ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА ВТОРОГО И ПЕРВОГО РОДА

Проф. др. Авыт АСАНОВ

Кыргызско-Турецкий Университет «Манас», Инженерный факультет

1. Постановка задачи и предварительные результаты.

Всюду будем считать, что функция $\varphi(x)$ – возрастающая непрерывная функция на G, где $G = [t_o, T]$ $(t_o < T < \infty)$ или $G = [t_o, T)$ $(T \leq \infty)$.

Рассмотрим следующие интегральные уравнения:

$$u(t) = \int_{t_o}^{t} K(t, s)\, u(s)\, d\varphi(s) + f(t), \qquad (1)$$

$$u(t) = \int_{t_o}^{t} K(t, s, u(s))\, d\varphi(s) + f(t), \qquad (2)$$

$$\int_{t_o}^{t} K(t, s)\, u(s))\, d\varphi(s) = f(t), \qquad (3)$$

$$\int_{t_o}^{t} K(t, s, u(s))\, d\varphi(s) = f(t), \qquad (4)$$

где $t \in G$, $K(t, s)$, $K(t, s, u)$ и $f(t)$ - известные функции, а $u(t)$- неизвестная функция.

В общем случае, уравнения (1), (2), (3) и (4) не сводятся к интегральным уравнениям Вольтерра, так как интеграл Стильтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега [1]. Поэтому изучение интегральных уравнений (1), (2), (3) и (4) представляет самостоятельный интерес. Интегральные уравнения (1), (2), (3) и (4) будем называть соответственно линейным интегральным уравнением Вольтерра-Стильтьеса второго рода, нелинейным интегральным уравнением Вольтерра-Стильтьеса второго рода, линейным интегральным уравнением Вольтерра-Стильтьеса первого рода и нелинейным интегральным уравнерием Вольтерра-Стильтьеса первого рода. Вопросам исследования интегральных уравнений Вольтерра посвящено большое количество работ (см. например [2-6]).

В этой работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции, мы исследуем интегральные уравнения (1), (2), (3) и (4) . Понятие производной по возрастающей функции введено в работу автора [7].

Теорема 1.1. Пусть φ*(t)*- возрастающая функция на G, f (t, s) и $'_{(t)}$ (t, s)-непрерывные функции на $G_1 = \{(t, s): t_o \le s \le t \le T\}$ или на $G_1 = \{(t, s): t_o \le s \le t < T\}$,

$$F(t) = \int_{t_o}^{t} f(t, s)\, d\varphi(s),\ t \in G,$$

где $f'_{\varphi(t)}$ (t, s)- производная функции по φ*(t)*, т.е.

$$f'_{\varphi(t)}(t, s) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t, s) - f(t, s)}{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}.$$

Тогда существует F'_{φ}(t) т.е. производная функции F(t) по φ*(t)* и справедлива формула

$$F'_{\varphi}(t) = f(x, x) + \int_{t_o}^{t} f'_{\varphi(t)}(t, s)\, d\varphi(s),\ t \in G, \qquad (5)$$

где

$$F'_{\varphi}(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{F(t_o+\Delta t) - F(t_o)}{\varphi(t_o+\Delta t) - \varphi(t_o)}, \qquad F'_{\varphi}(T) = \lim_{\Delta t \to 0-} \frac{F(T+\Delta t) - F(T)}{\varphi(T+\Delta t) - \varphi(T)},$$

$$f'_{\varphi(t)}(t_o, s) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{f(t_o+\Delta t, s) - f(t_o, s)}{\varphi(t_o+\Delta t) - \varphi(t_o)},$$

$$f'_{\varphi(t)}(T, S) = \lim_{\Delta t \to 0-} \frac{f(T+\Delta t, s) - f(T, s)}{\varphi(T+\Delta t) - \varphi(T)}.$$

Доказательство. По определению производной по φ*(t)*, имеем

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int_{t_o}^{t+\Delta t}[f(t+\Delta t,s)-f(t,s)]d\varphi(s)+\int_{t}^{t+\Delta t}f(t,s)d\varphi(s)\right\}/$$

$[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)] =$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int_{t_o}^{t+\Delta t}\frac{f(t+\Delta t,s)-f(t,s)}{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}d\varphi(s)+f(t,t)+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{t}^{t+\Delta t}(f(t,s)-f(t,t))d\varphi(s)\right]\Big/[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]\right\}=f(t,t)+\int_{t_o}^{t}f'_{\varphi(t)}(t,s)d\varphi(s)+$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\psi(t,\Delta t),$$

где

$$\psi(t,\Delta t)=\left(\int_{t}^{t+\Delta t}(f(t,s)-f(t,t))d\varphi(s)\right)\Big/[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)].$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi(t)$- возрастающая функция на G, получим

$$\psi(t,\Delta t)\le\left[\omega_f(\Delta t)\left(\int_{t}^{t+\Delta t}d\varphi\right)\right]\Big/[\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)]=\omega_f((\Delta t)),$$

где $\omega_f(\delta)$- модуль непрерывности функции f(t, s), т.е.

$$\omega_f(\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)|,$$

$$x=(t_1,s_1),\ \ y=(t_2,s_2),\ \ |x-y|=\sqrt{(t_2-t_1)^2+(s_2-s_1)^2}.$$

Известно, что $\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}|\psi(t,\Delta t)|\le.\ \lim_{\Delta t\to 0}\omega_f(|\Delta t|)=0.$$

Следовательно, справедливость формулы (5) доказана.

Теорема 1.2. (Обобщенная формула Дирихле). Пусть $\varphi(t)$- возрастающая непрерывная функция на G и f(t, s)- непрерывная функция в области $G_1 = \{ (t, s):$

$t_o \le s \le t \le T \}$ или $G_2 = \{ (t, s): \quad t_o \le s \le t < T \}$. Тогда при всех $t \in G$ справедлива формула

$$\int_{t_o}^{t} \left[\int_{t_o}^{s} f(s,\tau)d\varphi(\tau) \right] d\varphi(s) \quad = \quad \int_{t_o}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s) \right] d\varphi(\tau) .$$

(6)

Доказательство. Правую часть формулы (6) обозначим через u(t), а левую часть формулы (6) обозначим через v(t) . Нам достаточно доказать, что u(t) = v(t) при всех $t \in G$. В силу теоремы 1.1, имеем

$$u'_{\varphi} = \left(\int_{t_o}^{t} \left[\int_{t_o}^{s} f(s,\tau)d\varphi(\tau) \right] d\varphi(s) \right)'_{\varphi(t)} = \int_{t_o}^{t} f(t, \tau)d\varphi(\tau),$$

$$v'_{\varphi} =$$

$$\left(\int_{t_o}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s) \right] d\varphi(\tau) \right)'_{\varphi(t)} = \left(\int_{t_o}^{t} \left[\int_{\tau}^{t} f(s,\tau)d\varphi(s) \right]'_{\varphi(t)} d\varphi(\tau) \right) =$$

$$= \int_{t_o}^{t} f(t, \tau)d\varphi(\tau).$$

Отсюда вытекает, что $[u(t) - v(t)]'_{\varphi(t)} = 0$ при всех $t \in G$. Тогда в силу теоремы работы [7] получим, что *u(t) – v(t) = C - const*. Но $u(t_o) - v(t_o) = 0$. Поэтому

u(t) – v(t) =0 при всех $t \in G$. Теорема 1.2 доказана.

Теорема 1.3. (Обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана). Пусть $\varphi(t)$- возрастающая непрерывная функция на G, $u(t)$ – неотрицательная непрерывная функция на G и выполняется неравенства

$$u(t) \le a + \int_{t_o}^{t} c\, u(s)\, d\varphi(s), \quad t \in G .$$

где a и c- известные положительные постоянные. Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \le a \exp[c(\varphi(t) - \varphi(t_o))], \quad t \in G . \tag{7}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$v(t) = a + \int_{t_o}^{t} c\, u(s)\, d\varphi(s), \quad t \in G .$$

Тогда в силу теоремы 1.1, имеем

$$v'_{\varphi}(t) = cu(t) \le c\, v(t), \quad t \in G .$$

Отсюда, интегрируя от 0 до t, учитывая что $v(t_o) = a$ и $u(t) \le v(t)$ при $t \in G$, получим требуемое неравенство (7). Теорема 1.3 доказана.

2. Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго рода

Пусть ядро $K(t, s)$ интегрального уравнения (1) непрерывная функция в области $G_1 = \{(t, s) |\ t_o \le s \le t \le T\}$ и

$$M = \sup_{(t,s)\in G_1} |K(t, s)| .$$

Тогда решение $R(t, s)$ следующего интегрального уравнения

$$R(t, s) = \int_{s}^{t} K(t, \tau) R(\tau, s)\, d\varphi(\tau) + K(t,s), \quad (t, s) \in G_1 , \tag{8}$$

будем называть резольвентой ядро $K(t,s)$.

Теорема 2.1. Пусть $\varphi(t)$- возрастающая непрерывная функция в области $[t_o, T]$, $K(t,s)$ - непрерывная функция в области G_1 и $f(t) \in C[t_o, T]$. Тогда

1)уравнение (8) имеет единственное решение $R\,(t, s)$ в пространстве C (G_1) ;

2)уравнение (1) имеет единственное решение $u(t)$ в пространстве C[t_o, T] и $u(t)$ представимо в виде

$$u(t) = f(t) + \int_{t_o}^{t} R(t, \tau)f(\tau)d\,\varphi(\tau),\ \ t\in [t_o, T]. \qquad (9)$$

Доказательство. 1) Сначала докажем единственность решения уравнения (8). Пусть $R_1(t, s)$ и $R_1(t, s)$ - произвольные два решения уравнения (8) из пространства C (G_1). Тогда

$$R_1(t, s) – R_2(t, s) = \int_{s}^{t} K(t, \tau)[R_1(\tau, s) – R_2(\tau, s)]\, d\varphi(\tau),\ (t, s) \in G_1.$$

Из этого уравнения, имеем

$$|R_1(t, s) – R_2(t, s)| \le \int_{s}^{t} \mathrm{M}\, |R_1(\tau, s) – R_2(\tau, s)|\, d\varphi(\tau) + \frac{1}{n},$$

где $(t, s) \in G_1,\ n\in N$ – множество натуральных чисел. Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана (теорема 1.3) получим

$$|R_1(\tau, s) – R_2(\tau, s)| \le \frac{1}{n} exp\,\{M\,[\varphi(t) - \varphi(s)]\} \le \frac{1}{n} exp\,\{M\,[\varphi(T) - \varphi(t_o\,)]\},$$

для всех $(t, s) \in G_1,\ n\in N$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, из последнего неравенства имеем $R_1(t, s) – R_2(t, s)$ для $(t, s) \in G_1$.

Далее, докажем существование решения уравнения (8) в пространстве

C(G_1). Для решения уравнения (8) применим метод последовательных приближений:

$R_o(t, s) = K(t, s)$

$$R_n(t, s) = \int_{s}^{t} K(t, \tau)R_{n-1}(\tau, s)\, d\varphi(\tau) + K(t, s), \qquad (10)$$

где $n \in N$. Методом математической индукции, из (10) получим следующие оценки:

$|R_o(t, s)| \le M,$

$$|R_n(t, s) - R_{n-1}(t, s)| \le M^{\,n+1} \frac{[\varphi(t) - \varphi(s)]^n}{n!}\ , \qquad (11)$$

где $(t, s) \in G_1$, $n \in N$. Из оценки (11) имеем

$$\sup_{(t,s)\in G_1} |R_n(t, s) - R_{n-1}(t, s)| \le M^{n+1} \frac{[\varphi(T) - \varphi(t_o)]^n}{n!}, \qquad (12)$$

для всех $n \in N$. В силу оценки (12) следует, что функциональный ряд

$$R_o(t, s) + \sum_{n=1}^{\infty} [R_n(t, s) - R_{n-1}(t, s)],$$

в области G_1 равномерно сходится к $R(t, s)$ и $R(t, s)$ является единственным решением уравнения (8) из пространства C (G_1).

2).Сначала докажем единственность решения уравнения (1). Для этого нам достаточно доказать, что уравнение (1) для $f(t) \equiv 0$ имеет только нулевое решение. Пусть $f(t) \equiv 0$ в области $[t_o, T]$. Тогда, из (1) имеем

$$|u(t)| \le \int_{t_o}^{t} \mathrm{M}\, |u(s)|\, d\varphi(\tau) + \frac{1}{n},\ t\in [t_o, T],\ n \in N.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана (теорема 1.3) и переходя к пределу при $n \to\infty$ получим, что $u(t) \equiv 0$ в области $[t_o, T]$.

Далее, докажем что функция $u(t)$- определенное по формуле (9) является единственным решением уравнения (1) из пространства $C[t_o, T]$. Из (9) нетрудно убедиться, что если $f(t)\in C[t_o, T]$, то $u(t) \in C[t_o, T]$. Подставляя формулы (9) в уравнение (1), применяя обобщенную формулу Дирихле (теорема 1.2) и учитывая что $R(t, s)$ является решением уравнения (8), получим:

$$\int_{t_o}^{t} [R(t,s) - \int_{s}^{t} K(t, \tau)R(\tau, s)\, d\varphi(\tau) - K(t, s)]\, f(s)\, d\varphi(s) = 0,$$

для всех $t \in [t_o, T]$. Теорема 2.1 доказана.

Теорема 2.2. Пусть $\varphi(t)$ - возрастающая непрерывная функция в области $[t_o, T]$, $K(t, s) \in C(G_1)$ и $f(t) \in C[t_o, T]$. Тогда

1) для решения $R(t, s)$ уравнение (8) справедлива оценка

$| R(t, s) | \le M \exp\{M [\varphi(t) - \varphi(s)]\}$,

для всех $(t,s) \in G_1$;

2) для решения $u(t)$ уравнение (1) справедлива оценка

$$\| u(t) \|_c = \sup_{t \in [t_o, T]} | u(t) | \le c_o \|f(t)\|_c , \qquad (13)$$

где $c_o = \exp\{M [\varphi(T) - \varphi(t_o)]\}$.

Доказательство. 1) Из (8), имеем

$$| R(t, s) | \le \int_s^t M \, | R(\tau, s)| \, d\varphi(\tau) + M, \quad (t, s) \in G_1.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана получим требуемую оценку.

3) Из (1), имеем

$$| u(t) | \le \int_{t_o}^t M \, |u(s)| \, d\varphi(s) + \| f(t)\|_c , \quad t \in [t_o, T].$$

Отсюда, используя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана получим требуемую оценку (13). Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. Пусть $\varphi(t)$ - возрастающая непрерывная функция в области $[t_o, T]$, $K(t, s) = a(t)b(s)$, $a(t), b(t), f(t) \in C [t_o, T]$. Тогда

1) решение $R(t, s)$ уравнение (8) определяется по формуле

$$R(t, s) = a(t)b(s) \exp \{\int_s^t a(\tau)\, b(\tau)\, d\varphi(\tau)\}, \ (t, s) \in G_1. \qquad (14)$$

2) решение $u(t)$ уравнение (1) определяется по формуле

$$u(t) = f(t) + \int_{t_o}^t a(t)b(s) \exp \{\int_s^t a(\tau)\, b(\tau)\, d\varphi(\tau)\} f(s)\, d\varphi(s), \qquad (15)$$

при $t \in [t_o, T]$.

Доказательство. 1) Проверим, что $R(t, s)$ определенное по формуле (14) удовлетворяет уравнение (8):

$$\int_s^t K(t, \tau)\, R(\tau, s)\, d\varphi(\tau) = \int_s^t a(t)\, b(\tau)\, a(\tau)\, b(s) \exp \{\int_s^\tau a(\tau)\, b(\tau)\, d\varphi(\tau)\}\, d\varphi(\tau) =$$

$$= a(t)b(s)\exp\{\int_s a(\tau)\, b(\tau)\, d\varphi(\tau)\}\Big|_{\tau=s}^{\tau=t} = R(t,s) - K(t,s).$$

Отсюда, видно что $R(t, s)$ удовлетворяет уравнение (8).

3) Справедливость формулы вытекает, из формулы (9) (теорема 2.1) и (14). Теорема 2.3 доказана.

3. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса второго рода

В дальнейшем будем говорить, что для функции $K(t, s, u)$ заданное в уравнении (2) выполнено условие (M), если:

$K(t, s, u)$ в области $G_1 \times R$ непрерывная функция и удовлетворяет по u условию Липшица с коэффициентом L, т.е. для любых $(t, s, u_1), (t, s, u_2) \in G_1 \times R$.

$| K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2)| \leq L\, | u_1 - u_2|$.

Теорема 3.1. Пусть выполняется условие (M) и $f(t) \in C[t_o, T]$. Тогда:

1) уравнение (2) имеет единственное решение в пространстве $C[t_o, T]$;

2) если $u_1(t)$ является решением уравнения (2) при $f(t) = f_1(t) \in C[t_o, T]$, и $u_2(t)$ является решением уравнения (2) при $f(t) = f_2(t) \in C[t_o, T]$, то справедлива оценка

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_c \leq c_1\, \| f_1(t) - f_2(t) \|_c , \qquad (16)$$

где $c_1 = \exp\{L[\varphi(T) - \varphi(t_o)]\}$, $\|\cdot\|_c$ – норма в $C[t_o, T]$.

Доказательство. 1) Для решения уравнения (2) применим метод последовательных приближений

$$u_o(t) = f(t) + \int_{t_o}^{t} K(t, s, 0)\, d\varphi(s),$$

$$u_n(t) = \int_{t_o}^{t} K(t, s, u_{n-1}(s))\, d\varphi(s) + f(t), \qquad (17)$$

где $n \in N$. Учитывая условие (M) и методом математической индукции из (17) получим следующие оценки

$$| u_o (t) | \le \sup_{t\in[t_o, T]} | f(t) + \int_{t_o}^{t} K(t, s, 0)\, d\varphi(s) | = M_o ,$$

$$| u_n (t) - u_{n-1}(t) | \le M_o L^n \frac{[\varphi(t) - \varphi(t_o)]^n}{n!},$$

где $t\in [t_o, T], n \in N$. Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(t) - u_{n-1}(t)]$$

в области $[t_o, T]$ равномерно сходится к $u(t)$ и $u(t)$ является непрерывным решением уравнения (2). Единственность решения уравнения (2) вытекает из оценки (16). Сейчас докажем оценку (16).

2)Учитывая, что $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением уравнения (2) соответственно для $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$ и условие (M) , из (2) имеем

$$| u_1 (t) - u_2(t) | \le \int_{t_o}^{t} L\, | u_1 (s) - u_2(s) |\, d\varphi(s) + || f_1(t) - f_2(t) ||_c ,$$

при $t\in [t_o, T]$. Отсюда, в силу обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана получим требуемое оценки (16). Теорема 3.1 доказана.

4. Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса первого рода

Рассмотрим теперь уравнение (3). Для того, чтобы уравнение (3) имело непрерывное решение $u(t)$, необходимо выполнение условия $f(t_o) = 0$. Далее, если ядро $K(t,s)$ в области G_1 имеет непрерывную производную $\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}$ по $\varphi(t)$, то в силу теоремы 1.1 левая часть (3) также имеет непрерывную производную по $\varphi(t)$, откуда следует, что и $f(t)$ должна иметь непрерывную производную $f'_{\varphi}(t)$.

Дифференцируя обе части (3) по $\varphi(t)$ и учитывая теоремы 1.1, имеем

$$K(t,t)\, u(t) + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}\, u(t)\, d\varphi(s) = f'_{\varphi}(t). \tag{18}$$

Ясно, что решение $u(t)$ уравнения (3) удовлетворяет уравнения (18), и наоборот.

Пусть $K(t,t)$ не обращается в нуль ни в одной точке отрезка $[t_o, T]$. Деля обе части (18) на $K(t, t)$, получим

$$u(t) + \int_{t_o}^{t} \left[\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)} \Big/ K(t,t) \right] u(s) d\varphi(s) = \frac{f'_{\varphi}(t)}{K(t,t)}.$$

Это – линейное интегральное уравнение Вольтерра-Стильтьеса второго ряда, и к нему может быть применена развитая выше теория таких уравнений. Таким образом доказана.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_o, T]$, $K(t,s)$ в области G_1 имеет непрерывное производное $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)}$ и $K(t, t) \neq 0$ при всех $t \in [t_o, T]$. Тогда, для того чтобы уравнение (3) имело единственное непрерывное решение на $[t_o, T]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ в $[t_o, T]$ имела непрерывное производное $f'_{\varphi}(t)$ и $f(t_o) = 0$.

Если $K(t, t)$ тождественно равно нулю, то уравнение (18) есть опять уравнение первого рода, с которым можно поступать так же, как с первоначальным, если только $K(t, s)$ имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial^2 K(t,s)}{\partial \varphi^2(t)}$. При этом, чтобы уравнение (18) имело непрерывное решение, необходимо, чтобы

$f'_{\varphi}(t_o) = 0$ и $f''_{\varphi}(t)$ была непрерывна. Дифференцируя обе части (18) по $\varphi(t)$

$(K(t, t) \equiv 0)$ и учитывая теоремы 1.1, имеем

$$\left[\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)} \right|_{s=t} \right] u(t) + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial \varphi^2(t)} u(s) \, d\varphi(s) = f''_{\varphi}(t).$$

(19)

Если $\left[\left. \dfrac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)} \right|_{s=t} \right]$ отлична от нуля на $[t_o, T]$, то уравнение (19) является линейным интегральным уравнением Вольтерра-Стильтьеса второго рода.

Таким образом, этот процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к производной $\dfrac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}$, которая при $s = t$ не обращается тождественно в нуль. При этом, чтобы уравнение (3) имело решение $u(t) \in C\,[t_o, T]$, необходимо, чтобы $f(t)$ в $[t_o, T]$ имеет непрерывное производное $f_\varphi^{(n-1)}(t)$ и $f(t_o) =$

$= f'_\varphi(t_o) = \ldots = f_\varphi^{(n-1)}(t_o) = 0.$

Если производная $\dfrac{\partial^{n}K(t,s)}{\partial\varphi^{n}(t)}$ непрерывна, то непрерывной должна быть $f_\varphi^{(n)}(t)$, и мы приходим к уравнению

$$\left[\left.\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right] u(t)+\int_{t_o}^{t}\frac{\partial^{n}K(t,s)}{\partial\varphi^{n}(t)}\,u(s)\,d\varphi(s) = f_\varphi^{(n)}(t)\,. \qquad (20)$$

Ясно, что если $\left[\left.\dfrac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right]$ не обращается в нуль на $[t_o, T]$, то уравнение (20) является линейным интегральным уравнением Вольтерра-Стильтьеса второго рода. В этом случае уравнение (20) имеет единственное непрерывное решение, которое удовлетворяет исходному уравнению (3). Таким образом доказана

Теорема 4.2. Пусть $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_o, T]$, $K(t, s)$ в области G_1 имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial^{n}K(t,s)}{\partial\varphi^{n}(t)}$, $n \geq 2,\ n\in N,$

$$K(t,\ t) \equiv \left[\left.\frac{\partial K(t,s)}{\partial\varphi(t)}\right|_{s=t}\right] \equiv \ldots\equiv \left[\left.\frac{\partial^{n-2}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-2}(t)}\right|_{s=t}\right]\equiv 0\ ,$$

$$\left[\left.\frac{\partial^{n-1}K(t,s)}{\partial\varphi^{n-1}(t)}\right|_{s=t}\right]\neq 0$$

при всех $t \in [t_o, T]$. Тогда, для того чтобы уравнение (3) имела единственное непрерывное решение на $[t_o, T]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ на $[t_o, T]$ имело непрерывное производное $f_\varphi^{(n)}(t)$ и $f(t_o) = f'_\varphi(t_o) = \ldots =$ $= f_\varphi^{(n-1)}(t_o) = 0.$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t (1 + t^4 - s^4)s\, u(s) = f(t), \quad t \in [0, 1]. \qquad (21)$$

Ясно, что если данное уравнение дифференцируем по t, то уравнение (21) сводится к уравнениям Вольтерра третьего рода.

Уравнение (21) запишем в виде уравнения Вольтерра-Стильтьеса

$$\frac{1}{2}\int_0^t (1 + t^4 - s^4)\, u(s)\, d(s^2) = f(t), \quad t \in [0, 1] \qquad (22)$$

Здесь $\varphi(t) = t^2$, $K(t,s) = \frac{1}{2}(1 + t^4 - s^4)$, $K(t, t) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial K(t,s)}{\partial \varphi(t)} = t^2$. Поэтому, в силу теоремы 4.1 уравнение (22) т.е. (21) имеет единственное решение в пространстве $C\,[0, 1]$ тогда и только тогда когда функция $f(t)$ имеет непрерывное производное $f'_\varphi(t)$ по $\varphi(t) = t^2$ и $f(0) = 0$. Дифференцируя по $\varphi(t) = t^2$ уравнение (22) сводим к следующему эквивалентному интегральному уравнению второго рода

$$\frac{1}{2} u(t) + \int_0^t t^2\, u(s)\, d(s^2) = f'_\varphi(t), \quad t \in [0, 1].$$

5. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса первого рода

Рассмотрим уравнение (4).

Предположим выполнения следующих условий:

I.функция $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[t_o, T]$, функции

$K(t, s, u)$, $\dfrac{\partial K(t,s,u)}{\partial\varphi(t)}$ являются непрерывным в области G_1 x R , функция $\dfrac{\partial K(t,s,u)}{\partial\varphi(t)}$ в области G_1 x R по u удовлетворяет условие Липшица с коэффициентом L;

II. для любого $t \in [t_o, T]$ и для любого $v\in R$ алгебраическое уравнение

K(t, t, u) = v

имеет единственное решение

$u = F(t, v)$,

где функция $F(t, v)$ в области $[t_o, T]$ x R непрерывная функция и удовлетворяет условие Липшица по v с коэффициентом L_o.

Дифференцируя, уравнение (4) по $\varphi(t)$ имеем

$$K(t, t, u(t)) + \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial\varphi(t)}\, d\varphi(s) = f'_\varphi(t), \quad t\in [t_o, T]$$

Отсюда, в силу условия II , получим

$$u(t) = F(t, f'_\varphi(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial\varphi(t)}\, d\varphi(s)) , \quad t\in [t_o, T] \qquad (23)$$

Таким образом, уравнение (4) свели к интегральному уравнению второго рода (23). Ясно, что если $f'_\varphi(t) \in C[t_o, T]$ и $f(t_o) = 0$, то уравнение (4) и уравнение (23) эквивалентно.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия I, II, $f'_\varphi(t) \in C[t_o, T]$ и $f(t_o) = 0$. Тогда существует единственное решение уравнения (4) в пространстве $C[t_o, T]$.

Доказательство. Для решения уравнения (4) т.е. уравнение (23) применим метод последовательных приближений:

$$u_o(t) = F(t, f'_\varphi(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial\varphi(t)}\, d\varphi(s)) , \qquad (24)$$

$$u_n(t) = F(t, \ {}_f\varphi'(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_{n-1}(s))}{\partial \varphi(t)} \, d\varphi(s),$$

где $n \in N$, $t \in [t_o, T]$.

Учитывая условия I , II и методом математической индукции, из (24) получим следующие оценки:

$$|u_o(t)| \leq \sup_{t \in [t_o, T]} |F(t, \ f'_\varphi(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial \varphi(t)} \, d\varphi(s)| = F_o,$$

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq L_o \int_{t_o}^{t} \left| \frac{\partial K(t,s,u_o(s))}{\partial \varphi(t)} - \frac{\partial \mathrm{K(t,s,0)}}{\partial \varphi(\mathrm{t})} \right| d\varphi(s) \leq$$

$$\leq L_o L \, F_o \, [\varphi(t) - \varphi(t_o)],$$

$$|u_2(t) - u_1(t)| \leq L_o \int_{t_o}^{t} \left| \frac{\partial K(t,s,u_o(s))}{\partial \varphi(t)} - \frac{\partial \mathrm{K(t,s,0)}}{\partial \varphi(\mathrm{t})} \right| d\varphi(s) \leq$$

$$\leq \quad L_o L \int_{t_o}^{t} |u_1(s) - u_o(s)| \, d\varphi(s) \leq F_o (L_o L)^2 \int_{t_o}^{t} [\varphi(t) - \varphi(t_o)]$$

$$d\varphi(s) =$$

$$= F_o (L_o L)^2 \frac{[\varphi(t) - \varphi(t_o)]^2}{2!},$$

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq F_o (L_o L)^n \frac{[\varphi(t) - \varphi(t_o)]^n}{n!},$$

где $n \in N$, $t \in [t_o, T]$. Отсюда, имеем

$$|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq F_o (L_o L)^n \frac{[\varphi(T) - \varphi(t_o)]^n}{n!},$$

где $n \in N$, $t \in [t_o, T]$.

Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_o(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(t) - u_{n-1}(t)]$$

в области $[t_o, T]$ равномерно сходится к $u(t)$ и $u(t)$ является непрерывным решением уравнения (23); т.е. (4).

Сейчас, докажем единственность решения уравнения (23), т.е. (4). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – произвольные два решения уравнения (23) из пространства $C[t_o, T]$. Тогда

$$u_1(t) - u_2(t) = F\left(t, f_\varphi'(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial\varphi(t)} d\varphi(s)\right) -$$

$$-F\left(t, f_\varphi'(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_2(s))}{\partial\varphi(t)} d\varphi(s)\right),\ t \in [t_o, T].$$

Отсюда, в силу условия I и II, имеем

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le L_o L \int_{t_o}^{t} |u_1(s) - u_2(s)|\, d\varphi(s) + \frac{1}{m},$$

где $m \in N$, $t \in [t_o, T]$. Применяя обобщенное неравенства Гронуолла-Беллмана, из последнего неравенства получим

$$|u_1(t) - u_2(t)| \le \frac{1}{m} \exp\{L_o L [\varphi(T) - \varphi(t_o)]\},$$

где $m \in N$, $t \in [t_o, T]$. Отсюда, переходя к пределу при $m \to \infty$, имеем $\| u_1(t) - u_2(t) \|_c = 0$, т.е. $u_1(t) = u_2(t)$ для всех $t \in [t_o, T]$. Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.2. Пусть выполняются условия I, II и $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением уравнения (4) соответственно $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, где $(f_1(t))'_\varphi \in C[t_o, T]$, $(f_2(t))'_\varphi \in C[t_o, T]$, $f_1(t_o) = 0$ и $f_2(t_o) = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_c \le c_2 \| (f_1(t))'_\varphi - (f_2(t))'_\varphi \|_c, \tag{25}$$

где

$c_2 = L_o \exp\{L_o L [\varphi(T) - \varphi(t_o)]\}$.

Доказательство. Учитывая, что $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением уравнения (4) соответственно для $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, условия I и II, из (23) имеем

$$| u_1(t) - u_2(t)| \le L_o L \int_{t_o}^{t} | u_1(s) - u_2(s)| \, d\varphi(s) + L_o \| (f_1(t))'_\varphi - (f_2(t))'_\varphi \|_c , \; t \in [t_o, T]$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана получим требуемую оценку (25). Теорема 5.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.П.Натансон, Теория функций вещественной переменной, ред. В.В.Абгарян, («Наука», Москва, 1974), стр.200, 250.
2. Ф.Трикоми, Интегральные уравнения, (ИЛ, 1960).
3. V.Barbu, SIAM L. Math. Anal. 6(4) (1975).
4. A.L.Bughgeim, Volterra Equations and Inverse Problems, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 204 p.
5. A.M.Denisov, Elements ot the Theory of Inverse Problems, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 272 p.
6. A.Asanov, Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the first kind (VSP, Utrecht-Tokyo, 1998), 276 p.
7. А.Асанов, Манас университети, Табигый Илимдер журналы. 1 (2001).