ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В РЕШЕНИИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Проф. др. А. СААДАБАЕВ

Кыргызский Государственный Педогогический Университет им. И. Арабаева

Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение:

$$\varepsilon y' + \int_0^1 K(t,s)\,y(s)ds = f(t), \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$

с начальным условием $y(0)=y_0$. (2)

Сингулярно возмущенное уравнение исследовалось в работах А.Н.Тихонова [1], А.Б.Васильевой [2], М.И.Иманалиева [3] и их учеников.

Полагая $\varepsilon = 0$ в (1), получаем так называемое вырожденное уравнение

$$\int_0^1 K(t,s)\,y_0(s)ds = f(t). \tag{3}$$

Таким образом, вырожденное уравнение (3) является интегральным уравнением первого рода.

Известно, что интегральное уравнение первого рода принадлежит к классу некорректно поставленных задач [4].

Построение решения интегрального уравнения (3) сложнее чем решение задачи Коши (1), (2).

В этой работе покажем, что решение задачи Коши (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к некоторому решению уравнения (3).

Особенность этой работы заключается в том, что мы не предполагали существование решения интегрального уравнения (3).

Задача (1), (2) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varepsilon y(t) + \int_0^1 \left(\int_0^t K(s,v)ds \right) y(v)dv = \varepsilon y_0 + \int_0^t f(s)ds \,. \quad (4)$$

В силу обобщенной теоремы Гильберта-Шмидта справедливо представление

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\psi_k(s)}{\lambda_k}, \quad (5)$$

где $\{\varphi_k(t)\}, \{\psi_k(s)\}$-собственные функции операторов КК*, К*К, соответственно.

Используя это, и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) f_k \,, \quad (6)$$

где $f_k = \int_0^1 f(s)\varphi_k(s)ds$, из (4) получаем

$$\varepsilon y(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_k(t) y_k}{\lambda_k} = \varepsilon y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t) f_k \,, \quad (7)$$

где $\phi_k(t) = \int_0^t \varphi_k(s)ds, \quad y_k = \int_0^1 y(v)\psi_k(v)dv, \quad k = 1,2,\mathrm{K}$

Умножая обе части (7) на $\psi_j(t)$ и интегрируя от 0 до 1, получаем

$$\varepsilon y_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \frac{y_k}{\lambda_k} = \varepsilon y_0 \delta_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} f_k \,, \; j = 1,2,\mathrm{K} \,, \quad (8)$$

где

$$a_{jk} = \int_0^1 \psi_j(s)\phi_k(s)ds, \quad \delta_j = \int_0^1 \psi_j(s)ds, \quad j,k = 1,2,\mathrm{K} \,. \quad (9)$$

(8) является бесконечной линейной системой алгебраических уравнений для определения неизвестных , .

Введем обозначения

$$\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\ A_\lambda=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}}{\lambda_1} & \dfrac{a_{12}}{\lambda_2} & \cdots \\ \dfrac{a_{21}}{\lambda_1} & \dfrac{a_{22}}{\lambda_2} & \cdots \\ . & . & \cdots \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ . & . & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\vec{\delta}=\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{pmatrix},\ \vec{\Phi}_\lambda(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{\Phi_1(t)}{\lambda_1} \\ \dfrac{\Phi_2(t)}{\lambda_2} \\ \vdots \end{pmatrix},\ \vec{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях (7) и (8) записываются в следующем виде

$$\varepsilon y(t)+(\vec{\Phi}_\lambda(t),\vec{y})=\varepsilon y_0+(\vec{\Phi}(t),\vec{f}) \tag{10}$$

и

$$\varepsilon\vec{y}+A_\lambda\vec{y}=\varepsilon y_0\vec{\delta}+A\vec{f}. \tag{11}$$

Допустим, что ядро K(t,s) является положительным, т.е. удовлетворяет неравенству

$$\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)z(t)\,ds\,dt\ge 0,\qquad \forall z(t)\in L_2(0,1). \tag{*}$$

Лемма 1. Если ядро K(t,s) является положительной, т.е. удовлетворяет неравенству (*), то матрица

$$B=\begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{\lambda_1} & \frac{b_{12}}{\lambda_2} & \mathrm{K} & \frac{b_{1n}}{\lambda n} \\ \frac{b_{21}}{\lambda_1} & \frac{b_{22}}{\lambda_2} & \mathrm{K} & \frac{b_{2n}}{\lambda_{n1}} \\ . & . & . & . \\ & & & \end{pmatrix},$$

где $b_{ij}=\int_0^1 \varphi_i(t)\psi_j(t)dt$ является положительным, т.е. удовлетворяет неравенству

$$(B\vec{z},\vec{z})_{l_2}=(\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij}\ z_j,\vec{z})=\sum_{i,j=1}^{\infty} b_{ij}\ z_i\, z_j \geq 0, \qquad \forall z\in l_2 .$$

Äîêàçàòåëüñòâî. Èñïîëüçóÿ îáîáùåííóþ òåîðåìó Ãèëüáåðòà - Øìèäòà, èìååì

$$0\leq\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)dsz(t)dt=\int_0^1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(t)}{\lambda_i}z_i z(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}z_i\int_0^1\varphi_i(t)z(t)dt,$$

где $z_i=\int_0^1 z(t)\psi_i(t)dt$.

Разлагаем функцию z(t) в ряд Фурье по системе $\{\psi_i(t)\}$:

$$z(t)=\sum_{j=1}^{\infty} z_j\psi_j(t), \qquad z_j=\int_0^1\psi_j(t)z(t)dt, \quad j=1,2,...$$

Подставляя это в предпоследнее равенство, имеем

$$0\leq\int_0^1\int_0^1 K(t,s)z(s)ds\,z(t)dt=\sum_{i,j=1}^{\infty}\frac{b_{ij}}{\lambda_j}z_i z_j .$$

Òàêèì îáðàçîì, ëåììà 1 äîêàçàíà. Íà îñíîâàíèè ëåììû 1 ìîæíî äîêàçàòü ñëåäóþùóþ ëåììó.

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1, то матрица A_λ является положительной.

Доказательство. Покажем, что ядро $H(t,v)=\int\limits_0^t K(s,v)\,ds$ является положительным.

Рассмотрим $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H(t,v)z(t)z(v)dtdv=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}z_i z_j^*$,

(**)

где $z_j=\int\limits_0^1\psi_i(t)z(t)dt, \quad z_i^*=\int\limits_0^1(\int\limits_0^t\varphi_i(s)ds)z(t)dt$.

Преобразуем z_j^*, вместо z(t) подставляем ряд Фурье по системе $\{\psi_j\}$

$$z(t)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\psi_k.$$

Тогда

$$z_j^*=\int\limits_0^1(\int\limits_0^t\varphi_j(s)ds)\sum_{k=1}^{\infty}z_k\psi_k(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}z_k, \quad где\, a_{jk}=\int\limits_0^1(\int\limits_0^t\varphi_j(s)ds)\psi_k(t)dt.$$

Далее преобразуем a_{ik}, применяя интеграл и обощенную формулу о среднем значении:

$$a_{jk}=\int\limits_0^1(\int\limits_0^t\varphi_j(s)ds)\psi_k(t)dt=\int\limits_0^1\varphi_i(\theta t)t\psi_k(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\varphi_i(t_l)\cdot t_l\cdot\psi_k(t_l)\Delta t_l.$$

Подставляя это в (**), получаем

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 H(t,v)z(t)z(v)dtdv=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}z\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{n}\varphi_j(t_l)\cdot t_l\cdot\psi_k(t_l)\Delta t_l z_k=$$

$$=\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\varphi_j(t_l)\psi_k(t_l)t_l\Delta t_l\right)z_i z_k.$$

Так как $\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\varphi_j(t_l)\cdot\psi_k(t_l)\cdot\Delta t_l\right)z_i z_k \ge 0 \quad и \quad t_l \ge 0 \quad для\ l=1,2,\dots,n,$

отсюда следует, что

$$\int_0^1\int_0^1 H(t,v)z(t)z(v)\,dt\,dv=\sum_{i,k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\varphi_j(t_l)\psi_k(t_l)\cdot t_l\cdot\Delta t_l\right)z_i z_k \ge 0.$$

Таким образом, ядро H(t,v) положительное. Отсюда в силу леммы 1 следует, что матрица A_λ также является положительной. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что оператор $(\varepsilon E + A_\lambda)$ обратим [5] при любом $\varepsilon > 0$, и любом $\vec{f} \in l_2$.

Используя это, из (11) получаем

$$\vec{y} = (\varepsilon E + A_\lambda)^{-1}\varepsilon y_0\vec{\delta} + (\varepsilon E + A_\lambda)^{-1}A\vec{f}. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получаем формальное решение задачи (1), (2), [6]:

$$y_\varepsilon(t)=-\frac{1}{\varepsilon}(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}\varepsilon y_o\vec{\delta}+(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}A\vec{f})+y_0+\frac{1}{\varepsilon}(\vec{\Phi}(t),\vec{f})\equiv$$
$$\equiv y_\varepsilon(t,y_0)+y_\varepsilon(t,\vec{f}),$$

(13)

где

$$y_\varepsilon(t,y_o)\equiv -y_0(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}\vec{\delta})+y_0,$$
$$y_\varepsilon(t,\vec{f})\equiv -\frac{1}{\varepsilon}(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}A\vec{f})+\frac{1}{\varepsilon}(\vec{\Phi}_\lambda(t),\vec{f}_o),$$
$$f_o=(\lambda_1 f_1,\lambda_2 f_2,\dots).$$

(14)

Последнее преобразуем следующим образом

$$y_\varepsilon(t,\vec{f})\equiv(\vec{\Phi}_\lambda(t),\frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}((\varepsilon E+A_\lambda)\vec{f}_0-A\vec{f})=$$
$$=(\vec{\Phi}_\lambda(t),\frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}(\varepsilon E\vec{f}_0+A_\lambda\vec{f}_0-A\vec{f})=(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-2}\vec{f}_0),$$

(15)

так как по определению для матриц A_λ и A справедливо тождество

$$A_\lambda f_o \equiv Af \,,$$

то формально полагая ε=0 в (15), получаем

$$y_o(t,\vec{f}_o) = (\vec{\Phi}_\lambda(t), A_\lambda^{-1}\vec{f}_o)\,. \qquad (16)$$

Покажем, что функция (16) формально удовлетворяет вырожденному интегральному уравнению (3).

Действительно, подставляя (16) в левую часть (3), получаем

$$\int_0^1 ж(t,s)(\vec{\Phi}_\lambda(s), A_\lambda^{-1}\vec{f}_0)ds = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\psi_k(s),(\vec{\Phi}_\lambda(s), A_\lambda^{-1} f_0)ds =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\psi_k(s) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(t)}{\lambda_j} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} b_{jl} f_{0l} ds, \qquad (17)$$

где b_{ji} элементы матрицы A_λ^{-1}.

Отсюда

$$\int_0^1 K(t,s)(\vec{\Phi}_\lambda(s), A_\lambda^{-1}\vec{f}_0)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{kl}}{\lambda_j} b_{jl}) f_{0l} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k} (A_\lambda A_\lambda^{-1})\vec{f}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) f_k \equiv f(t),$$

т.е. (16) действительно удовлетворяет уравнению (3).

Полагая ε=0 в (14), получаем

$$y_0(t,y_0) = -y_0(\vec{\Phi}_\lambda(t), A_\lambda^{-1}\vec{\delta}) + y_0\,. \qquad (18)$$

Покажем, что (18) удовлетворяет однородному уравнению

$$\int_0^1 K(t,s)y(s)ds = 0\,. \qquad (19)$$

Подставляя (18) в левую часть (19), получаем

$$y_0\int_0^1 K(t,s)(1-(\vec{\Phi}_\lambda(s),A_\lambda^{-1}\vec{\delta}))ds=y_0\int_0^1 K(t,s)ds-y_0\int_0^1 K(t,s)(\vec{\Phi}_\lambda(s),A_\lambda^{-1}\vec{\delta})ds=$$

$$=y_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\delta_k-y_0\int_0^1 K(t,s)(\vec{\Phi}_\lambda(s),A_\lambda^{-1}\vec{\delta})ds=y_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}\delta_k-$$

$$-y_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}(A_\lambda(A_\lambda^{-1})\vec{\delta})_k=0,$$

т.е. действительно (18) удовлетворяет уравнению (19).

Таким образом, при достаточно малом ε решение задачи (1), (2) является приближенным решением интегрального уравнения (3).

Покажем, что решение задачи (1), (2) является регуляризирующим оператором интегрального уравнения (3).

Для этой цели оценим разности:

$\left\|y_\varepsilon(t,\vec{f})-y_0(t,\vec{f})\right\|_{C[0,1]}$ и $\left\|y_\varepsilon(t,y_0)-y_0(t,y_0)\right\|_{C[0,1]}$.

Из (15) вычитая (16), получаем

$$y_\varepsilon(t,\vec{f})-y_0(t,\vec{f})=(\vec{\Phi}_\lambda(t),((\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}-A_\lambda^{-1})f_0)=$$
$$=(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}(E-(\varepsilon EA_\lambda^{-1}A_\lambda)A_\lambda^{-1})f_0=$$
$$=(\vec{\Phi}_\lambda(t),(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}(E-\varepsilon A_\lambda^{-1}-E)f_0=(\vec{\Phi}_\lambda(t),\varepsilon(\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}A_\lambda^{-1}f_0).$$

Применяя к обеим частям оператор $Kz=\int_0^1 K(t,s)\,z(s)ds,$ получаем

$$Ky_\varepsilon(t,\vec{f})-Ky_0(t,\vec{f})=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)((\varepsilon E+A_\lambda)^{-1}\vec{f})_k\,. \qquad (20)$$

Из (20), используя неравенство Коши, получаем

$$\left|Ky_{\varepsilon}(t,\vec{f}) - Ky_0(t,\vec{f})\right| = \left|\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{\lambda_k}((\varepsilon E + A_{\lambda})^{-1}\vec{f}_0)_k\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\lambda_k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}((\varepsilon E + A_{\lambda})^{-1}\vec{f}_0)_k^{\;2}\right)^{1/2} \le$$

$$\le \varepsilon\left(\int_0^1 K^2(t,s)ds\right)^{1/2}\cdot\left\|(\varepsilon E + A_{\lambda})^{-1}\vec{f}_0\right\| \le \varepsilon\cdot K\cdot\left\|A_{\lambda}^{-1}\vec{f}_0\right\|,$$

где $K = \max\limits_{0\le t,s\le 1}\left|K(t,s)\right|$.

Здесь мы использовали неравенство Бесселя и неравенство $\left\|(\varepsilon E + A_{\lambda})^{-1}\vec{f}_0\right\| \le \left\|A_{\lambda}^{-1}\vec{f}_0\right\|$.

Допустим, что заданная функция f такова, что ее коэффициенты Фурье удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}\lambda_j f_j\right)^2 \le C_0, \tag{21}$$

где (b_{ij}) - элементы обратной матрицы A_{λ}^{-1}.

Тогда из (20) получаем неравенство

$$\left|Ky_{\varepsilon}(t,\vec{f}) - Ky_0(t,\vec{f})\right| \le \varepsilon\cdot M, \tag{22}$$

где M - постоянная независящая от ε, зависящая только от f(t).

Легко видеть, что при условии (21) функции $y_{\varepsilon}(t,\vec{f}),\quad y_0(t,\vec{f})$ принадлежат компактному множеству M_0 в пространстве C[0,1].

В силу теоремы Тихонова [4] обратный оператор K^{-1} на образе компакта M_0 является непрерывным.

Из неравенства (22), используя непрерывность K^{-1}, получаем

$$\left|y_{\varepsilon}(t,\vec{f}) - y_0(t,\vec{f})\right| \le \omega(\varepsilon M), \tag{23}$$

где ω(εM) - модуль непрерывности оператора K^{-1} на множестве $K(M_0)$, $\omega(\varepsilon M)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Теорема. Пусть: 1) ядро K(t,s) непрерывно в квадрате 0≤ t, s≤1 и положительно; 2) функция f(t) непрерывна на сегменте [0,1] и удовлетворяет условию (21).

Тогда задача (1), (2) имеет решение $y_\varepsilon(t,\breve{f})$, причем это решение при $\varepsilon\to 0$ сходится по норме пространства C[0,1] к решению $y_0(t,\breve{f})$ уравнения (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений содержащих малый параметр при производной. Мат. сборник. Т.3, №3, 1952.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных уравнений. М., Наука, 1973.

3. Иманалиев М.И. Асимптотические разложения решения сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1972.

4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач., М., Наука, 1974.

5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

6. Саадабаев А. Построение регуляризирующего оператора для решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода. Бишкек, 1997.