РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ *KG*

Доц. др. Кыдыралиев Сыргык КАПАРОВИЧ

Американский Университет в Кыргызстане.

Доц. др. Урдалетова Анаркуль БУРГАНАКОВНА

Кыргызско-Турецкий Университет «Манас».

Несмотря на ряд недостатков – большая, по сравнению с методом Гаусса, трудоемкость; невозможность выписывания решения, в случае, когда система имеет множество решений – метод Крамера продолжает успешно применяться.

В свою очередь, для квадратных матриц, метод Крамера, удобнее, чем метод Гаусса в теоретических исследованиях.

В этой работе мы предлагаем метод, который, по нашему мнению, объединяет достоинства методов Крамера и Гаусса.

Кроме того, в работе приводится новое доказательство теоремы Крамера.

1. Обычно, метод вычисления определителя на основе метода математической индукции приводится в списке свойств определителя. Но для предлагаемого метода решения систем линейных алгебраических уравнений, его удобнее ввести в качестве определения, так как вычисление определителя разложением по первому столбцу является основополагающим для метода KG.

Определение. *Определителем (детерминантом) квадратной матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется число, которое обозначается

$$detA \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ *, и вычисляется по правилу:*

а) определитель матрицы порядка 1 равен элементу матрицы:

$det(a)=a;$

в) определитель матрицы порядка n равен

$$detA = a_{11}detA_1 - a_{21}detA_2 + a_{31}detA_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n1}detA_n$$

где $detA_k$ - определитель матрицы порядка n-1, полученной из матрицы A вычеркиванием k-той строки и первого столбца.

Можно утверждать, что не все здесь в порядке. Для того чтобы вычислить определитель матрицы порядка *n* нужно использовать определители матриц порядка *(n-1),* которые неизвестны. К счастью, определение говорит, что определитель матрицы порядка *(n-1)* известен, если известны определители матриц порядка *(n-2)* и т.д. и т.п. К счастью, эта цепочка имеет конец - определитель матрицы первого порядка известен из пункта а).

Прием использованный в определении называется разложением определителя по первому столбцу, числа $detA_k$ - минорами, соответствующими элементам a_{1k} .

Пример1. Вычислим определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$:

Из определения следует, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot \det(d) - c \cdot \det(b) = ad - cb.$

При вычислении определителей второго порядка, нет необходимости каждый раз обращаться к определению. В примере 1, мы показали, что определитель порядка 2 равен произведению элементов матрицы стоящих на главной диагонали минус произведение элементов второй диагонали.

<u>Пример 2</u>. Вычислим определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -10 \\ 7 & 8 & -2 \\ -10 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (-10)\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

3(72 - 0) – 7(-18 - 0) + (-10)(4 + 80) = - 498.

Далее, нам понадобятся хорошо известные свойства определителей [1]:

<u>Свойство 1</u>. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

Это свойство позволяет формулировать свойства только для строк или только для столбцов. По свойству 1, они будут автоматически выполняться и для столбцов и для строк. В частности, оно позволяет вычислять определитель матрицы, используя разложение по строке.

<u>Свойство 2</u>. Если в матрице поменять местами два столбца, то соответствующие определители будут отличаться только знаком.

<u>Свойство 3</u>. Если k-ый столбец матрицы поменять местами с первым столбцом, сохранив порядок остальных столбцов, то полученный определитель равен произведению исходного определителя и $(-1)^{k-1}$.

<u>Свойство 4.</u> Определитель матрицы равен нулю, если она имеет два одинаковых столбца.

<u>Свойство 5</u>. Если к элементам любого столбца матрицы прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на некоторое число, то значение определителя не изменится.

Свойство 6. Если определитель матрицы равен нулю, то существует столбец, являющийся линейной комбинацией остальных столбцов. Верно и обратное утверждение.

Замечание. Стоит отметить, что доказательства этих свойств почти сразу получаются из определения. Мы не приводим их здесь только из соображений экономии места и времени. Исключением может быть только свойство 1.

2. В этом пункте, мы будем говорить о разрешимости системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

Также, будет приведено доказательство правила Крамера, отличающееся от стандартного (см. например [1]).

Теорема 1. Если система (1) имеет два различных решения, то она имеет бесконечно много решений, а определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю.

Доказательство. Пусть $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ различные решения системы (1). Тогда, вычитая равенства

$a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \ldots + a_{mn}p_n = b_m, \qquad m = 1, 2, \ldots n,$

из равенств

$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n = b_m, \qquad m = 1, 2, \ldots n,$

получим, что $a_{m1}(p_1 - q_1) + a_{m2}(p_2 - q_2) + \ldots + a_{mn}(p_n - q_n) = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots n.$

Следовательно, $\{p_1 - q_1,\ p_2 - q_2,\ \ldots\ p_n - q_n\}$ является нетривиальным решением однородной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Из однородности системы следует, что решением системы (2) также является набор чисел

$\{r(p_1 - q_1), r(p_2 - q_2), \ldots, r(p_n - q_n)\}$, где r – любое число.

Отсюда следует, что при любом r набор чисел

$\{q_1 + r(p_1 - q_1), q_2 + r(p_2 - q_2), \ldots, q_n + r(p_n - q_n)\}$ является решением системы (1):

$a_{m1}(q_1 + r(p_1 - q_1)) + a_{m2}(q_2 + r(p_2 - q_2)) + \ldots + a_{mn}(q_n + r(p_n - q_n)) =$

$[a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n] + [a_{m1}(r(p_1 - q_1)) + a_{m2}(r(p_2 - q_2)) + \ldots + a_{mn}(r(p_n - q_n))] =$

$= b_m + 0$, для $m = 1, 2, \ldots n$.

Доказано первое утверждение теоремы – о бесконечном множестве решений. Для того чтобы получить второе, достаточно заметить, что, то что система (2) имеет ненулевое решение, означает, что хотя бы один из столбцов матрицы коэффициентов системы (1) может быть представлен в виде линейной комбинации остальных. Поэтому, по свойству 6, определитель матрицы коэффициентов системы (1) равен нулю.

Проиллюстрируем теорему следующим примером:

Вычислить определитель матрицы коэффициентов системы

$$\begin{cases} 3077x - 3079y + 2z = 0, \\ 1823x + 22y - 1845z = 0, \\ 42x + 7850y - 7892z = 0. \end{cases}$$

Существует много способов выполнить задание. Самый короткий – заметить, что система имеет, по крайней мере, два решения: $\{0; 0; 0;\}$ и

$\{1; 1; 1\}$. Следовательно, определитель матрицы коэффициентов системы, по теореме 1, равен нулю.

Теорема 2. Если определитель матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений (1) отличен от нуля, то система имеет единственное решение $\{\Delta(1)/\Delta;\Delta(2)/\Delta;...;\Delta(n)/\Delta\}$, где Δ - определитель матрицы коэффициентов системы (1), $\Delta(k)-$ определитель, который получится, если в Δ столбец с номером k заменить на столбец свободных членов системы (1) – столбец, состоящий из чисел b_m.

Доказательство.

Рассмотрим определители вида

$$\det(m)=\begin{vmatrix} b_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad m=1,2...n.$$

Разложив определитель по первой строке, получим *det (m) =*

$$b_m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{m1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^n a_{mn}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ b_2 & a_{21} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

Первый определитель - это конечно Δ, а остальные только порядком столбцов отличаются от $\Delta(k)$. Поменяв местами столбцы, по свойству 3, получим *det(m) =* $b_m\Delta - a_{m1}\Delta(1) - a_{m2}\ \Delta(2) - ... - a_{mn}\ \Delta(n)$.

Так как каждый из этих определителей имеет по две одинаковые строки, они равны нулю, и, следовательно, имеет место система равенств

$$b_m\Delta - a_{m1}\Delta(1) - a_{m2}\ \Delta(2) - ... - a_{mn}\ \Delta(n) = 0, \qquad m = 1, 2, ..., n.$$

Если Δ отлично от нуля, то, разделив каждое из равенств на Δ, получим

$$a_{m1}\Delta(1)/\Delta + a_{m2}\ \Delta(2)/\Delta + ... + a_{mn}\ \Delta(n)/\Delta = b_m = 0, \qquad m = 1, 2, ..., n.$$

А это показывает, что система (1) имеет решение $\{\Delta(1)/\Delta;\ \Delta(2)/\Delta;\ ...;\ \Delta(n)/\Delta\}$.

Это решение является единственным, так как, если бы система (1) имела другое решение, то по теореме 1 определитель Δ был бы равен нулю.

В теореме 1 утверждается, что если система имеет бесконечно много решений, определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю. Это утверждение есть пример условия, которое является необходимым, но недостаточным. Из условия равенства нулю определителя не обязательно следует, что система имеет бесконечно много решений.

<u>Теорема 3</u>. Если определитель матрицы коэффициентов системы (1) равен нулю, и хотя бы один из определителей $\Delta(1);\ \Delta(2);\ldots;\ \Delta(n)$ отличен от нуля, то система не имеет решений.

<u>Доказательство.</u> Из условий $\Delta = 0$ и $\Delta(k) \neq 0$ следует, что k – тый столбец матрицы коэффициентов системы (1) может быть представлен в виде линейной комбинации остальных столбцов. (Если условие $\Delta = 0$ не зависит от

k – того столбца, то и $\Delta(k) = 0$ будет равен нулю. Например, если условие $\Delta = 0$ определителя порядка 5 следует из линейной зависимости трех первых столбцов, то для любой правой части $\Delta(4) = 0$ и $\Delta(5) = 0$.) Поэтому, по свойству 5, для любого набора чисел $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ имеет место равенство

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & b_1 - a_{11}s_1 - a_{12}s_2 \ldots - a_{1n}s_n & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} \ldots & b_2 - a_{21}s_1 - a_{22}s_2 \ldots - a_{2n}s_n & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} \ldots & b_n - a_{n1}s_1 - a_{n2}s_2 \ldots - a_{nn}s_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta(k) \neq 0$, это означает, что не существует набора чисел $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, который может обратить k – тый столбец определителя в нулевой столбец.

Другими словами, не существует решения системы (1).

3. Прежде чем мы перейдем к изложению метода KG, рассмотрим следующую задачу:

Сдавая склады, кладовщик АГЮРОВ указал, что на первом складе имеется 30 маленьких, 15 средних, и 20 больших мешков с сахаром. Всего 2850 кг. Соответствующие данные по второму складу: 18; 22; 11; 2300 кг; по третьему складу: 42; 8; 29; 3100 кг.

Изучив эти данные, следователь, знакомый с теорией линейных уравнений установил, что имеет место нестыковка.

Покажем это. Обозначим вес маленького мешка через x, среднего через y, и большого через z. Тогда имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} 30_x + 15_y + 20_z = 2850, \\ 18_x + 22_y + 11_z = 2300, \\ 42_x + 8y + 29z = 3100. \end{cases}$$

(2)

Определитель Δ матрицы коэффициентов системы (2) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 30 & 15 & 20 \\ 18 & 22 & 11 \\ 42 & 8 & 29. \end{vmatrix} = 30\begin{vmatrix} 22 & 11 \\ 8 & 29 \end{vmatrix} - 18\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 8 & 29 \end{vmatrix} + 42\begin{vmatrix} 15 & 20 \\ 22 & 11 \end{vmatrix} =$$

30(638 - 88) – 18(435-160) + 42(165 - 440) = 30(550) – 18(275) + 42(-275) = 0.

Заменим первый столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, и подсчитаем определитель $\Delta(1)$, опять же используя разложение по первому столбцу. Отметим, что все определители второго порядка, необходимые для вычисления $\Delta(1)$ уже известны: $\Delta(1)$ = 2850(550) – 2300(275)+ 310(-275)= 82500.

Так как Δ=0, а $\Delta(1)$ отлично от нуля, то по теореме 1, система (2) не имеет решения, или другими словами, данные кладовщика АГЮРОВа являются неверными.

В результате дополнительного расследования было установлено, что на третьем складе из мешков был отсыпан сахар, а вес маленького мешка должен быть 30 кг.

Определим, сколько сахара было украдено.

Исключив из системы третье уравнение и подставив значение x =30 в два первых уравнения системы (2), получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} 15y + 20z = 1950, \\ 22y + 11z = 1760. \end{cases} \qquad (3)$$

Определитель матрицы коэффициентов этой системы уже подсчитан выше. Определитель вида $\Delta(1)$ равен: $\begin{vmatrix} 1950 & 20 \\ 1760 & 11 \end{vmatrix} = 1950 \cdot 11 - 1760 \cdot 20 = -13750.$

Поэтому, $y = (-13750)/(-275) = 50$. Теперь, из первого уравнения системы (3) найдем z: $15(50) + 20z = 1950$. Тогда $z = 60$.

В результате, мы знаем, сколько должен весить каждый мешок, и подставив эти данные в третье уравнение, установим, сколько сахара должно было быть на третьем складе: 42(30) + 8(50) + 29(60) = 3400 кг.

То есть, украдено 3400 -3100 = 300 кг.

4. При решении системы из n уравнений методом Крамера приходится вычислять $(n+1)$ определителей. При нахождении неизвестных по формулам Крамера, они вычисляются независимо друг от друга. Но, так как во всех этих определителях фигурируют одни и те же миноры, можно использовать это обстоятельство. С этой целью мы вычисляем определитель матрицы коэффициентов системы, используя разложение по первой строке.

Также, мы будем использовать каждое найденное значение для понижения порядка системы и нахождения следующего значения. Этот подход характерен для метода Гаусса.

<u>Опишем алгоритм решения</u>.

В начале мы покажем, как, используя метод KG, можно выписать решение системы вида (1) с n уравнениями и n неизвестными. Затем будут рассмотрены случаи, в которых число неизвестных не совпадает с числом уравнений.

Для того чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

нужно:

<table>
<tr><td colspan="3">A. Вычислить определитель Δ матрицы коэффициентов системы (1), последовательно и в полной мере применяя метод разложения по первому столбцу.: Сначала разложим Δ: $\Delta = a_{11}\Delta_1 - a_{21}\Delta_2 + \ldots + (-1)^{n-1}a_{n1}\Delta_n$, затем
$\Delta_k = a_{12}\Delta_{k1} - a_{22}\Delta_{k2} + \ldots + (-1)^{k-2}a_{k-1\,2}\Delta_{k\,k-1} + (-1)^{k-1}a_{k+1\,2}\Delta_{k\,k+1} + \ldots + (-1)^{n-2}a_{n2}\Delta_{k\,n}$
- здесь Δ_{km} – определитель (минор), полученный из Δ_k путем вычеркивания второго столбца и строки с номером m, $m = 1, 2, \ldots, n$, $m \neq k$, и так далее до определителей второго порядка. Потом обратный ход. Значения определителей 2-го порядка дадут значения определителей 3-го порядка, …, Δ_k дадут Δ.</td></tr>
<tr><td colspan="3">B. Вычислить $\Delta(1)$, используя миноры Δ_k вычисленные при нахождении Δ: $\Delta(1) = b_1\Delta_1 - b_2\Delta_2 + \ldots + (-1)^{n-1}b_n\Delta_n$.</td></tr>
<tr><td>C1. Если $\Delta \neq 0$, то $x_1 = \Delta(1)/\Delta$.</td><td rowspan="3">D. Если $\Delta = 0$, $\Delta(1) \neq 0$, то система (1) не имеет решений.</td><td>E1. Если $\Delta = 0$ и $\Delta(1) = 0$, то $x_1 = p$, где p параметр (любое число).</td></tr>
<tr><td>C2. Выбрать минор $\Delta_k \neq 0$, и из системы (1) вычеркнуть уравнение с номером k. Подставив в полученную систему значение x_1, найденное в C1 и получить систему порядка $n-1$.</td><td>E2. Из системы (1) вычеркиваем любое уравнение. (Желательно, выбрать минор $\Delta_k \neq 0$, если такие имеются, и вычеркнуть уравнение с номером k.) Подставив в полученную систему значение $x_1 = p$, получим систему порядка $n-1$.</td></tr>
<tr><td>C3. Повторить процедуру</td><td>E3. Вернуться к B, и решать систему порядка $n-1$. (Возможны все варианты: B-C, B – D, B – E).</td></tr>
</table>

B – C1 – C2 (*n-1*) раз и получить решение. (Определители матриц коэффициентов для всех систем подсчитаны в А.)		Е4. После получения решения, последовательно подставлять его во все вычеркнутые уравнения и уточнить значения параметров.

5. В этом пункте мы приведем примеры, иллюстрирующие алгоритм.

Пример 3. (Ситуация B-C.) Решить систему

$$\begin{cases} -2t-7x+5y-9z=-2, \\ 2t+2x-3y+4z=6, \\ 5t+3x+2y-3z=23, \\ 3t+5x-4y+6z=8. \end{cases}$$

Выпишем определитель матрицы коэффициентов, и разложим его на миноры:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -2 & -7 & 5 & -9 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}-$$

$$-3\begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(-2)\Delta_1-2\Delta_2+5\Delta_3-3\Delta_4.$$

Затем распишем определитель Δ_1:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=2\Delta_{11}-3\Delta_{12}+5\Delta_{13}.$$

Начинаем вычислять: Δ_{11} = (12 -12) = 0, Δ_{12} = (-18 +16) = -2, Δ_{13} = (9 -8) = 1.

Тогда, $\Delta_1 = 0 - 3(-2) + 5 = 11$.

Так как определитель Δ_1 отличен от нуля, мы будем использовать его значения и значения его миноров в системах меньшего порядка, а значения определителей Δ_2, Δ_3, Δ_4 вычислим, не вводя дополнительных обозначений:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7\cdot 0 - 3(-6) + 5\cdot 3 = 33;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(-7)\cdot(-2) - 2(-6) + 5\cdot(-7) = -9;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & -9 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -7\cdot 1 - 2\cdot 3 + 5(-7) = -34$$

Теперь мы можем вычислить $\Delta = (-2)(11) - 2(33) + 5(-9) - 3(-34) = -31$

и определитель $\Delta(1) = (-2)(11) - 6(33) + 23(-9) - 8(-34) = -155$.

Так как определитель Δ отличен от нуля, имеет место ситуация B-C.

Начинаем с нахождения значения 1-ой неизвестной: $t = \Delta(1)/\Delta = (-155)/(-31) = 5$.

Так как минор $\Delta_1 \neq 0$, мы можем понизить порядок системы исключив 1-ое уравнение и подставив вместо t его значение 5:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 6 - (2\cdot 5), \\ 3x + 2y - 3z = 23 - (5\cdot 5), \\ 5x - 4y + 6z = 8 - (3\cdot 5), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -4, \\ 3x + 2y - 3z = -2, \\ 5x - 4y + 6z = -7. \end{cases} \quad (4)$$

Определитель этой системы $\Delta_1 = 11$ вычислен при нахождении Δ. Более того, нам известны все миноры определителя Δ_1, необходимые для вычисления $\Delta_1(1)$: $\Delta_1(1) = (-4)(0) - (-2)(-2) + (-7)(1) = -11$.

Отсюда, $x = \Delta_1(1) / \Delta_1 = (-11)/11 = -1$.

Далее, так как $\Delta_{11} = 0$, нужно рассматривать систему, определитель матрицы коэффициентов которой $\Delta_{12} = -2$, или $\Delta_{13} = (9 - 8) = 1$.

Если выбрать второй вариант, то в системе (4) нужно отбросить третье уравнение и вместо *x* подставить (-1).

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 3y + 4z = -4, \\ 3 \cdot (-1) + 2y - 3z = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y + 4z = -2, \\ 2y - 3z = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда, $\Delta_{13}(1) = (6 - 4) = 2$, и $y = \Delta_{13}(1) / \Delta_{13} = 2/1 = 2$.

И, наконец, подставив значение *y* в любое из уравнений системы (5), получим, что *z = 1*.

Ответ: $t = 5,\ x = -1,\ y = 2,\ z = 1.$

<u>Пример 4</u>. (Ситуация B-D.) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5, \\ y + z = 3, \\ x - y = 2. \end{cases} \quad (6)$$

Вычислим определители Δ и $\Delta(1)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1) - 0(2) + 1 \cdot (-1) = 0;$$

$\Delta(1) = 5 \cdot (1) - 3(2) + 2 \cdot (-1) = (-3)$. (Числа 1; 2; (-1) получены при вычислении Δ.)

Из теоремы 3 следует, что система не имеет решения. В справедливости этого результата можно убедиться, прибавив к 3-му уравнению системы (6) удвоенное 2-ое, и сравнив результат с 1-м уравнением системы.

<u>Пример 5</u>. (Ситуация B-E.) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5, \\ y + z = 3, \\ x - y = -1. \end{cases} \qquad (7)$$

Определитель Δ для этой системы равен нулю (см. пример 4).

Так же и $\Delta(1)$: $\Delta(1) = 5 \cdot (1) - 3(2) + (-1) \cdot (-1) = 0.$

Все миноры второго порядка отличны от нуля. Поэтому, далее можно рассматривать любые два уравнения системы (7), взяв вместо неизвестной *x* параметр *p*: $\begin{cases} y + z = 3, \\ -y = -1 - p. \end{cases}$ Отсюда, $x = p$, $y = p + 1$, $z = 2 - p$.

Подставив найденные значения в систему (7), убедимся в том, что они действительно являются решениями системы.

<u>Пример 6</u>. (Ситуация B-E.) Решить систему

$$\begin{cases} 4t + x + y + 2z = 1, \\ 2t + y + z = 1, \\ x - y = -1, \\ 2t + x + z = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Выпишем определитель матрицы коэффициентов, и разложим его на миноры:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\Delta_1 - 2\Delta_2 + 0\Delta_3 - 2\Delta_4.$$

Все определители Δ_k этой системы равны нулю: Δ_1 = 0(-1) – 1(1) +1(1) = 0;

Δ_2 = 1(-1) – 1(1) +1(2) = 0; Δ_3 = 1(1) – 0(1) +1(-1) = 0; Δ_4 = 1(1) – 0(2) +1(-1) = 0.

Поэтому, можно исключить любое уравнение системы (8), и положив *t* = *p*, понижаем порядок системы. (Логично будет убрать 1-ое – как наиболее сложное.)

<u>В результате, получается система</u> $\begin{cases} y + z = 1 - 2p, \\ x - y = -1, \\ x + z = -2p. \end{cases}$

Определитель матрицы ее коэффициентов Δ_1 = 0 подсчитан выше. Воспользовавшись результатами вычисления Δ_1, можем получить значение $\Delta_1(1)$: $\Delta_1(1) = (1-2p)(-1) - (-1)(1) + (-2p)1 = 0$.

Следовательно, мы можем повторить процедуру и, положив $x = q$, исключить 1-ое уравнение. В итоге, $\begin{cases} -y = -1 - q, \\ z = -2p - q. \end{cases}$

Подставив найденные значения $t = p,\ x = q,\ y = 1 + q,\ z = -2p - q$ в систему (8), убедимся в том, что они действительно являются решениями системы.

Обращаем внимание на пункт Е4 (проверка) алгоритма решения систем линейных уравнений!

Для того чтобы подчеркнуть его важность рассмотрим систему (8а), которая будет отличаться от системы (8) только правой частью 1-го уравнения.

Пусть она будет равна 7. Легко убедится в том, что процесс выписывания значений неизвестных может быть повторен слово в слово и как результат получены те же значения: $t = p,\ x = q,\ y = 1 + q,\ z = -2p - q$. Но они не удовлетворяют 1-му уравнению системы (8а) ни при каких значениях p и q!

Следовательно, система (8а) не имеет решения.

6. Покажем, что процесс решения систем, в которых число неизвестных не совпадает с числом уравнений, легко сводится к процессу решения систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений.

<u>Пункт F алгоритма</u>. Пусть система имеет n уравнений и $n+l$ неизвестных (число неизвестных больше числа уравнений). Тогда, полагаем, что ($n+1$)-ая переменная есть параметр p_1, ($n+2$)-ая переменная – параметр p_2 , … , ($n+l$)-ая – параметр p_l, и получаем систему вида (1).

<u>Пример 7</u>. Решить систему

$$\begin{cases} 9x+5y-2z=9, \\ 5x+3y+3z=14. \end{cases}$$

Положим $z = p$, и получим систему $\begin{cases} 9x+5y=9+2p, \\ 5x+3y=14-3p. \end{cases}$

Для нее $\Delta = 2$ и $\Delta(1)$ = $(9+2p)3 - (14\text{-}3p)5 = 21p - 43$. Тогда $x = 10{,}5p - 21{,}5$. Отсюда, $5y = 9 + 2p - 9(10{,}5p - 21{,}5)$ и $y = 40{,}5 - 18{,}5p$.

Ответ: $\{10{,}5p - 21{,}5;\ 40{,}5 - 18{,}5p;\ p\}$. Здесь p любое число.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y-2z=9, \\ x+2y-3z=14. \end{cases} \qquad (9)$$

Положим $z = p$, и получим систему $\begin{cases} x+2y=9+2p, \\ x+2y=14+3p. \end{cases}$

Для нее $\Delta = 0$ и $\Delta(1)$ = $(9+2p)2 - (14+3p)2 = -2p - 10$. По теореме 3 система (9) имеет решение только в том случае, когда $\Delta(1) = 0$, то есть, только при $p= -5$. Следовательно, $z = -5$. Продолжаем решать систему. Так как $\Delta = 0$ и $\Delta(1) =0$, исключаем одно из уравнений и полагаем $y = q$. Тогда $x = -1 - 2q$.

Пункт G алгоритма. Пусть система имеет $n+l$ уравнений и n неизвестных (число неизвестных меньше числа уравнений).

Тогда, можно взять первые n уравнений системы и решить систему вида (1). Затем проверить на оставшихся уравнениях системы, конкретизируя при необходимости значения параметров, являются ли найденные значения решением системы.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2, \\ x-y=-1, \\ x+3y=10. \end{cases}$$

Первые два уравнения системы дают значения $x = p,\ y = 1 - p$. Подставив эти значения в 3-е уравнение, получим, что $x = 0,\ y = 1$. На следующем шаге,

из 4-го уравнения следует, что система решений не имеет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.М.Боревич. *Определители и матрицы*. М.: Наука, 1988

2. A.Mizrahi, M.Sullivan. *Mathematics for business and social sciences*. New York. John Wiley and Sons, 1988.