(x)=d\varphi(x)=(\varphi(x))'_\varphi\Delta\varphi=\Delta\varphi.$$

Тогда из (3) получим

$$d_\varphi f(x)=f'_\varphi(x)d\varphi(x). \qquad (4)$$

Пример. Функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке *x=0* . Если

$$\varphi(x)=\begin{cases}-|x|^{\frac{1}{3}}, & x<0,\\ |x|^{\frac{1}{3}}, & x\geq 0,\end{cases}$$

то функция *φ(x)* строго возрастающая непрерывная функция на $(-\infty,\infty)$. Покажем, что функция $f(x)=|x|$ имеет непрерывную производную по *φ(x)* на $(-\infty,\infty)$.

Пусть *x<0*, тогда по определению 1 имеем:

$$f'_{\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x|-|x|}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-\left(|x|^{\frac{1}{3}}\right)^{3}}{-\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)\left(|x+\Delta x|^{\frac{2}{3}}+|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}|x|^{\frac{1}{3}}+|x|^{\frac{2}{3}}\right)^{3}}{\left(|x+\Delta x|^{\frac{1}{3}}-|x|^{\frac{1}{3}}\right)}=-3|x|^{\frac{2}{3}}.$$

Если *x>0,* то аналогично доказывается $f'_{\varphi}(x)=3|x|^{\frac{2}{3}}$.

Пусть *x=0* и $\Delta x>0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0.$$

Если *x=0* и $\Delta x<0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\varphi(\Delta x)-\varphi(0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{-|\Delta x|^{\frac{1}{3}}}=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$f'_{\varphi}(0)=0.$$

Таким образом, производная функции $f(x)=|x|$ по *φ(x)* определяется по следующей формуле:

$$f'_\varphi(x)=\begin{cases}-3|x|^{\frac{2}{3}},\ x<0,\\ 3|x|^{\frac{2}{3}},\ x\geq 0.\end{cases}$$

Ясно, что функция $f'_\varphi(x)$ непрерына на интервале $(-\infty,\infty)$, т.е. функция $f(x)=|x|$ гладкая по *φ(x)* на $(-\infty,\infty)$.

2. Правила дифференцирования по *φ(x)*

1. Производная постоянной по *φ(x)* равна нулю, т.е.

$$(C)'_\varphi=0,$$

где *С* – произвольная постоянная.

2. Производная по *φ(x)* алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций по *φ(x)* равна такой же сумме производных этих функций по *φ(x)*, т.е.

$$(u+v)'_\varphi=u'_\varphi+v'_\varphi.$$

3. Производная по *φ(x)* двух дифференцируемых функций по *φ(x)* равна произведению производной первого сомножителя по *φ(x)* на второй, плюс произведение первого сомножителя на производную второго по *φ(x)*, т.е.

$$(uv)'_\varphi=u'_\varphi v+uv'_\varphi.$$

Следствие. Постоянный множитель С можно выносить за знак производной по *φ*(*x*), т.е.

$$(Cu)'_\varphi=Cu'_\varphi.$$

4. Производная по *φ(x)* частного двух дифференцируемых по *φ(x)* функций может быть найдена по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)'_\varphi=\frac{u'_\varphi v-uv'_\varphi}{v^2}$$

Доказательство этих правил аналогично доказательствам правил дифференцирования.

3. Дифференцирование по *φ(x)* сложной функции

Т е о р е м а . Пусть функция $u(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x=x_0$, причем $u(x_0)=u_0$, $u'_\varphi(x_0)=\alpha$. Далее, пусть функция $f(u)$ дифференцируема по u в точке $u=u_0$, причем $f'(u_0)=\beta$. Тогда сложная функция

$$v(x)=f(u(x))$$

дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x=x_0$, причем

$$v'_\varphi(x_0)=f'(u_0)u'_\varphi(x_0)=\beta\alpha .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу дифференцируемости функции $f(u)$ и дифференцируемости по $\varphi(x)$ функции $u(x)$ имеем:

$$\Delta u(x_0)=\alpha\Delta\varphi(x_0)+\alpha_1(\Delta x)\Delta\varphi(x_0), \qquad (5)$$

$$\Delta f(u(x_0))=\Delta f(u_0)=\beta\Delta u(x_0)+\beta_1(\Delta u(x_0))\Delta u(x_0), \qquad (6)$$

где Δx – приращение аргумента x, $\alpha_1(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$ и $\beta_1(\Delta u(x_0))$ – бесконечно малая при $\Delta u(x_0)$. Учитывая формулу (5) из (6) имеем

$$\Delta f(u(x_0))=[\beta+\beta_1(\Delta u(x_0))][\alpha+\alpha_1(\Delta x)]\Delta\varphi(x_0).$$

Отсюда, на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций, имеем

$$v'_\varphi(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(u(x_0))}{\Delta\varphi(x_0)}=\beta\alpha .$$

4. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть $f(x)$ является дифференцируемой по $\varphi(x)$ в каждой точке интервала (a, b). Тогда каждой точке $x\in(a, b)$ можно поставить в соответствие число – производную $f'_\varphi(x)$ в этой точке. Полученная функция называется функцией, производной от данной по $\varphi(x)$ и обозначается также $f'_\varphi(x)$. Может случиться, что она сама тоже имеет производную по $\varphi(x)$. Тогда эта производная называется второй производной функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ и обозначается так:

$$f'_{\varphi}(x)=(f'_{\varphi}(x))'_{\varphi}\ .$$

Аналогичным образом определяются третья, четвертая и все последующие производные:

$$f'''_{\varphi}(x)=(f''_{\varphi}(x))'_{\varphi}\,,\quad \ldots\quad f^{(n)}{}_{\varphi}(x)=(f^{(n-1)}{}_{\varphi}(x))'_{\varphi}\,,$$

$$f^{(n)}{}_{\varphi}(x)=\frac{d^{n}f(x)}{d\varphi^{n}(x)}=D^{n}_{\varphi}f(x)\,.$$

Методом индукции можно доказать следующие теоремы.

Т е о р е м а ***(Обобщенная формула Лейбница).*** Пусть $f(x)$, $g(x)$ имеют n-е производные по $\varphi(x)$. Тогда справедлива формула

$$(f(x)g(x))^{(n)}_{\varphi}=f^{(n)}_{\varphi}(x)g(x)+nf^{(n-1)}_{\varphi}g'_{\varphi}(x)+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}_{\varphi}(x)g''_{\varphi}(x)+\Lambda+f(x)g^{(n)}_{\varphi}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}C^{m}_{n}f^{(m)}_{\varphi}(x)g^{(n-m)}_{\varphi}(x),$$

где $f^{(0)}(x)=f(x)$, $g^{(0)}(x)=g(x)$.

Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема по $\varphi(x)$, то выражение

$$f''_{\varphi}(x)d\varphi^{2}=f''_{\varphi}(x)(d\varphi(x))^{2}$$

называется вторым дифференциалом функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ и обозначается $d^{2}_{\varphi}f(x)$, т.е.

$$d^{2}_{\varphi}f(x)=d_{\varphi}(d_{\varphi}f(x))=f''_{\varphi}\ (x)d\varphi^{2}\,.$$

Аналогично определим третью, четвертую и все последующие дифференциалы:

$$d_{\varphi}^{3} f(x) = d_{\varphi}(d^{2}{}_{\varphi} f(x)) = f_{\varphi}'''\ (x) d\varphi^{3}, \dots,$$

$$d_{\varphi}^{n} f(x) = d_{\varphi}(d_{\varphi}^{n-1} f(x)) = f^{(n)}{}_{\varphi}(x) d\varphi^{n}$$

Очевидно, в силу такого определения можно записать:

$$f_{\varphi}^{(n)}(x) = \frac{d_{\varphi}^{n} f(x)}{d\varphi^{n}}.$$

5. Возрастание и убывание функции в точке.

Пусть x_0 – внутренняя точка области определения $f(x)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:

1) $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$; 2) $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.

Определение 2. Функция убывает в точке $x = x_0$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:

1) $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$; 2) $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$.

Определение 3. Функция имеет в точке $x = x_0$ локальный максимум (локальный минимум), если в некоторой проколотой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (соответственно $f(x_0) < f(x)$).

Определение 4. Функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке $x = x_0$, если в этой точке она имеет или локальный максимум, или локальный минимум.

Т е о р е м а. Пусть $\varphi(x)$– возрастающая непрерывная функция в области определения функции $f(x)$. 1) Если $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = c > 0$, то точка $x = x_0$ - точка возрастания функции $f(x)$; 2) Если $\frac{df}{d\varphi}(x_0) = c < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как

$$\frac{df}{d\varphi}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)},$$

то существует число $d = d\left(\frac{c}{2}\right) > 0$ такое, что неравенство

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}-c\right|<\frac{c}{2}$$

выполняется для всех точек проколотой δ–окрестности точки $x = x_0$. В этой окрестности имеем

$$0<\frac{c}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}<\frac{3c}{2}.$$

Так как $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)$ имеет тот же знак, что и $\Delta x = x - x_0$, то $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $\Delta x = x - x_0$, т.е. x_0 – точка возрастания. Случай 2) сводится к случаю 1) заменой *f(x)* на *(- f(x))*.

6. Приложения производной по возрастающей функции

Обобщенная теорема Ферма. Пусть внутренняя точка x_0 отрезка [*a,b*], на котором определена и непрерывна функция *f(x)*, является точкой локального экстремума этой функции и пусть $\exists\,\frac{df}{d\varphi}(x_0)$, где *φ(x)* – возрастающая непрерывная функция на [*a,b*]. Тогда имеем $\frac{df}{d\varphi}(x_0)=0$.

Доказательство. Точка x_0 не может быть точкой возрастания (убывания), так как тогда в некоторой проколотой δ–окрестности этой точки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)}>0 \qquad \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta\varphi(x_0)}<0 \text{ соответственно}\right).$$

Но тогда неравенство $\frac{df}{d\varphi}(x_0)>0$ невозможно. Остается принять, что $\frac{df}{d\varphi}(x_0)=0$, что и требовалось доказать.

Обобщенная теорема Ролля. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) дифференцируема по возрастающей функции $\varphi(x)$ на интервале (a,b);
3) на концах отрезка принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой производная функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ равна нулю:

$$\frac{df}{d\varphi}(\xi) = 0$$

Доказательство. На основании теоремы Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает в нем своего наибольшего M и наименьшего m значений. Если оба эти значения достигаются на концах отрезка $[a,b]$, то по условию они равны (т.е. $M=m$), а это значит, что функция тождественно постоянна на отрезке $[a,b]$. Тогда производная $\frac{df}{d\varphi}(x)$ равна нулю во всех точках этого отрезка. Если же хотя бы одно из этих значений – максимальное или минимальное – достигается внутри отрезка (т.е. $m<M$), то производная $\frac{df}{d\varphi}(x)$ в соответствующей точке равна нулю в силу обобщенной теоремы Ферма.

Обобщенная теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы по возрастающей функции $\varphi(x)$ внутри него. Пусть $\frac{dg(x)}{d\varphi(x)} \neq 0$ при всех $x \in [a,b]$. Тогда на интревале (a,b) найдется точка c такая, что

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \left[\frac{df(c)}{d\varphi(c)} / \frac{dg(c)}{d\varphi(c)}\right].$$

Доказательство. Преобразуя эквивалентным образом требуемое равенство с учетом того, что $\frac{dg(c)}{d\varphi(c)} \neq 0$, имеем

$$(f(a)-f(b))\frac{dg(c)}{d\varphi(c)}-(g(a)-g(b))\frac{df(c)}{d\varphi(c)}=0.$$

Заметим, что слева в последнем равенстве стоит значение производной по *φ(x)* функции *H(x)* в точке *x=c*, где

$$H(x)=g(x)(f(a)-f(b))-f(x)(g(a)-g(b)).$$

Таким образом, нам достаточно доказать существование точки *c*, в которой $H'_\varphi(x)=0$. Но функция *H(x)* дифференцируема во внутренних точках отрезка [*a,b*] и

$$H(a)=H(b)=-g(a)f(b)+f(a)g(b).$$

Поэтому по обобщенной теореме Ролля существует точка $c\in[a,b]$ такая, что $H'_\varphi(c)=0$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е ***(Обобщенная теорема Лагранжа).*** Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке [*a,b*] и дифференцируема по возрастающей функции *φ(x)* на интервале (*a,b*). Тогда имеет место формула

$$f(a)-f(b)=\frac{df(c)}{d\varphi(c)}(\varphi(a)-\varphi(b)),$$

где *c* – некоторая внутренняя точка этого отрезка.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Утверждение следствия является частным случаем обобщенной теоремы Коши при *g(x)=φ(x)*. Это следствие называется формулой обобщенных конечных приращений.

Далее, всюду будем предполагать, что *φ(x)* – возрастающая непрерывная функция на [*a,b*].

Т е о р е м а 1 . Пусть $\frac{df}{d\varphi}(x)=0$ при всех $x\in(a,b)$. Тогда $f(x)=const=f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По обобщенной теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{df}{d\varphi}(c)\left(\varphi(x)-\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Отсюда

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ x\in(a,b).$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть функция *f(x)* дифференцируема по *φ(x)* на (*a,b*). Тогда, для того, чтобы *f(x)* не убывала на (*a,b*), необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0\ ,\ \ \forall x\in(a,b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Условие неубывания функции *f(x)* эквивалентно тому, что $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)}\geq 0$. Переходя к пределу в неравенстве, получим

$$\frac{df}{d\varphi}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}\geq 0\,.$$

Достаточность. Если $\dfrac{df}{d\varphi}(x)\geq 0$, то по обобщенной теореме Лагранжа

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}=f'(c)\geq 0$$

при некотором $c\in(a,b)$, т.е. функция *f(x)* не убывает на (*a,b*). Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Если $\dfrac{df}{d\varphi}(x)>0$ на интервале (*a,b*), то функция *f(x)* монотонно возрастает на (*a,b*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По обобщенной теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f(x)=\frac{df}{d\varphi}(c)\Delta\varphi(x)>0 \text{ при } \Delta x>0,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 4. Пусть $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ на интревале (a,b). Тогда для того, чтобы функция $f(x)$ строго возрастала на нем, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0$ на интревале (a,b) и $\frac{df}{d\varphi}(x)$ не обращалась в нуль тождественно ни на каком отрезке $[a_1,b_1]$, лежащем внутри интервала (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость (от противного). Если условие теоремы не выполнено , то $\frac{df}{d\varphi}(x_0)<0$ или для некоторой точки $x_0\in(a,b)$, или $\frac{df}{d\varphi}(x)\equiv 0$ при всех $x\in[a_1,b_1]$. Тогда в первом случае x_0 – точка убывания функции $f(x)$, а во втором - $f(x)$=const на $[a_1, b_1]$. Это противоречит условию возрастания функции $f(x)$.

Достаточность. Так как по условию $\frac{df}{d\varphi}(x)\geq 0$, то при любых $a_1<b_1$, где $a_1, b_1\in (a, b)$, имеем

$$f(b_1)-f(a_1)=\frac{df}{d\varphi}(c)(\varphi(b_1)-\varphi(a_1))\geq 0,$$

т.е. $f(x)$ не убывает. Докажем, что $f(x)$ возрастает. Пусть это не так, и $f(a_1)=f(b_1)$ при $b_1> a_1$. Но тогда в силу неубывания $f(x)$ на отрезке $[a_1,b_1]$ имеем, что $f(x)$=const на нем, и следовательно, $\frac{df}{d\varphi}(x)=0$ на (a_1,b_1), что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема 4 доказана полностью.

7. Обобщенное правило Лопиталя

Т е о р е м а 1 (первое обобщенное правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x\to a-$). Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* – определены и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в некотором интервале вида $(a-\delta_1, a),\ \delta_1 > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;

3) $\dfrac{df}{d\varphi}(x),\ \dfrac{dg}{d\varphi}(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta_2, a)$ и при некотором $\delta_2 > 0$;

4) существует конечный или бесконечный предел при $x \to a-$ отношения $\left[\dfrac{df}{d\varphi}(x) / \dfrac{dg}{d\varphi}(x)\right]$, т.е. $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df}{d\varphi}(x) / \dfrac{dg}{d\varphi}(x)\right]$.

Тогда существует предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x) / \frac{dg}{d\varphi}(x)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что предел $\left[\dfrac{df}{d\varphi}(x) / \dfrac{dg}{d\varphi}(x)\right]$ при $x \to a-$ является конечным пределом и равен *l*, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Доопределим *f(x)* и *g(x)* в точке *x=a*, полагая *f(a)=g(a)=0*. Тогда функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке *a* слева. Поскольку $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)} / \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] \to l$ при $x \to a-$, для любого ε>0 существует $\delta_3 = \delta_\varepsilon(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in (a-\delta_\varepsilon, a)$ имеем

$$\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)} / \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right] - l\right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда для каждого $x \in (a-\delta, a)$, используя обобщенную теорему Коши, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-l\right|=\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon,$$

где $c\in(x,a)\subset(a-\delta,a)$.

Таким образом, по определению предела

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=l\,,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* – определены и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в некотором интервале вида $(a,a+\delta_1),\ \delta_1>0$;

2) $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}g(x)=0$;

3) $\frac{df(x)}{d\varphi(x)},\ \frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\neq 0$ при всех $x\in(a,a+\delta_2)$ и при некотором $\delta_2>0$;

4) существует конечный или бесконечный предел при $x\to a+$ отношения $\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, т.е. $\lim_{x\to a-}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$.

Тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* определены в некотором интервале $(a-\delta_1, a+\delta_1)$, $\delta_1>0$ и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в этом интервале за исключением, быть может, точки *x=a*;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

3) $\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}, \ \dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\neq 0$ при всех $x\in(a-\delta_2,a)\cup(a,a+\delta_2)$ и при некотором $\delta_2>0$;

4) существует конечный или бесконечный предел при $x\to a$ отношения $\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{df(x)}{d\varphi(x)}/\dfrac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$.

Тогда существует предел отношения $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right].$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1 и 2.

Т е о р е м а 4 (второе обобщенное правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to a-$). Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* – определены и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в интервале $(a-h,a)$, $\delta h>0$;

2) $\dfrac{df}{d\varphi}(x), \ \dfrac{dg}{d\varphi}(x)\neq 0$ при всех $x\in(a-h,a)$;

3) $f(x)\to\infty, \ g(x)\to\infty$ при $x\to a-$;

4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a-}\left[\dfrac{df}{d\varphi}(x)/\dfrac{dg}{d\varphi}(x)\right]$.

Тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x)/\frac{dg}{d\varphi}(x)\right].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что можно считать

$$\lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x)/\frac{dg}{d\varphi}(x)\right]=l\in R,$$

т.е. предел конечен. Действительно, если $\lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x)/\frac{dg}{d\varphi}(x)\right]=\infty$, то $\lim_{x\to a-}\left[\frac{dg}{d\varphi}(x)/\frac{df}{d\varphi}(x)\right]=0$. И вместо того, чтобы доказывать $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, достаточно показать, что $\lim_{x\to a-}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. Одновременно это будет означать, что $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

Будем считать, что в некоторой полуокрестности $(a-h_1,a)$ точки a выполняется неравенство $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$. Это возможно, поскольку $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a-$.

Пусть ε_1 - любое число, $0<\varepsilon_1<1/2$. Возьмем $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ так, чтобы неравенство

$$\left|\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]-l\right|<\varepsilon_1\quad \delta_1=\min(h_1,h_2),$$

выполнялось для всех x из интервала $(a-\delta_1,a)$. Это возможно, так как

$$\lim_{x\to a-}\left[\frac{df}{d\varphi}(x)/\frac{dg}{d\varphi}(x)\right]=l\in R,$$

существует по условию. Пусть x_0 – некоторая точка из этой окрестности. Поскольку $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\infty$, то найдется $\delta_2=\delta_2(\varepsilon_1)>0$ такое, что

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1},\ \forall x\in(a-\delta_2,a).$$

Аналогично найдется $\delta_\varepsilon=\delta_\varepsilon(\varepsilon_1)>0$ такое, что

$$|g(x)|>\frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1},\ \forall x\in(a-\delta_\varepsilon,a).$$

Пусть $\delta_4=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, $I_4=\{x/x\in(a-\delta_4,a)\}$. Тогда для любого $x\in I_4$ в силу обобщенной теоремы Коши имеем

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|=\left|\left[\frac{df}{d\varphi}(c)/\frac{dg}{d\varphi}(c)\right]-l\right|<\varepsilon_1$$

где $c\in(x,x_0)\subset I_4$. Отсюда получим

$$\left|\left[\frac{df}{d\varphi}(x_0)/\frac{dg}{d\varphi}(x_0)\right]\right|=\left|\left[\frac{df}{d\varphi}(x_0)/\frac{dg}{d\varphi}(x_0)\right]-l+l\right|<\varepsilon_1+|l|=1+|l|.$$

Далее для тех же значений x будем иметь цепочку неравенств:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}--l\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|\le\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|+$$

$$+\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-l\right|\le\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|\left|\frac{(g(x)-g(x_0))/g(x)}{(f(x)-f(x_0))/f(x)}-1\right|+\varepsilon_1=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\right|A+\varepsilon_1.$$

Но так как

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}=1-\frac{g(x_0)}{g(x)}=1+\alpha,\ \text{где}\ |\alpha|<\varepsilon_1,$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)}=1-\frac{f(x_0)}{f(x)}=1+\beta \text{, где } |\beta|<\varepsilon_1,$$

то $A=\left|\frac{1+\alpha}{1+\beta}-1\right|=\left|\frac{\alpha-\beta}{1+\beta}\right|\le\frac{2\varepsilon_1}{0{,}5}=4\varepsilon_1$.

Следовательно, получаем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\le(1+|l|)4\varepsilon_1+\varepsilon_1=(4|l|+5)\varepsilon_1=\varepsilon .$$

Положим

$$\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right).$$

Тогда для любого $\varepsilon\in(0;\frac{1}{2}(4|l|+5)$ найдено $\delta=\delta(\varepsilon)=\delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ такое, что для любого $x\in(a-\delta,a)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\le\varepsilon$. Это значит, что

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=l .$$

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* – определены и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в интервале $(a,a+h),\ h>0$;

2) $\frac{df}{d\varphi}(x),\ \frac{dg}{d\varphi}(x)\ne0$ при всех $x\in(a,a+h)$;

3) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a+$;

4) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a+}\left[\frac{df}{d\varphi}(x)/\frac{dg}{d\varphi}(x)\right].$$

Тогда существует предел отношения функций и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right].$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Т е о р е м а 6 (второе обощенное правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to a$). Пусть:

1) *f(x)* и *g(x)* определены и дифференцируемы по возрастающей функции *φ(x)* в области $(a-h,a)\cup(a,a+h),\ h>0$;

2) $\frac{df}{d\varphi}(x),\ \frac{dg}{d\varphi}(x)\neq 0$ при всех $x\in(a-h,a)\cup(a,a+h)$;

3) $f(x)\to\infty,\ g(x)\to\infty$ при $x\to a$;

4) существует предел отношения производных. $\lim_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right]$.

Тогда предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{df(x)}{d\varphi(x)}/\frac{dg(x)}{d\varphi(x)}\right].$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 4 и 5.

Замечание. В теоремах 1 и 4 условие $x\to a-$ можно заменить условием $x\to+\infty$, в теоремах 2 и 5 условие $x\to a+$ можно заменить условием $x\to-\infty$ и в теоремах 3 и 6 условие $x\to a$ можно заменить на $x\to\infty$.

Пример. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt[3]{x}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}$.

Решение. Выбираем возрастающую функцию на *R* $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$. Тогда $\sqrt{|x|}=|\varphi(x)|^{3/2}$ и $\sqrt[5]{x^2}=|\varphi(x)|^{6/5}$. Поэтому, по первому обощенному правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt[3]{x}+\sqrt{|x|}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2})}{\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sin(\varphi(x)+|\varphi(x)|^{3/2})\right]'_{\varphi}}{\left[\varphi(x)+(\varphi(x))^{6/5}\right]'_{\varphi}}=1.$$

8. Обобщенная формула Тейлора

Пусть *y=f(x)* дифференцируема *n-1* раз по *φ(x)* в некоторой окрестности точки $x=x_0$ и существует $f_{\varphi}^{(n)}(x_0)$. Рассмотрим обобщенный многочлен Тейлора степени *n*:

$$q(x)=f_n(x_0,x)=f(x_0)+\frac{f'_{\varphi}(x_0)}{1!}\Delta\varphi+\frac{f''_{\varphi}(x_0)}{2!}(\Delta\varphi)^2+\Lambda+\frac{f_{\varphi}^{(n)}(x_0)}{n!}(\Delta\varphi)^n,$$

где $\Delta\varphi=\varphi(x)-\varphi(x_0)$.

Т е о р е м а 1 (Обобщенная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть *f(x)* дифференцируема *n-1* раз по *φ(x)* в некоторой окрестности точки $x=x_0$ и существует $f_{\varphi}^{(n)}(x_0)$. Тогда

$$r(x)=f(x)-f_n(x_0,x)=o((\Delta\varphi)^n) \text{ при } \Delta x=x-x_0\to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим первое обобщенное правило Лопиталя *n-1* раз при $x\to x_0$ к отношению $\alpha(x)=\dfrac{r(x)}{(\Delta\varphi)^n}$.

Получим

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r(x)}{(\Delta\varphi)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r'_{\varphi}(x)}{n(\Delta\varphi)^{n-1}}=\Lambda=\lim_{x\to x_0}\frac{r_{\varphi}^{(n-1)}(x)}{n!\Delta\varphi}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f_{\varphi}^{(n-1)}(x)-q_{\varphi}^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}.$$

Далее имеем $$q_{\varphi}^{(n-1)}(x)=f_{\varphi}^{(n-1)}(x_0)+f_{\varphi}^{(n)}(x_0)(\varphi(x)-\varphi(x_0)).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{r_\varphi^{(n-1)}(x)}{\left[(\Delta\varphi)^n\right]_\varphi^{(n-1)}}=\frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_\varphi^{(n-1)}(x)-q_\varphi^{(n-1)}(x)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}-f_\varphi^{(n)}(x_0)\right)=\frac{1}{n!}\left(f_\varphi^{(n)}(a)-f_\varphi^{(n)}(a)\right)=0\cdot$$

Другими словами, $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x\to a$. Следовательно,

$$r(x)=(\varphi(x)-\varphi(x_0))^n\,\alpha(x)\text{, т.е. } r(x)=o((\Delta\varphi)^n)\,.$$

Теорема доказана .

Т е о р е м а 2 (Обобщенная формула Тейлора с остаточным членом в общей форме). Пусть *f(x) n-1* раз дифференцируемая функция по *φ(x)* на интервале *(a,b)*. Пусть x_0 и x_1 – любые две точки из этого интервала. Тогда для любого положительного существует точка *c,* лежащая между x_0 и x_1 такая, что

$$r_n(x_1)=f(x_1)-f_n(x_0,x_1)=\frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{\varphi(x_1)-\varphi(c)}\right)^{\alpha}(\varphi(x_1)-\varphi(c))^{n+1}\frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,.$$

Напомним, что

$$f_n(x_0,x_1)=f(x_0)+\frac{f'_\varphi(x_0)}{1!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))+\Lambda+\frac{f_\varphi^{(n)}(a)}{n!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^n\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1 > x_0$. Определим число *H* равенством

$$H=\frac{f(x_1)-f_n(x_0,x_1)}{(\varphi(x_1)-\varphi(x_0))^n}$$

Нам надо доказать, что на интервале (x_0, x_1) найдется точка *c* такая, что

$$H=\frac{n+1}{\alpha}(\varphi(x_1)-\varphi(c))^{n+1-\alpha}\,\frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,.$$

Докажем это, опираяь на обобщенную теорему Ролля. Равенство, определяющее число *H*, можно записать так:

$$f(x_1)-f_n(x_0,x_1)-H\left(\varphi(x_1)-\varphi(x_0)\right)^{\alpha}=0\,.$$

Рассмотрим функцию $\psi(x)$, определенную на $[x_0, x_1]$ соотношением

$$\psi(x)=f(x_1)-f_n(x,x_1)-H\big(\varphi(x_1)-\varphi(x)\big)^{\alpha}=0\,.$$

Тогда, очевидно, $\psi(x_0)=0$. Кроме того, имеем, что $\psi(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ на (x_0,x_1) и непрерывна на $[x_0, x_1]$. Далее, так как справедливо равенство $f_n(x_1,x_1)=f(x_1)$, то $\psi(x_1)=0$. Следовательно, по обобщенной теореме Ролля на интервале (x_0, x_1) производная $\psi'_{\varphi}(x)$ обращается в нуль в некоторой точке c, т.е.

$$\psi'_{\varphi}(x)=0 \text{ при } x=c,\ c\in(x_0, x_1).$$

Запишем $\psi'_{\varphi}(x)$ в развернутой форме:

$$\psi'_{\varphi}(x)=\left(f(x)+\frac{f'_{\varphi}(x)}{1!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))+\Lambda+\frac{f^{(n)}_{\varphi}(x)}{n!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{n}\right)'_{\varphi(x)}+\alpha H(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{\alpha-1}.$$

Так как при $s=1, \ldots, n$ имеем

$$\left(\frac{f^{(s)}_{\varphi}(x)}{s!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{s}\right)'_{\varphi}=\frac{f^{(s+1)}_{\varphi}(x)}{s!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{s}-\frac{f^{(s)}_{\varphi}(x)}{(s-1)!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{s-1},$$

то

$$\psi'_{\varphi}(x)=\alpha H(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{\alpha-1}-\frac{f^{(n+1)}_{\varphi}(x)}{(n+1)!}(\varphi(x_1)-\varphi(x))^{n}\,.$$

Отсюда при $x=c$ получаем

$$H=\frac{n+1}{\alpha}(\varphi(x_1)-\varphi(c))^{n+1-\alpha}\,\frac{f^{(n+1)}_{\varphi}(c)}{(n+1)!}$$

Случай $x_1<x_0$, доказывается аналогичным образом. Теорема доказана.

Частные случаи обобщенной формулы Тейлора.

1. Остаточный член в обобщенной форме Лагранжа $(\alpha = n+1)$. В этом случае

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))^{n+1}.$$

2. Остаток в обобщенной форме Коши $(\alpha = 1)$:

$$r_n(x_1) = \frac{f_\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(\varphi(x_1) - \varphi(x_0))(\varphi(x_1) - \varphi(c))^n,$$

$c = x_0 + \theta(x_1 - x_0),\ 0 < \theta < 1,\ 1 - \theta = (x_1 - c)/(x_1 - x_0)$.

Обобщенную формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать для вычисления пределов.

9. Экстремумы

Наша дальнейшая цель – применение построенной теории к решению задач, связанных с изучением поведения функций. Одна из них – задача отыскания локальных и глобальных экстремумов функций. Ранее мы уже доказали ряд утверждений подобного типа. Напомним их, а заодно и некоторые понятия, которые потребуются далее.

1. Точки *x*, в которых $f'_\varphi(x) = 0$ называются стационарными (по *φ(x)*).

2. Критерий неубывания на интервале (*a,b*) дифференцируемой функции по *φ(x)*: для того, чтобы функция *f(x)* не убывала на (*a,b*) необходимо и достаточно, чтобы $f'_\varphi(x) \geq 0$ на (*a,b*).

3. Критерий возрастания: для того, чтобы функция *f(x)* возрастала на (*a,b*) необходимо и достаточно, чтобы $f'_\varphi(x) \geq 0$ на (*a,b*) и кроме того, $f'_\varphi(x) \neq 0$ ни на каком интервале $(a_1,b_1) \subset (a,b)$.

4. Для того, чтобы функция *f(x)* возрастала, достаточно, чтобы $f'_\varphi(x) > 0$ при всех $x \in (a,b)$.

Т е о р е м а 1. Пусть *f(x)* дифференцируема по *φ(x)* в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т.е. $f'_\varphi(x_0) = 0$. Тогда

1) если $f'_{\varphi}(x)>0$ слева от x_0 и $f'_{\varphi}(x)<0$ справа от x_0, то x_0 – точка локального максимума функции *f(x);*

2) если $f'_{\varphi}(x)<0$ слева от x_0 и $f'_{\varphi}(x)>0$ справа от x_0, то x_0 – точка локального минимума функции *f(x);*

3) если $f'_{\varphi}(x)$ имеет справа и слева от точки x_0 один и тот же знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) По обобщенной теореме Лагранжа имеем

$$f(x)=f(x_0)+f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0)),$$

где точка c находится на интервале с концами x_0 и x. Из условия следует, что $f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$. Отсюда получим, что $f(x)<f(x_0)$, что и требовалось доказать.

Доказательство 2) проводится аналогично.

3) Если $f'_{\varphi}(x)>0$ справа и слева от x_0, то $f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))<0$ слева и $f'_{\varphi}(c)(\varphi(x)-\varphi(x_0))>0$ справа. Отсюда имеем $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ при $x_1<x_0<x_2$, что и требовалось доказать.

Случай $f'(x)<0$ рассматривается аналогично.

Т е о р е м а 2. Пусть *f(x)* непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема по *φ(x)* в проколотой окрестности этой точки. Если $f'_{\varphi}(x)$ меняет знак + на знак – при переходе точки x_0 слева направо, то *f(x)* имеет локальный максимум, если знак – на знак +, то локальный минимум, и если не меняет знак, то локального экстремума нет.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 1, так как там мы нигде не пользовались существованием производной функции *f(x)* по *φ(x)* в точке $x=x_0$.

Т е о р е м а 3. Пусть $f'_{\varphi}(x_0)=0$ и существует $f''_{\varphi}(x_0)$. Тогда

1) если $f''_{\varphi}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если $f''_\varphi(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как $f''_\varphi(x_0)<0$, то $f'_\varphi(x)$ убывает в точке $x=x_0$, и поскольку $f'_\varphi(x_0)=0$, то $f'_\varphi(x)$ меняет знак с + на – при переходе через x_0 слева направо. Поэтому по теореме 2 точка x_0 является локальным максимумом.

2) $f''(x_0)>0$, поэтому $f'(x)$ возрастает в точке $x=x_0$. Из теоремы 2 тогда следует, что x_0 – точка локального минимума. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Пусть

$$f'_\varphi(x_0)=\Lambda=f_\varphi^{(2k-1)}(x_0)=0,\ f_\varphi^{(2k)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда

1) если $f_\varphi^{(2k)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если $f_\varphi^{(2k)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) При $k=1$ утверждение следует из теоремы 3. Пусть $k>1$. Выразим $f'_\varphi(x)$ по обобщенной формуле Тейлора:

$$f'_\varphi(x)=f'_\varphi(x_0)+\frac{f''_\varphi(x_0)}{1!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))+\Lambda+\frac{f_\varphi^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-3}+$$
$$+\frac{f_\varphi^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}.$$

Отсюда

$$f'_\varphi(x)=\frac{f_\varphi^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(\varphi(x)-\varphi(x_0))^{2k-2}.$$

Так как $f_\varphi^{(2k)}(x_0)<0$, то $f_\varphi^{(2k-1)}(x)$ убывает и, следовательно, $f_\varphi^{(2k-1)}(x)$ меняет знак + на – при переходе через точку x_0, а значит, и $f'_\varphi(x)$ меняет знак + на - . Поэтому x_0 – точка локального максимума. Случай 2) рассматривается аналогично. Теорема доказана.

10. Производная по *φ(x)* и интеграл Стильтьеса

Т е о р е м а 1. Пусть *f(x)* – непрерывная функция на сегменте *[a,b]* и

$$F(x)=\int_a^x f(t)d\varphi(t),\ x\in[a,b].$$

Тогда

$$F'_\varphi(x)=\left(\int_a^x f(t)d\varphi\right)'_\varphi=f(x),\ x\in[a,b],$$

где

$$F'_\varphi(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\varphi(a+\Delta x)-\varphi(a)},\ F'_\varphi(b)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{F(b+\Delta x)-F(b)}{\varphi(b+\Delta x)-\varphi(b)}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению производной по *φ(x)*, имеем

$$F'_\varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\int_x^{x+\Delta x}d\varphi-\int_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))d\varphi\right)/[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]=f(x)-\lim_{\Delta x\to 0}\psi(x,\Delta x),$$

где

$$\psi(x,\Delta x)=\left(\int_x^{x+\Delta x}(f(x)-f(t))d\varphi\right)/[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)].$$

Отсюда, учитывая, что *φ(x)* – возрастающая функция на [*a,b*], получим

$$\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le\left[\omega_f(\Delta x)\left(\int_x^{x+\Delta x}d\varphi\right)\right]/[\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)]=\omega_f(\Delta x),$$

где $\omega_f(|\Delta x|)$ – модуль непрерывности функции *f(x)*, т.е.

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|t-x|\le\delta}\left|f(x)-f(t)\right|.$$

Известно, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\psi(x,\Delta x)\right|\le \lim_{\Delta x\to 0}\omega_f(\left|\Delta x\right|)=0.$$

Следовательно, $F'_\varphi(x)=f(x)$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2 (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница).

Пусть $f'_\varphi(x)=f(x)$ непрерывная функция на [a,b]. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f'_\varphi(x)d\varphi(x)=f(b)-f(a)\cdot$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению интеграла Стильтьеса, данный интеграл определяется как предел сумм

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f'_\varphi(\xi_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})],$$

где $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b,\quad \xi_i$ - произвольное число из $[x_{i-1},x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$.

В силу обобщенной теоремы Лагранжа, имеем

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'_\varphi(c_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})],$$

где $c_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда в сумме S_n числа ξ_i заменяя c_i, имеем

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a).$$

Отсюда переходя к пределу получим требуемую формулу. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $f'_\varphi(x)$ - непрерывная функция на [a,b]. Тогда справедлива формула

$$\int_a^x f'_\varphi(s)d\varphi(s)=f(x)-f(a),\ \forall x\in[a,b].$$

Т е о р е м а 3. (***Обобщенное правило интегрирования по частям).*** Пусть $f'_\varphi(x)$ и $g'_\varphi(x)$ - непрерывные функции на [a,b] . Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)g'_\varphi(x)d\varphi(x)=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b g(x)f'_\varphi(x)d\varphi(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по Стильтьесу правилу

$$\left[f(x)g(x)\right]'_\varphi=f'_\varphi(x)g(x)+f(x)g'_\varphi(x)$$

имеем требуемую формулу.

11. Дифференцируемые функции в R^n

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=a\in R^n$, где $a=(a_1,a_2,...a_n)$. Возрастающие непрерывные функции $\varphi_i(x_i)$, $i=1,2,\ ...,n$ определены в окрестности точки $x_i=a_i\in R$.

Определение 1. Приращением $\Delta f(x)$ функции $f(x)= f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $x=a$ называется разность $\Delta f(x)=f(x)- f(a)$. Разность $\Delta x = x - a$ называется приращением аргумента x, разность $\Delta\varphi(x)= \varphi(x)-\varphi(a)$ называется приращением вектор-функции

$\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi(x_2),...,\varphi(x_n))$, где $x= (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Длина вектора Δx обозначается через $/\Delta x/$ и равна

$$\rho(x,a)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2}$$

Определение 2. Линейная функция от приращения $\Delta\varphi(x)$ называется дифференциалом $d_\varphi f(x)$ функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ в точке $x=a$, если приращение $\Delta f(x)$ при $\Delta x\to 0$ можно представить в виде

$$\Delta f(x)=d_{\varphi}f(x)+o\left(\left|\Delta\varphi(x)\right|\right)$$

Будем говорить, что функции $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)=(\varphi_1(x_1),\varphi(x_2),\ldots,\varphi(x_n))$ в точке $x=a$, если существует дифференциал $d_{\varphi}f(x)$ функции $f(x)$ по $\varphi(x)$ в точке $x=a$.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x=a$, то она непрерывна в этой точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно следует из того, что приращение $\Delta f(x)$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Поскольку $d_{\varphi}f(x)$ - линейная функция, ее можно записать в виде

$$d_{\varphi}f(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta\varphi_i(x_i),$$

где A_1 – некоторые вещественные числа и $\Delta\varphi_i(x_i)=\varphi_i(x_i)-\varphi_i(a_i)$.

Если $f(x)=\varphi_i(x_i)$, то $d_{\varphi}f(x)=d\varphi_i=\Delta\varphi_i(x_i)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $f(x)$ дифференцируема по $\varphi(x)$ в точке $x=a$, тогда все координатные функции $\psi_i(x_i)=f(a_1,\ldots,x_i,\ldots,a_n)$ дифференцируемы по $\varphi_i(x_i)$ в точках $x_i=a_i$, $i=1,\ldots,n$, причем

$$A_i=\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В формуле для приращения $\Delta f(x)$ в точке $x=a$ через его дифференциал положим $x_r=a_r$, при $r\neq i$. Получим

$$\Delta f(x)=A_i\,\Delta\varphi_i(x_i)+o(|\Delta\varphi_i(x_i)|).$$

Тогда согласно определению функции $\psi_i(x_i)$ будем иметь

$$f(x)-f(a)=\psi_i(x_i)-\psi_i(a_i)=A_s\Delta\psi_i(x_i)+o(|\Delta\psi_i(x_i)|),$$

т.е.

$$A_i=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\psi_i(x_i)-\psi_i(a_i)}{\varphi_i(x_i)-\varphi_i(a_i)}=\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i).$$

Определение 3. Производная $\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i)$, когда она существует, называется частной производной функции *f(x)* по $\varphi_i(x_i)$ в точке $x=a$, по i -й переменной и обозначается так:

$$\frac{d\psi_i}{d\varphi_i}(a_i)=\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}(a)=\left.\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_i}\right|_{x=a}.$$

Следствие. Дифференциал функции *f(x)* по $\varphi(x)$ в точке $x=a$ однозначно записывается в виде

$$d_\varphi f(x)\Big|_{x=a}=\frac{\partial f(a)}{\partial \varphi_1}\Delta\varphi_1+...+\frac{\partial f(a)}{\partial \varphi_n}\Delta\varphi_n.$$

Доказательство очевидно.

Итак,необходимым условием дифференцируемости функции по $\varphi(x)$ в точке является существование всех ее частных производных по $\varphi_i(x_i)$ в этой точке.

Теорема 2. Пусть в некоторой окрестности точки $x=a$ существуют все ее частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_i}, i=1,...,n,$ и эти частные производные непрерывны в точке $x=a$.

Тогда функция *f(x)* является дифференцируемой по $\varphi(x)$ в этой точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Только для краткости записи будем считать,что $n=2$. Приращение $\Delta f(x,y)$ функции *f(x,y)* в точке *(a,b)* можно записать так:

$$\Delta f(x,y)=f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a,b)=(f(a+\Delta x, b+\Delta y)- f(a,b+\Delta y))-(f(a,b+\Delta y)-f(a,b)).$$

К каждой из двух разностей в скобках можно применить формулу обобщенных конечных приращений Лагранжа, поскольку в рассматриваемой окрестности точки *(a,b)* функции *f(x,y)* имеет непрерывные частные производные по $\varphi_1(x)$ и по $\varphi_2(y)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ – возрастающие непрерывные функции. Получим

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a+\xi\Delta\varphi_1,b+\Delta y)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a_1,b+\eta\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2,$$

где $\Delta\varphi_1=\varphi_1(a+\Delta x)-\varphi_1(a)$, $\Delta\varphi_2=\varphi_2(b+\Delta y)-\varphi_2(b)$, ξ, η - некоторые постоянные, $0<\xi$, $\eta<1$.

Далее, в силу непрерывности частных производных при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$ имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial f(a+\xi\,\Delta\varphi_1,b+\Delta\varphi_2)}{\partial\varphi_1}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}+o(1),$$

$$\frac{\partial f(a,b+\eta\Delta y)}{\partial\varphi_2}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}+o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2+o\left(|\Delta\varphi_1|+|\Delta\varphi_2|\right).$$

Поскольку

$$|\Delta\varphi_1|\le|\Delta\varphi|,\ |\Delta\varphi_2|\le|\Delta\varphi|,\ \Delta\varphi=(\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2),\ |\Delta\varphi|=\sqrt{|\Delta\varphi_1|^2+|\Delta\varphi_2|^2},$$

Имеем

$$\Delta f(x,y)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_1}\Delta\varphi_1+\frac{\partial f(a,b)}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2+o\left(|\Delta\varphi|\right)=d_\varphi f(x,y)+o\left(|\Delta\varphi|\right),$$

т.е. функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x,y)=(a,b)$. Теорема доказана.

12. Дифференциал сложной функции

Теорема. Пусть $u(x)=(u_1(x),\dots,u_m(x))$ есть отображение из R^n *в* R^m, определенное в некоторой окрестности точки $x=a=(a_1,\dots,a_n)$ и дифференцируемое по $\varphi(x)$ в этой точке. Пусть далее, для всякого $\varepsilon>0$ – при отображении $u(x)$ образ некоторой δ- окрестности $0(a,\delta)$ содержится в ε-окрестности точки $b=u(a)$. Пусть, наконец, для любой точки $y\in 0(b,\varepsilon)$ определена числовая функция $f(y)$, которая является дифференцируемой в точке b.

Тогда сложная функция $h(x)=f(u(x))$ является дифференцируемой по $\varphi(x)$ в точке $x=a$, причем имеют место равенства

$$\frac{\partial h(x)}{\partial \varphi_s}=\frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial \varphi_s}+...+\frac{\partial f}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial u_m}{\partial \varphi_s},\ \ s=1,...,n\ .$$

Здесь частные производные по $\varphi_s(x)$ рассматриваются в точке $x=a,$ а частные производные по $y_l,\ l=1,...,m$ – в точке $y=b$.

***Д о к а з а т е л ь с т в о.* Ввиду дифференцируемости функции *f(y)* в точке *y=b* приращение функции *Δf* при произвольном приращение аргумента *Δy=y-b* можно представить так:**

$$\Delta f = df + o\,(|\Delta y|)\,, \qquad (1)$$

где

$$df=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i\,.$$

Но $\Delta y = (\Delta y_1, \dots , \Delta y_m),\ \ b = (b_1 , \dots , b_m),$

$$\Delta y_i=u_i(x)-u_i(a)=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u_i(a)}{\partial \varphi_s}\Delta\varphi_s+o(|\Delta\varphi|). \qquad (2)$$

Тогда учитывая формулу (2), из (1) имеем

$$\Delta h(x)=\Delta f=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial \varphi_s}\right)\Delta\varphi_s+o(|\Delta\varphi|).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие**. (*Правила дифференцирования).* Справедливы следующие формулы:**

1) $d_\varphi(Cu) = C\, d_\varphi u,\ \ \forall C\in R;$

2) $d_\varphi(u\pm v)= d_\varphi u \pm d_\varphi v;$

3) $d_\varphi(uv)=u\, d_\varphi v + v\, d_\varphi u$;

4) $d_\varphi\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v d_\varphi u - u d_\varphi v}{v^2}$ ***при*** $v(a)\neq 0$.

Доказательство. **Ограничимся доказательством только свойства 3).**

Пусть $z = z(u,v) = uv$, **тогда**

$$d_\varphi z=\frac{\partial z}{\partial u}d_\varphi u+\frac{\partial z}{\partial v}d_\varphi v=v d_\varphi u+u d_\varphi v\,.$$

Свойство 3) доказано.

13. Градиент. Частные производные высших порядков

Определение 1**. Вектор** $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial \varphi_n}\right)=\nabla_\varphi f$ **называется градиентом функции** $f(x)$ **по** $\varphi(x)$ **в точке** $x=a$ **и обозначается так:**

$$\nabla_\varphi f = grad_\varphi f\,.$$

Пусть $f(x)$ **имеет в некоторой окрестности** $0(a,\varepsilon)$ **все первые частные производные** $\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_i}$, $i=1,\dots,n.$ **Эти частные производные сами являются функциями от** n **переменных и могут иметь частные производные, т.е. можно определить следующие величины**

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_r}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_s}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_r \partial \varphi_s}=f''_{\varphi_s\varphi_r}=\left(f'_{\varphi_s}\right)'_{\varphi_r},\ s,\ r=1,\dots,n$$

Эти величины называются частными производными второго порядка по $\varphi(x)$**.**

Если $s\neq r$**, то они называются смешанными производными.**

Теорема 1. (*Обобщенная теорема Шварца*). **Пусть функция** $f(x)$ **в некоторой окрестности точки** $x=a$ **имеет смешанные частные производные второго порядка** $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1}$, **причем они непрерывны в точке** $x=a$ **эти производные равны между собой, т.е.**

$$f''_{\varphi_1\varphi_2}(a)=f''_{\varphi_2\varphi_1}(a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Без ограничения общности можно считать, что** $n=2$ **и** $f(x)=f(x_1, x_2)$. **Положим**

$$\Delta^2 f = f(a_1+h_1,a_2+h_2) - f(a_1+h_1, a_2) - f(a_1,a_2+h_2) + f(a_1, a_2),$$

$$u(x_1) = f(x_1, a_2+h_2) - f(x,a_2).$$

Применяя дважды формулу обобщенных конечных приращений, получим

$$u(a_1+h_1)-u(a_1)=\Delta\varphi_1 u'_{\varphi_1}(a_1+\theta_1 h_1)=\Delta\varphi_1\left(f'_{\varphi_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-f'_{\varphi_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2\right)=$$
$$=\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 f''_{\varphi_1\varphi_2}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+\theta_2 h_2),$$

где $\Delta\varphi_1 = \varphi_1(a_1+h_1) - \varphi_1(a_1)$, $\Delta\varphi_2 = \varphi_2(a_2+ h_2) - \varphi_2(a_2)$.

В силу непрерывности функции $f''_{\varphi_1\varphi_2}(x_1, x_2)$ **в точке** $x = a$ **имеем**

$$u(a_1+h_1) - u(a_1) = \Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 (f''_{\varphi_1\varphi_2}(a_1, a_2) + o(1)).$$

С другой стороны

$$u(a_1+h_1) - u(a_1) = v(a_2+h_2) - v(a_2),$$

где

$$v(x_2) = f(a_1+ h_1, x_2) - f(a_1, x_2).$$

Вновь применяя обобщенную теорему Лагранжа, находим

$$v(a_2+h_2) - v(a_2)= \Delta\varphi_2 (f'_{\varphi_2}(a_1+h_1, a_2+\theta'_2 h_2) - f'_{\varphi_2}(a_1, a_2+\theta'_2 h_2))=$$

$$=\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 (f''_{\varphi_2\varphi_1}(a_1+\theta'_1 h_1, a_2+\theta'_2 h_2) = \Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 (f''_{\varphi_2\varphi_1}(a_1, a_2) + o(1)).$$

Отсюда

$$\Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 (f''_{\varphi_1\varphi_2}(a_1, a_2) + o(1))= \Delta\varphi_1\Delta\varphi_2 (f''_{\varphi_2\varphi_1}(a_1, a_2) + o(1)),$$

т.е. получаем справедливость равенства

$$f''_{\varphi_1\varphi_2}(a_1, a_2) = f''_{\varphi_2\varphi_1}(a_1, a_2)$$

Теорема1 доказана.

Следствие**. Обобщенная теорема Шварца имеют место при *n>2*.**

***Д о к а з а т е л ь с т в о*. Надо зафиксировать все переменные, кроме x_r, x_s, и применить доказанную теорему к получившимся функциям.**

Определение 2**. Функция *f(x)* называется дважды дифференцируемой по *φ(x)* в точке, если все первые производные по *φ(x)* дифференцируемы по *φ(x)*. Вообще, функция *f(x)* называется *n* раз дифференцируема по *φ(x)*, если все частные производные *(n-1)-* го порядка по *φ(x)*являются дифференцируемыми функциями по *φ(x)*.**

Т е о р е м а 2**. Для того чтобы функция *f(x)* была *m* раз дифференцируема по *φ(x)* в точке, достаточно, чтобы все частные производные порядка *m* по *φ(x)* были непрерывны в этой точке.**

***Д о к а з а т е л ь с т в о* проводится по индукции.**

14. Дифференциалы высших порядков.

Обобщенная формула Тейлора.

Пусть функция *f(x)* дважды дифференцируема по *φ(x)* в точке $x=a=(a_1, \dots, a_n)$. Зафиксируем приращение $d\varphi=(d\varphi_1, \dots, d\varphi_n) = h = (h_1, \dots, h_n)$. Тогда получим новую функцию *g(x)=g(x,h),* определяемую выражением

$$g(x)=df_\varphi(x)=\sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_s} .$$

Это дифференцируемая функция по *φ(x)* в точке *x=a*, и ее дифференциал равен

$$d_\varphi g(a)=\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g(a)}{\partial \varphi_r} \cdot \Delta\varphi_r ,$$

т.е.

$$d_\varphi g(a)=\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} h_s \cdot \Delta\varphi_r \left(\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_s} \right)\Bigg|_{x=a} .$$

Положим теперь $h_s=\Delta\varphi_s=d\varphi_s$. Тогда получим

$$d_\varphi^2 f(a)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial\varphi_s\partial\varphi_r}\cdot d\varphi_s d\varphi_r.$$

Это выражение называется вторым дифференциалом функции *f(x)* по *φ(x)* в точке *x=a*. Аналогично определяется дифференциал $d_\varphi^k f(x)$ порядка *k*:

$$d_\varphi^k=\sum_{r=1}^{n}\ldots\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^k f(x)}{\partial\varphi_s\ldots\partial\varphi_r}d\varphi_s\ldots d\varphi_r.$$

Очевидно, это выражение можно символически записать так:

$$d_\varphi^k f(x)=\left(\sum_{s=1}^{n}d\varphi_s\frac{\partial}{\partial\varphi_s}\right)^k f(x),$$

где для получения развернутого выражения надо формально возвести выражение в скобках в степень как многочлен, считая символы $d\varphi_s$, $\frac{\partial}{\partial\varphi_s}$ как бы независимыми переменными, а затем к числителю выражения $\frac{\partial^k}{\partial\varphi_s\ldots\partial\varphi_r}$ справа приписать *f(x).*

Т е о р е м а 1. **(***Обобщенная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано***). Пусть функция *f(x)* дифференцируема *k* раз по *φ(x)* в точке *x=a*. Тогда при *x*, стремящемся к *a*, справедлива следующая формула**

$$f(x) = P_k(x) + r(x),$$

где

$$P_k(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k!}d_\varphi^k f(a)\Big|_{d\varphi=\varphi(x)-\varphi(a)},$$

$$r(x)=o\left(|\varphi(x)-\varphi(a)|^k\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Применим метод математической индукции по k. При $k=1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции по $\varphi(x)$. Предположим теперь, что k>1.**

Из условия теоремы вытекает, что функция r(x) в некоторой окрестности V точки $x=a$ имеет все производные до порядка $(k-1)$ включительно по $\varphi(x)$. Кроме того, в точке $x=a$ сама функция r(x) и все ее частные производные по $\varphi(x)$ до k-го порядка включительно равны нулю.

Далее, пусть $x\in U$ и $\Delta x=x-a$. Тогда имеем

$$r(x) = r(x) - r(a) = r(a+\Delta x) - r(a) = D_1+\ldots+D_n ,$$

где при $s=1, \ldots , n$ величины D_s определены равенствами

$$D_s = r(a_1+\Delta x_1, \ldots, a_s+\Delta x_s , a_{s+1} , \ldots , a_n) - r(a_1+\Delta x_1, \ldots , a_{s-1}+\Delta x_{s-1}, a_s , \ldots , a_n) =$$

$$= g(a_s+\Delta x_s) - g(a_s).$$

Отсюда, применяя обобщенную формулу Лагранжа к каждой величине D_s, при некоторых ξ_s с условием $0<\xi_s<1$ получим

$$D_s = g'_{\varphi_s}(a_s+\xi_s\Delta x_s)(\varphi_s(a_s+\Delta x_s)-\varphi_s(a_s)) = r'_{\varphi_s}(a+v_s)\Delta\varphi_s ,$$

где $v_s = (\Delta x_1, \ldots , \Delta x_{s-1}, \xi_s\Delta x_s, 0, \ldots , 0)$. Следовательно,

$$r(x)=\sum_{s=1}^{n} r'_{\varphi_s}(a+v_s)\Delta\varphi_s .$$

Заметим, что точка $a+v_s\in U$ для каждого $s=1, \ldots , n$. Поэтому к частным производным по $\varphi(x)$ в правой части последнего равенства можно применить предположение с заменой значения параметра k на $k-1$. Тогда при всех s от 1 до n будем иметь

$$r'_{\varphi_s}(a+v_s)=o\left(\left|\varphi(x)-\varphi(a)\right|^{k-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$r(x)=o\left(\left|\varphi(x)-\varphi(a)\right|^{k}\right).$$

Теорема 1 доказана.

15. Экстремум фунции многих переменных.

Определение 1. **Точка $a=(a_1, \dots, a_n)\in R^n$ называется точкой строгого локального максимума функции $f(x)$, если существует ε-окрестность $0(a, \varepsilon)$ точки а такая, что для любой точки $x\neq a$ и $x\in 0(a, \varepsilon)$ имеем неравенство $f(x) < f(a)$;**

если $f(x) \leq f(a)$, то точка a – точка нестрогого максимума;

если $f(x) > f(a)$, то точка a – точка строгого минимума;

если $f(x) \geq f(a)$, то точка нестрогого минимума.

Строгие локальные максимумы и минимумы в точке называются локальными экстремумами в точке.

Т е о р е м а 1. *(Необходимое условие экстремума).* **Если a – точка локального экстремума (нестрогого) функции $f(x)$ и существует дифференциал $d_\varphi f(x)$ по $\varphi(x)$ ее в этой точке, то для любого приращения Δx имеем**

$$d_\varphi f(x)\big|_{x=a}=0 \quad \text{или} \quad grad_\varphi f(x)\big|_{x=a}=0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Очевидно, достаточно доказать, что при $s=1, \dots, n$ выполняются равенства**

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial \varphi_s}\right|_{x=a}=0$$

Рассмотрим функцию $g(t)=f(a+tl_s)$, где l_s – направляющий вектор оси $0x_s$. Тогда ясно, что $g(t)$ имеет в нуле точку локального экстремума, откуда $g'_{\varphi_s}(0)=0$ т.е.

$$\left.\frac{dg(t)}{d\varphi_s}\right|_{t=0}=0 .$$

Но так как

$$\left.\frac{\partial f(x)}{d\varphi_s}\right|_{x=a}=g'_{\varphi_s}(0)=0 ,$$

то это доказывает утверждение теоремы 1.

Определение 2. **Точка** $a=(a_1, \dots , a_n)$**, в которой градиент функции** $f(x)$ **по** $\varphi(x)=(\varphi_1, \dots , \varphi_n)$ **обращается в 0, называется стационарной точкой функции** $f(x)$**.**

Заметим, что второй дифференциал $d_\varphi^2 f(x)$ **функции** $f(x)$ **по** $\varphi(x)$ **в точке** $x=a\in R^n$ **квадратичной формой от** n **переменных** $d\varphi_1, \dots , d\varphi_n$ **.**

Определение 3. **Стационарная точка** a **функции** $f(x)$ **называется регулярной, если в этой точке существует второй дифференциал** $d_\varphi^2 f(x)$**, и он является невырожденной квадратичной формой от переменных** $d\varphi_1, \dots , d\varphi_n$ **, т.е. определитель матрицы этой квадратичной формы отличен от нуля.**

Т е о р е м а 2**.** *(достаточное условие экстремума).* **Пусть** $a=(a_1, ..., a_n)$ **есть регулярная стационарная точка функции** $f(x)$**, т.е. дифференциал этой функции по** $\varphi(x)$ **в точке** a **обращается в нуль и существует второй дифференциал по** $\varphi(x)$ **в этой точке с невырожденной квадратичной формой от переменных** $d\varphi_1, \dots, d\varphi_n$ **. Тогда**

1) если в этой точке $d_\varphi^2 f(x)$ **является положительно определенной квадратичной формой, то в точке** $x=a$ **функция** $f(x)$ **имеет локальный минимум;**

2) если в этой точке $d_\varphi^2 f(x)$ **отрицательно определена, то** a **– точка локального максимума;**

3) если $d_\varphi^2 f(x)$ **является неопределенной формой, то точка** a **не является точкой локального экстремума.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Рассмотрим пункт 1). Обозначим через А матрицу квадратичной формы** $d_\varphi^2 f(x)$ **от переменных** $\Delta\varphi_s$ **,** $s=1,\dots, n$**. А через** $S(a)$ **точек** $x\in R^n$ **с условием** $|\Delta\varphi|=1$**, где** $\Delta\varphi=(\Delta\varphi_1, ..., \Delta\varphi_n)$**,** $x=a+\Delta x$**,** $\Delta\varphi=\varphi(x)-\varphi(a)$**. Множество** $S(a)$ **ограничено и является замкнутым, так как совпадает со своей границей** $\partial S(a)$ **и поэтому содержит эту границу. Следовательно,** $S(a)$ **– компакт, а потому на множестве** $S(a)$ **второй дифференциал как функция от** $\Delta\varphi$ **достигает своего минимума** m**, т.е. найдется вектор** $\bar{e}_0, |\bar{e}_0|=1$ **такой, что**

$$d_\varphi^2 f(x)\big|_{x=a,\Delta\varphi=\bar{e}_0} = m > 0 \cdot$$

Заметим, что для любого вектора $\Delta\varphi, \Delta\varphi = |\Delta\varphi|\bar{e},\ |\bar{e}| = 1$ **имеем**

$$d_\varphi^2 f(x)\big|_{x=a,\Delta\varphi} = |\Delta\varphi|^2 d_\varphi^2 f(x)\big|_{x=a,e} \cdot$$

По обобщенной формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получим

$$f(x) - fa) = d_\varphi f(a) + \frac{1}{2} d_\varphi^2 f(a) + o\left(|\Delta\varphi|^2\right) \geq \frac{1}{2}|\Delta\varphi|^2 m(1 + o(1)),$$

т.е. найдетя $\varepsilon > 0$**, такое, что для любой точки** $x \in 0(a, \varepsilon)$ **выполняется неравенство** ***f(x)-f(a)>0*****. Первый пункт рассмотрен.**

Пункт 2) рассматривается аналогично. Перейдем к третьему пункту. В силу неопределенности квадратичной формы $d_\varphi^2 f(a)$ **получим** $m < 0 < M$**, где**

$$M = \sup_{|\Delta\varphi|=1} d_\varphi^2 f(a), \quad m = \inf_{|\Delta\varphi|=1} d_\varphi^2 f(a),$$

причем величина M **достигается на векторе** $\bar{e}_1 = (e_{11}, \ldots, e_{1n})$**, а величина** m **на векторе** $\bar{e}_2 = (e_{21}, \ldots, e_{2n})$**. Тогда для параметра** t**, имеем**

$$f\left(\varphi_1^{-1}(te_{11} + \varphi_1(a_1)), \ldots, \varphi_n^{-1}(te_{1n} + \varphi_n(a_n))\right) = f(a_1, \ldots, a_n) + \frac{1}{2} d_\varphi^2 f(a)\big|_{\Delta\varphi = te_1} o\left(|\Delta\varphi|^2\right) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_n) + \frac{1}{2} t^2 M + o\left(t^2\right) = f(a_1, \ldots, a_n) + \frac{1}{2} t^2 (M + o(1)) > f(a_1, \ldots, a_n),$$

$$f\left(\varphi_1^{-1}(te_{21} + \varphi_1(a_1), \ldots, \varphi_n^{-1}(te_{2n} + \varphi_n(a_n)\right) = f(a_1, \ldots, a_n) + \frac{1}{2} t^2 (m + o(1)) < f(a_1, \ldots, a_n),$$

при $t \to 0$**. Здесь учитываются следующие равенства:**

$$x = (\varphi_1^{-1}(te_1 + \varphi_1(a_1)), \ldots, \varphi_n^{-1}(te_n + \varphi_n(a_n))),\ i = 1, 2,$$

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i = te_i,$$

Из последних двух неравенств следует, что функция *f(x)* в любой окрестности точки a принимает значения, как большие *f*(a) так и меньшие *f(a),* т.е. точка a не является точкой локального экстремума. Теорема 2 доказана.

16. Неявные функции

Пусть заданы точка $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in R^n$, некоторая ее ε-окрестность и множество точек принадлежащих этой ε-окрестности и удовлетворяющих уравнению

$$\bar{\ }, y = 0$$

Определение 1. **Функция $\psi(x)$, зависящая от *(n-1)*-й переменной $\bar{x} = x_1, \quad x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точка $\bar{a}$, называется неявной функцией, соответствующей уравнению $\bar{\ }$, если для любой точки $\bar{\ }$ из этой δ-окрестности имеет место равенство**

Определение 2. **Функция *f(x)* называется гладкой по $\varphi(x)$ в области**

$\varphi(x)$ непрерывны.

Т е о р е м а (*теорема о неявной функции*). **Пусть:**

1)функция **ε-окрестности Ω точки**

$(\ _1, \ldots, a_{n-1}, b) \in R^n$;

2)

4)

Тогда существует единственная функция . . . . некоторой δ-окрестности точки такая, что:

1)

2) для любой точки и дл й δ-окрестности, имеет место р енст о

;

3)функция я ляется л дкой о φ(x), причем

.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как непрер ная Ω и

, то су ест ует амкнут й *n*-мерный куб *K*⊂ *Ω* с центром в точке (*, b)* и с гранями, параллельными осями координат, внутри которого минимальное начение равно *m>0*. Обозначим через *h*-расстояние от точки (*, b)* до граней. В силу того, что функция

возрастает. алее, так как , то и

. В силу непрерывности функции су ествует число δ>0 такое, что для любого значения имеем

и .

Отсюда следует, что на отрезке соединяющем точки и монотонная функция

обращается в нуль только в одной точке .

Каждой точке поставим в соответствие точки . Оно определяет функцию для которой

, при том из равенства имеем

.

Функция является искомой. адо только доказать, что дифференцируема по в области , причем

.

Докажем сначала непрерывность . усть точки и принадлежит . окажем, что при . оложим

Тогда

.

Отсюда, в силу теоремы Лагранжа имеем

при , т.е. - является непрерывной функцией.

Для

имеем

Пусть

Отсюда

где *s=1,…,n-1.* Далее в силу непрерывности частных производных и

>0 получим

.

Теорема доказана.

17. Система неявных функций

Рассмотрим отображение $f: R^n \rightarrow R^m$,

Пусть все функции являются гладкими по $\varphi(x)$ в ε-окрестности точки . Тогда такое отображение называется гладким по $\varphi(x)$.

Определение 1. Пусть функции дифференцируемы по в точке . Тогда матрица

имеющая m строк и n столбцов, называется матрицей Якоби отображения по

Строки матрицы Якоби по представляют собой градиенты функций по , $k=1,..,n$.

***m ≤ n*. Рассмотрим какие-либо *m* различных столбцов матрицы *J*.**

Они образуют подматрицу *J(k₁,…,kₘ)* порядка *mxm* матрицы *J*, где *k₁,…,kₘ* – номера выбранных столбцов.

Определение 2**. Определеитель H матрицы *J(k₁,…,kₘ)*называется Якобианом (одним из якобианов) отображения по и обозначается**

Определение 3. **Дифференцируемое отображение по называется невырожденным в точке , если один из Якобианов этого отображение отличен от нуля.**

Это означает, что:

1) матрица *J* имеет максимальный ранг или

2) градиенты функций по линейно независимы в этой точке.

Т е о р е м а *(теорема о системе неявных функций)*. **Пусть *n=m+p, p>0* и пусть :**

1) отображение *f: R ⁿ→ R ᵐ,* - невырожденное в точке где и гладкое по в некоторой окрестности точки

2) ;

3) .

Тогда в некоторой окрестности точки существует единственное гладкое по отображение где , обладающее следующими свойствами:

1) ;

2) для всех имеем ;

3) где .

Здесь А и В – две части матрицы Якоби отображения по отвечающее переменным соответственно.

Замечание **. Матричное равенство 3) дает выражение для всех частных производных вида**

Д о к а з а т е л ь с т в о. **Рассмотрим определитель Якоби матрицы А. Разложим его по последнему столбцу. Получим:**

Так как не обращается в нуль в точке то по крайней мере один из миноров матрицы А не равен нулю . Без ограничения общности можно считать, что

Будем проводить доказательство методом математической индукции по числу уравнений *m*. При *m=1* утверждение теоремы доказано в предыдущем параграфе. Предположим, что теорема верна для *m-1* уравнения. Докажем ее для m уравнений. Поскольку , применяя предположение индукции к функциям , получим, что существуют функции удовлетворяющие условиям для любой точки в некоторой окрестности Ω_0 точки Подставим теперь $\Phi_1,...,\Phi_{m-1}$ в функцию . Имеем:

Покажем, что в точке . Действительно,

5)

- -

Домножим первое уравнение на H_1, второе - на H_2 и т.д. Сложим получившиеся выражения. В результате будем иметь

так как при $k \neq m$ справедливо равенство

а при $k=m$ эта сумма равна H.

Далее поскольку H и H_1 не равны нулю,

Следовательно, по теореме о неявной функции существует единственная функция такая, что в некоторой окрестности точки точки , где

При *k = 2, …, m* в области имеем .

Для функции определив дифференциал по при *k=1,…, m* имеем

.

В векторном виде это можно записать так:

,

где

Далее, имеет место равенство

где

.

Таким образом получим

т.е. .

Итак, линейное отображение переводит любой вектор в нулевой вектор. Следовательно, это нулевое отображение и

т.е. .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Т. I, II. М.:Изд-во Моск. Ун-та, 1985.

2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

3. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: «Высшая школа», 1999.