PARÇACIKLARI TAŞIMA VE DİFÜZYON İŞLERİNDEKİ OPTİMAL YONETİMİN DİNAMİK PROGRAMLAMASI

Prof. Dr. Ramiz RAFATOV

Kirgizistan Türkiye Manas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü

Bu makalede dinamik programlama metodu yardımıyla parçacıkları taşıma ve difüzyon işlerindeki optimal yönetimin çeşitli problemleri incelenmektedir. Parçacıkları taşımadaki optimal yönetimin sentezini kurma probleminin *Riccatti İntegro-Diferensiyel Sınır Problemine* dönüşebilmesi ispatlanmıştır. Parçacıkları taşıma ve difüzyon işlerindeki optimal yönetimi sağlamak için Bellman metodunun yeterli derecede bir önem taşıdığı gösterilmiştir.

1. PARÇACIKLARI TAŞIMA İŞLERİNDE ZAMANDAN BAĞIMSIZ SÜREÇ HAKKINDA

Bilindiği gibi [1] bir nükleer reaktörün formu düz paralelkenar şeklinde ise bu reaktörün içerisindeki parçacıkların (neutronlerin) taşınması işleri

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} \psi(x,\mu')d\mu' \qquad (1.1)$$

şeklindeki homogen lineer integro-diferensiyel denklemi ve

$$\psi(-a,\mu) = 0 \quad , \quad 0 < \mu \le 1 \text{ ise;} \quad \psi(+a,\mu) = 0 \quad , \quad -1 \le \mu < 0 \text{ ise} \qquad (1.2)$$

homogen lineer sınır koşulları yardımıyla tanımlanmaktadır. Burada $[\ a,\ a]$ nükleer reaktörün ölçüsüdür. Eğer $c<1$ ise (1.1) denklemi bir tek sıfır $\psi(x,\mu)\equiv 0$ çözümüne

sahip olabilir. Ama (1.1) denkleminin sıfırdan farklı çözüme sahip olması için $c>1$ eşitsizliğinin sağlanması yeterli değildir. Böyle bir çözümün mevcut olması için bu c sayısı

ve reaktörün ölçüsünün yarısı olan $a>0$ sayısı arasında *reaktörün kritik ölçüsü* denilen bir eşitlik sağlanmalıdır.

Kabul edelim ki yukarıda söz konusu eşitlik sağlanmıştır. O zaman (1.1) denkleminin çözümünü

$$\psi_\alpha(x,\mu)=\varphi_\alpha(\mu)e^{-x/\alpha} \tag{1.3}$$

şeklinde yazarsak $\varphi_\alpha(\mu)$ fonksiyonu için

$$(1-\frac{\mu}{\alpha})\ \varphi_\alpha(\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_\alpha(\mu')d\mu' \tag{1.4}$$

lineer homogen denklemini alırız. Burada $\varphi_\alpha(\mu)$ keyfi fonksiyon olabilir. Bu nedenle (1.4) denkleminin çözümü olan $\varphi_\alpha(\mu)$ fonksiyonunu normlaştırmak amaçla

$$\int_{-1}^{1}\varphi_\alpha(\mu)d\mu=1 \tag{1.5}$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan $\alpha\neq\mu$ ise

$$\varphi_\alpha(\mu)=c\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\alpha-\mu} \tag{1.6}$$

eşitliğini alırız. Ama $\alpha=\mu$ olabilirse

$$\varphi_\alpha(\mu)=c\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\alpha-\mu}+\lambda(\alpha)\delta(\alpha-\mu) \tag{1.7}$$

eşitliğini de yazabiliriz. Burada δ - Dirac'ın genelleştirilmiş singuler δ -fonksiyonudur,

$\lambda(\alpha)$ ise keyfi bir fonksiyondur. Bilindiği gibi $-1 \le \mu \le 1$ dir. Bu nedenle $\alpha \notin [-1,1]$ ise (1.5) ve (1.6) dan

$$\Lambda(\alpha) \equiv 1 - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\alpha}{\alpha - \mu} d\mu = 0 \qquad (1.8)$$

karakteristik denklemini alırız ve bu denklemin çözümleri olan $\pm\alpha_0$ sayılarına (1.1), (1.2) probleminin kesikli öz değerleri veya kesikli spektrosu denir. Bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlar şunlardır:

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \frac{c}{2}\frac{\pm\alpha_0}{\pm\alpha_0 - \mu} \quad . \qquad (1.9)$$

Eğer $\alpha \in [-1,1]$ ise (1.1),(1.2) probleminin öz fonksiyonları (1.7) şeklindedirler ve $\forall \alpha : -1 \le \alpha \le 1$ bu problemin sürekli spektrosudur. (1.7)' deki $\lambda(\alpha)$ fonksiyonu (1.5)'den

bulunur:

$$\lambda(\alpha) \equiv 1 - \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\alpha}{\alpha - \mu} d\mu \qquad (1.10)$$

Bu (1.10) eşitliğinin sağ tarafındaki integral has olmayan integraldır ve onu Cauchy anlamında tanımlamak gerekir $[2]$.

(1.7) ve (1.9) öz fonksiyonları $-1 \le \mu \le 1$ aralığında μ 'ağırlık fonksiyon' una göre ortogonaldırlar, yani

$$\int_{-1}^{1} \mu\varphi_{\alpha'}(\mu)\varphi(\alpha)d\mu = \mathrm{N}_{\alpha}\delta(\alpha - \alpha') \qquad (1.11)$$

eşitliğindeki N_{α} sayısı $\varphi_{\alpha}(\mu)$ fonksiyonu için *normlaşdırıcı k*atsayısıdır:

$N_\alpha = \alpha\left[(1 - c\alpha Ar\tanh\alpha)^2 + \left(\pi\alpha c/2\right)^2\right]$, eğer $\alpha \in [-1,1]$ ise ,

$$N_\alpha = N_{0\pm} = \frac{c}{2}\alpha_0^3\left(\frac{c}{\alpha_0^2 - 1} - \alpha_0^{-2}\right),\ N_{0-} = -N_{0+},\ \alpha \notin [-1,1] \text{ ise} \quad (1.12)$$

(1.7) ve (1.9) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$\psi_{0\pm}(x,\mu) = \frac{c}{2}\frac{\alpha_0}{\alpha_0 \pm \mu} e^{\mp x/\alpha_0} = \psi_{0\mp}(-x,-\mu)\ , \quad (1.13)$$

$$\psi_\alpha(x,\mu) = \varphi_\alpha(\mu) e^{-x/\alpha} = \psi_{-\alpha}(-x,-\mu) \quad (1.14)$$

fonksiyonlarını yazabiliriz. Buradan ve (1.3)'den

$$\psi(x,\mu) = a_{0+}\psi_{0+}(x,\mu) + a_{0-}\psi_{0-}(x,\mu) + \int_{-1}^{1} A(\alpha)\psi_\alpha(x,\mu)d\alpha \quad (1.15)$$

ifadesini alırız. Burada $A(\alpha)$ Holder uzayına ait olan bir fonksiyondur, (1.15) ise $\psi(x,\mu)$

fonksiyonunun (1.7) ve (1.9) öz fonksiyonlarına göre genelleştirilmiş Fourier açılımıdır. (1.13) ve (1.14) eşitliklerine göre $a_{0+} = a_{0-}$, $A(\alpha) = A(-\alpha)$ dır. Bu katsayıları $a_{0+} = a_{0-} = 1$

şeklinde normlaşdırabiliriz. O zaman

$$\psi(x,\mu) = \psi_{0+}(x,\mu) + \psi_{0-}(x,\mu) + \int_{0}^{1} A(\alpha)\left[\psi_\alpha(x,\mu) + \psi_{-\alpha}(x,\mu)\right]d\alpha$$

eşitliğini alırız. Burada $x = -a$ koyarsak ve (1.2) sınır koşullarını göz önüne alırsak

$$\psi_{0+}(-a,\mu) + \psi_{0-}(-a,\mu) + \int_{0}^{1} A(\alpha)\left[\psi_\alpha(-a,\mu) + \psi_{-\alpha}(-a,\mu)\right]d\alpha = 0, \mu \geq 0$$

denklemini elde ederiz. Buradan da $A(\ )$ fonksiyonunu belirtmek için aşağıdaki singuler integral denklemini buluruz:

$$2\lambda(\mu)e^{a/\mu}A(\mu)+c\int_0^1 \alpha\cosh\frac{a}{\alpha}\frac{\alpha+\mu\tanh\frac{a}{\alpha}}{\alpha+\mu}\frac{A(\alpha)}{\alpha-\mu}d\alpha= \quad (1.16)$$

$$=\frac{\beta_0 c}{\mu^2+\beta_0^2}\left(\mu\sin\frac{a}{\beta_0}-\beta_0\cos\frac{a}{\beta_0}\right).$$

Burada β_0 sayısı (1.8) karakteristik denkleminin $c>1$ katsayısına karşılık gelen kökü $\pm\beta_0 i(i=\sqrt{-1})$ in modülüdür.

2. PARÇACIKLARI TAŞIMADA OPTİMAL YÖNETİM İÇİN BELLMAN DENKLEMİ

2.1. **Problem hakkında.** Bu bölümde aşağıdaki integro-diferensiyel denklem sistemini $[2,3]$

$$\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial x}+\psi(x,\mu,t)=F(x,\mu,t,u)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i r_i(x,t)+S_0\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu',t)d\mu',x\in[-a,a],\mu\in[-1,1],0\le t\le T, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial r_i(x,t)}{\partial t}+\lambda_i r_i(x,t)=S_i\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu',t)d\mu',i=1,2,...,N$$

ve bu sisteme bağlı olan sınır koşullarını:

$$\psi(a,\mu,t)=0,-1\le\mu<0;\psi(-a,\mu,t)=0,0<\mu\le 1, \quad (2.2)$$

$$\psi(x,\mu,t)\big|_{t\le 0}=\psi(x,\mu,0)=\psi_0(x,\mu),$$

$$r_i(x,t)\Big|_{t=0} = r_i(x,0) = r_i^0(x) = \frac{S_i}{\lambda_i}\int_{-1}^{1}\psi_0(x,\mu')d\mu', i=1,2,...,N \quad (2.3)$$

inceleyeceğiz. Burada S_i - i - inci takım gecikme neutronların sayısından ve nükleer reaksiyondan bağımlı büyüklüktür, λ_i^{-1} - i - inci takım gecikme neutronların yaşam süresidir, $i=1,2,...,N,$ N – gecikme neutronların takım sayısıdır (genellikte $N \le 6$), $\psi(x,\mu,t)$ - t anında (x,μ) noktasında bulunan neutronların yoğunluğudur. $t \le 0$ için bu yoğunluk

$\psi_0(x,\mu)$ fonksiyonuna eşittir, yani parçacıkların zamandan bağımsız taşıma problemi olan (1.1), (1.2) probleminin çözümüdür ve (1.15) eşitliği ile belirtilir. $F(x,\mu,t,u)-$ neutronlar kaynakları yoğunluğudur ve $F(x,\mu,t,0)\big|_{t\le 0}=0$ dır. $u=u(t)-$ yönetim fonksiyonudur ve

$t \le 0$ için $u(t)=0$ dır. Bu $u=u(t)$ yönetim fonksiyonuna nükleer fizikte *aşırı reaktiflik* denir$[2]$. Genellikte kabul edilebilir yönetim fonksiyonu $u(t) \in U \subset L^2[0,T]$

dir. Hipoteze göre $t=0$ anından önce nükleer reaktörde zamandan bağımsız süreç

devam ediyordu ve $t=0$ anında nükleer reaktörün aktif bölgesinde yönetim çubuklarını

yerleştirdiler. İşte o zaman nükleer reaktörde zamandan bağımlı süreç meydana geliyor ve süreç (2.1), (2.2) ve (2.3) şartları ile tanımlanıyor.

Her kabul edilebilir $u=u(t)$ yönetim fonksiyonuna (2.1) – (2.3) sınır probleminin bir genelleştirilmiş çözümü karşılık gelmektedir. İleride inceleyeceğimiz *optimallığın ölçüsü* için

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} u^2(t)dt = u^2(t) \quad (2.4)$$

limitinin varliğı gerekir (hemen hemen her $t \in [\ \ T]$ ve $\Delta t \to 0$ için).

Problem 2.1. Kabul edilebilir yönetim fonksiyonlarının arasında öyle bir $u(t)$ yi bulunuz ki *optimal yönetimin ölçüsü* denilen [2]

$$J[u] = \int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} |\mu| [\psi(x,\mu,T) - g(x,\mu)]^2 d\mu dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{-a}^{a} [r_i(x,T) - q_i(x)]^2 dx + \gamma \int_0^T u^2(t)dt, (\gamma = const \succ 0) \quad (2.5)$$

fonksiyonu en küçük değerine sahip olsun.

Burada $T > 0$ verilen sabittir, $g(x,\mu), q_i(x) (i = 1,2,...,N)$ fonksiyonları için

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} |\mu| |g(x,\mu)|^2 d\mu dx < \infty, \quad q_i(x) \in L^2[-a,a], (i = 1,2,...,N) \quad (2.6)$$

şartları sağlanmaktadırlar.

Her kabul edilebilir yönetim fonksiyonu $u(t)$ için (2.1)-(2.3) sınır

probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm (1.7), (1.9) fonksiyonları yardımıyla yazılabilir. Gerçekten, kabul edelim ki neutron kaynakları yoğunluğu olan $F(x,\mu,t,u)$ fonksiyonu için $F(x,\mu,t,u) = F(-x,-\mu,t,u)$ dur. O zaman $\psi_0(x,\mu), \psi(x,\mu,t)$ ve

$r_i(x,t), (i = 1,2,...,N)$ fonksiyonları da x ve μ bağımsız değişkenlerine göre benzer

simetrik özelliklerine sahip olurlar. Neticede

$$\psi_0(x,\mu) = \int_{-1}^{1} A(\alpha) e^{-x/\alpha} \varphi_\alpha(\mu) d\alpha + e^{-x/\alpha_0} \varphi_{0+}(\mu) + e^{x/\alpha_0} \varphi_{0-}(\mu) \quad ,(2.7)$$

$$F(x,\mu,t,u)=\int_{-1}^{1}F_{\alpha}(t,u)e^{-x/\alpha}\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha+\left[e^{-x/\alpha_0}\varphi_{0+}(\mu)+e^{x/\alpha_0}\varphi_{0-}(\mu)\right]F_{0+}(t,u), \quad (2.8)$$

$$\psi(x,\mu,t)=\int_{-1}^{1}\psi_{\alpha}(t)e^{-x/\alpha}\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha+\left[e^{-x/\alpha_0}\varphi_{0+}(\mu)+e^{x/\alpha_0}\varphi_{0-}(\mu)\right]\psi_{0+}(t), \quad (2.9)$$

$$r_i(x,t)=\int_{-1}^{1}r_{i\alpha}(t)e^{-x/\alpha}d\alpha+2\cosh\left(\frac{x}{\alpha_0}\right)r_{i0+}(t),(i=1,2,...,N) \quad (2.10)$$

eşitliklerini alırız. Burada $\varphi_{0\pm}(\mu),\varphi_{\alpha}(\mu),(\alpha\in[-1,1])$ fonksiyonları (1.7), (1.9) formülleri ile belirtilen ve zamandan bağımsız (1.1), (1.2) parçacıkları taşıma probleminin öz fonksiyonlarıdır. $A(\alpha),F_{\alpha}(t,u),F_{0+}(t,u)$ - bilinen katsayılardır, $\psi_{\alpha}(t),r_{i\alpha}(t),(\alpha\in[-1,1]),\psi_{0+}(t),r_{i0+}(t),(i=1,2,...,N)$ bilinen bir diferensiyel denklem sisteminin çözümleridir $[2]$.

$\psi(x,\mu,t)$ ve $r(x,t)=\{r_1(x,t),...,r_N(x,t)\}$ fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahip olan genelleştirilmiş çözüm gibi düşünülmektedir:

1) $$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T}|r_i(x,t)|^2dtdx<\infty,(i=1,2,...,N),$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-a}^{a}\int_{0}^{T}|\mu||\psi(x,\mu,t)|^2dtdxd\mu<\infty;$$

2) $$\forall r_i^*(x,t)\in W_2^1([-a,a]x[0,T]),\forall\psi^*(x,\mu,t)\in W_2^1([-a,a]x[-1,1]x[0,T])$$

ve $0\le t_1\le t_2\le T$ eşitsizliğini sağlayan $\forall t_1,t_2$ için $\psi(x,\mu,t)$, $r(x,t)$

fonksiyonları aşağıdaki integral eşitliğini sağlamalıdırlar:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)\psi^*(x,\mu,t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}d\mu dx+\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}r_i(x,t)r_i^*(x,t)\Big|_{t_1}^{t_2}dx-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} \left\{ \psi(x,\mu,t) \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* x,\mu,t) + S_0 \int_{-1}^{1} \psi^* x,\mu',t) d\mu' + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{i=1}^{N} S_i r_i^*(x,t) \right] + F(x,\mu,t,u) \psi^*(x,\mu,t) \right\} d\mu - \quad (2.11)$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-a}^{a} r_i(x,t) \left[\frac{\partial r_i^*}{\partial t} - \lambda_i r_i^*(x,t) + \lambda_i \int_{-1}^{1} \psi^*(x,\mu',t) d\mu' \right] dx +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_0^1 \mu \psi(a,\mu,t) \psi^*(a,\mu,t) d\mu - \int_{-1}^{0} \mu \psi(-a,\mu,t) \psi^*(-a,\mu,t) d\mu \right] ;$$

3) $\forall \xi(x,\mu) \in L^2$ ve $\forall \eta_i(x) \in L^2 \ (i = 1,2,...,N)$ için $t \to +0$ halde

$$Lim \int_{-a}^{a} \int_{-1}^{1} [\psi(x,\mu,t) - \psi_0(x,\mu)] \xi(x,\mu) d\mu dx = 0,$$

$$Lim \int_{-a}^{a} \left[r_i(x,t) - r_i^0(x) \right] \eta_i(x) dx = 0 \quad (2.12)$$

eşitlikleri gerçekleşmelidirler.

2.2. Bellman denkleminin formal olarak bulunması. Optimal yönetim problemini çözmek için burada Bellman'ın Optimallık Prensibini uygulayacağız. Bilindiği gibi bu prensip aşağıdaki gibidir [2]:

Her hangi bir sistemin $0 \le t \le T$ *zaman aralığındaki optimal davranışı öyle bir özelliğe sahiptir ki* $\forall t_0 (0 \le t_0 < T)$ *için sistemin* $t_0 < t \le T$ *zaman aralığındaki*

davranışı optimaldır ve bu son aralıktaki davranış sistemin daha önceki $0 \le t \le t_0$

zaman aralığındaki davranışından bağımsızdır.

Bu prensibe göre aşağıdaki fonksiyonu ele alacağız:

$$S[t,\psi,r]=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}|\mu|[\psi(x,\mu,T)-g(x,\mu)]^2 d\mu+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}[r_i(x,T)-q_i(x)]^2 dx+\gamma\int_t^T u^2(\tau)d\tau\ \right\}. \qquad (2.13)$$

Burada t değişkeni $[0,T]$ zaman aralığına ait olan keyfi bir andır, minimum $u(\tau)\in U$ fonksiyonuna göre hesaplanmaktadır, U - kabul edilebilir yönetim fonksiyonları cümlesidir, τ değişkeni ise $[0,T]$ aralığına aittir.

Şimdi kabul edelim ki $t'=t+\Delta t,\psi(x,\mu,t')=\psi(x,\mu,t)+\Delta\psi(x,\mu,t),\ r(x,t')=$

$=r(x,t)+\Delta r(x,t)$ ve S fonksiyonu t değişkenine göre ikinci mertebeden sürekli kısmi türeve, ψ ve r değişkenlerine göre ise Freschee diferensiyeline sahiptir. O zaman

$$S[t',\psi(x,\mu,t'),r(x,t')]=S[t,\psi(x,\mu,t),r(x,t)]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}S[t,\psi,r]\Delta t+dS[t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r]+o(\Delta t)+\omega(t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r) \quad (2.14)$$

yi alırız. Burada $\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\to 0$ $\quad \Delta t\to 0$ ise, $\dfrac{\omega}{\|\Delta r\|}\to 0$ ve

$$\frac{\omega}{\|\Delta\psi\|}\to 0$$

$\|\Delta r\|\to 0$ ve $\|\Delta\psi\|\to 0$ ise.

(2.13) formülünü göz önüne alırsak

$$S[t,\psi,r]=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\gamma\int_t^T u^2(\tau)d\tau+\min\left\{\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}|\mu|[\psi(x,\mu,T)-g(x,\mu)]^2 d\mu+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}[r_i(x,T)-q_i(x)]^2dx+\gamma\int_{t+\Delta t}^{T}u^2(z)dz\ \right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{\gamma\int_t^{t+\Delta t}u^2(\tau)d\tau+S[t',\psi(x,\mu,t'),r(x,t')]\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan (2.14) formülünden

$$-\frac{\partial S[t,\psi,r]}{\partial t}\Delta t=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\gamma\int_t^{t+\Delta t}u^2(\tau)d\tau+dS[t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r]+\right.$$

$$\left.+o(\Delta t)+\omega(t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r)\ \right\} \quad (2.15)$$

denklemi meydana gelir.

L^2 uzayında tanımlanan lineer sürekli fonksiyonların genel formu hakkında teoreme göre [2]:

$$dS[t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r]=$$

$$=\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu,t)\Delta\psi(x,\mu,t)d\mu+\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}r_i^*(x,t)\Delta r_i(x,t)dx \quad (2.16)$$

eşitliğini alırız. Burada $\psi^*(x,\mu,t)$ ve $r_i^*(x,t)$ S fonksiyonunun $\psi(x,\mu,t)$ ve

$r_i(x,t),(1,2,...,N)$ ye göre gradyantlarıdır. (2.15) ve (2.16) dan aşağıdaki denklemi alırız:

$$-\frac{\partial S[t,\psi,r]}{\partial t}\Delta t=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\gamma\int_t^{t+\Delta t}u^2(\tau)d\tau+\right.$$

$$+\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu,t)\Delta\psi(x,\mu,t)d\mu+\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}r_i^*(x,t)\Delta r_i(x,t)dx+$$

$$\left.+o(\Delta t)+\omega(t,\psi,r,\Delta\psi,\Delta r)\ \right\} \qquad (2.17)$$

Diyelim ki $\psi^*(x,\mu,t)\in W_2^1([-a,a]x[-1,1]x[0,T]), r_i^*(x,t)\in W_1^1([-a,a]x[0,T]),(i=1,2,\dots,N)$ dir. O zaman (2.11) ıntegral eşitliğinden

$$-\frac{\partial S[t,\psi,r]}{\partial t}=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\frac{\gamma}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}u^2(\tau)d\tau+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}dt\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}\{\psi(x,\mu,t)\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi^*}{\partial x}-\psi^*(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu'+\sum_{i=1}^{N}S_ir_i^*(x,t)\right]+$$

$$+F(x,\mu,t,u)\psi^*(x,\mu,t)\ \}d\mu+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}dt\int_{-a}^{a}r_i(x,t)\left[\frac{\partial r_i^*}{\partial t}-\lambda_ir_i^*(x,t)+S_i\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu'\right]dx- \quad (2.18)$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}dt\left\{\int_0^1\mu\psi(a,\mu,t)\psi^*(a,\mu,t)d\mu-\int_{-1}^{0}\mu\psi(-a,\mu,t)\psi^*(-a,\mu,t)d\mu\right\}-$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)\psi^*(x,\mu,t)d\mu dx-$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}r_i(x,t)\Delta r_i^*(x,t)dx+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}+\frac{\omega}{\Delta t}$$

yi buluruz. Bu (2.18) denkleminde (2.4) eşitliğini uygulayarak $\Delta t \to 0$ limitine geçersek

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial S[t,\psi,r]}{\partial t} = \min_{u(t)\in U}\Big\{ & \gamma u^2(t) + \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1}\Big\{\psi(x,\mu,t)\Big[\mu\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \\
& -\psi^*(x,\mu,t) + S_0\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu + \sum_{i=1}^{N} S_i r_i^*(x,t)\Big] + \\
& + F(x,\mu,t,u)\psi^*(x,\mu,t)\Big\}d\mu + \\
& + \int_{-1}^{0}\mu\psi(-a,\mu,t)\psi^*(-a,\mu,t)d\mu - \int_{0}^{1}\mu\psi(a,\mu,t)\psi^*(a,\mu,t)d\mu
\end{aligned} \tag{2.19}$$

denklemini alırız.

Bu (2.19) denklemine yukarıda tanımlanan 2.1. Problemi için *Bellman Denklemi* denir.

(2.13) eşitliğini direk inceleyerek $S \geq 0$ ve

$$\begin{aligned}
S[T,\psi,r] = & \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} |\mu| [\psi(x,\mu,T) - g(x,\mu)]^2 d\mu + \\
& + \sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}[r_i(x,T) - q_i(x)]^2 dx
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olduğunu gösterebiliriz. Demek Problem 2.1. şimdi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Problem 2.2.: *(2.19) Bellman Denklemini ve onun (2.20) koşulunu sağlayan* $u(t)$ *ve* $S[t,\psi,r] \geq 0$ *fonksiyonlarını bulunuz.*

Uyarı: Yukarıda bulunan Bellman Denklemi 2.1. optimal yönetim probleminin gerekli şartıdır. (2.19)' dan bulunan $u(t)$' nin gerçekten verilen problem için yönetim fonksiyonu olup olmayacağını ayrıca denemek gerekir.

3. KUADRATİK KRİTERYUMUN MİNİMİZASYONU PROBLEMİNDEKİ OPTİMAL YÖNETİMİN SENTEZİ HAKKINDA

İleride yapılacak işlemleri daha kolay yürütmek için kabul edilebilir yönetim fonksiyonlar

cümlesi olan U cümlesinin $L^2[0,T]$ uzayına eşit olması pratik açısından uygundur. Şimdi (2.8) formülündeki $F_\alpha(t,u), F_{0+}(t,u)$ fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde belirteceğiz:

$$F_\alpha(t,u) = f_\alpha u(t), (\alpha \in [-1,1]), F_{0+}(t,u) = f_{0+} u(t) \tag{3.1}$$

Burada $f_\alpha, (\alpha \in [-1,1]), f_{0+}$ bilinen katsayılardır. O zaman

$$F(x,t,\mu,u) = \left\{ \int_{-1}^{1} f_\alpha \exp(-x/\alpha) \varphi_\alpha(\mu) d\alpha + \right. \tag{3.2}$$

$$\left. + \left[\exp(-x/\alpha_0) \varphi_{0+}(\mu) + \exp(x/\alpha_0) \varphi_{0-}(\mu) \right] f_{0+} \right\} u(t) \equiv f(x,\mu) u(t)$$

açılımını alırız. Buradan ve Bellman Denkleminin sağ tarafından $u(t)$ yönetim fonksiyonunu buluruz:

$$u(t) = -\frac{1}{2\gamma} \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} f(x,\mu) \psi^*(x,\mu,t) d\mu \tag{3.3}$$

Buradaki $f(x,\mu)$ fonksiyonu (3.2) eşitliği ile belirtilmiştir.

(3.3) ile belirtilen yönetim fonksiyonunu (2.19) Bellman Denklemindeki yerine koyarsak

$$-\frac{\partial S[t,\psi,r]}{\partial t} = -\frac{1}{4\gamma} \left\{ \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} f(x,\mu) \psi^*(x,\mu,t) d\mu \right\}^2 +$$

$$+ \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu,t) \left[\mu \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* + S_0 \int_{-1}^{1} \psi^*(x,\mu,' t) d\mu' + \sum_{i=1}^{N} S_i r_i^*(x,t) \right] d\mu +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{-a}^{a} r_i(x,t) \left[\int_{-1}^{1} \psi^*(x,\mu',t) d\mu' - r_i^*(x,t) \right] dx + \tag{3.4}$$

$$+ \int_{-1}^{0} \mu \psi(-a,\mu,t) \psi^*(-a,\mu,t) d\mu - \int_{0}^{1} \mu \psi(a,\mu,t) \psi^*(a,\mu,t) d\mu$$

denklemini alırız.

Bu (3.4) denkleminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$S[t, \psi(x,\mu,t), r(x,t)] =$$

$$= \int_G \int_G K(\bar{x},\bar{y},t)[\psi(\bar{x},t)-g(\bar{x})][\psi(\bar{y},t)-g(\bar{y})]d\bar{x}d\bar{y} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_G \int_{-a}^{a} L_i(\bar{x},y,t)[\psi(\bar{x},t)-g(\bar{x})][r_i(y,t)-q_i(y)]d\bar{x}dy +$$

$$+ \sum_{i,j}^{N} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} M_{ij}(x,y,t)[r_i(x,t)-q_i(x)][r_i(y,t)-q_i(y)]dxdy + \quad \textbf{(3.5)}$$

$$+ \int_G \Phi(\bar{x},t)[\psi(\bar{x},t)-g(\bar{x})]d\bar{x} + \sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a} \xi_i(x,t)[r_i(x,t)-q_i(x)]dx + \eta(t).$$

Burada

$$K(x,\mu,y,\nu,t), L_i(x,\mu,y,t), M_{ij}(x,y,t), \Phi(x,\mu,t), \xi_i(x,t), (i,j=1,\ldots,N), \eta(t)$$

halen bilinmeyen fonksiyonlardır,

$$G = \{\bar{x}=(x,\mu): x\in[-a,a], \mu\in[-1,1]\},$$

$$\bar{y}=(y,\nu), y\in[-a,a], \nu\in[-1,1] \quad \textbf{(3.6)}$$

dir. Freschee diferensiyeli tanımından ve (3.5) , (2.16), (3.6) dan

$$\psi^*(\bar{x},t) = \int_G \tilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)\tilde{\psi}(\bar{y},t)d\bar{y} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\int_{-a}^{a} L_j(\bar{x},y,t)\tilde{r}_j(y,t)dy + \Phi(\bar{x},t),$$

$$r_i^*(x,t) = \int_G L_i(\bar{y},x,t)\tilde{\psi}(\bar{y},t)d\bar{y} + \quad \textbf{(3.7)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\int_{-a}^{a} M_{ij}(x,y,t)\bar{r}_j(y,t)dy + \xi_i(x,t), i=1,\ldots,N$$

eşitliklerini buluruz. Burada

$$\tilde{K}(\bar{x},\bar{y},t) = K(\bar{x},\bar{y},t) + K(\bar{y},\bar{x},t),$$

$$\tilde{M}_{ij}(x,y,t) = M_{ij}(x,y,t) + M_{ji}(x,y,t), (i,j=1,2,\ldots,N), \quad \textbf{3.8)}$$

$$\tilde{\psi}(\bar{x},t) = \psi(\bar{x},t) - g(\bar{x}), \tilde{r}_i(x,t) = r_i(x,t) - q_i(x)$$

dir. Diyelim ki

$$\Phi_f(t) = \int_G f(\bar{x})\Phi(\bar{x})d\bar{x}, K_f(\bar{y},t) = \int_G f(\bar{x})\tilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)d\bar{x},$$

$$L_{if}(y,t)=\int_G f(x)L_i(\overline{x},y,t)d\overline{x},(i=1,2,...,N) \qquad \textbf{(3.9)}$$

dir. O zaman

$$\left\{\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}f(x,\mu)\psi^*(x,\mu,t)d\mu\right\}^2=$$

$$=\Phi_f^2(t)+\int_G\int_G K_f(\overline{x},t)K_f(\overline{y},t)\widetilde{\psi}(\overline{x},t)\widetilde{\psi}(\overline{y},t)d\overline{x}d\overline{y}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}L_{if}(x,t)L_{jf}(y,t)\widetilde{r}_i(x,t)\widetilde{r}_j(y,t)dxdy+ \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$+2\Phi_f(t)\int_G K_f(\overline{x},t)\widetilde{\psi}(\overline{x},t)d\overline{x}+2\Phi_f(t)\sum_{i=1}^{N}\int_{-a}^{a}L_{if}(x,t)\widetilde{r}_i(x,t)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_G\int_{-a}^{a}K_f(\overline{x},t)L_{if}(y,t)\widetilde{\psi}(\overline{x},t)\widetilde{r}(y,t)dyd\overline{x}$$

olur.

Şimdi de diyelim ki

$$\Phi_2(\overline{x},t)=\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\Phi(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu',t)d\mu'+\sum_{i=1}^{N}S_i\xi_i(x,t),$$

$$K_2(\overline{x},\overline{y},t)=\mu\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{K}(\overline{x},\overline{y},t)-\widetilde{K}+S_0\int_{-1}^{1}\widetilde{K}(x,\mu',\overline{y},t)d\mu'+\sum_{i=1}^{N}S_iL_i(\overline{y},x,t),$$

$$L_{ji}(\overline{x},y,t)=\mu\frac{\partial}{\partial x}L_j(\overline{x},y,t)-L_j(\overline{x},y,t)+ \qquad \textbf{(3.11)}$$

$$+S_j\int_{-1}^{1}L_j(x,\mu',y,t)d\mu'+\sum_{i=1}^{N}S_iM_{ij}(x,y,t).$$

dir. Buradan ve (3.7)' den

$$\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)\Bigg[\mu\frac{\partial\psi^*}{\partial x}-\psi^*(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu'+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}S_ir_i^*(x,t)\quad\Bigg]d\mu=\int_G g(\overline{x})\Phi_2(\overline{x},t)d\overline{x}+$$

$$+\int_G {}_{y}\widetilde{\ }(x,t)\left[\Phi_{2}(\overline{x},t)+\int_G K_{2}(\overline{y},\overline{x},t)g(\overline{y})d\overline{x}\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{-a}^{a}\int_G g(\overline{y})L_{j2}(\overline{y},x,t)d\overline{y}\widetilde{r}_j(x,t)dx+$$

$$+\int_G\int_G \widetilde{\psi}(\overline{x},t)\widetilde{\psi}(\overline{y},t)K_2(\overline{x},\overline{y},t)d\overline{x}d\overline{y}+ \qquad \textbf{(3.12)}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_G\int_{-a}^{a} L_{j2}(\overline{x},y,t)\widetilde{\psi}(\overline{x},t)\widetilde{r}_j(y,t)dyd\overline{x}$$

eşitliğini alırız. Buradan

$$\Phi_{i3}(x,t)=\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu',t)d\mu'-\xi_i(x,t),$$

$$K_{i3}(x,\overline{y},t)=\int_{-1}^{1}\widetilde{K}(x,\mu',\overline{y},t)d\mu'-L_i(\overline{y},x,t), \qquad \textbf{(3.13)}$$

$$L_{ij3}(x,y,t)=\int_{-1}^{1}L_j(x,\mu',y,t)d\mu'-\widetilde{M}_{ij}(x,y,t), \quad i,j=1,2,\ldots,N$$

gösterirsek

$$\int_{-a}^{a}r_i(x,t)\left[\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu'-r_i^*(x,t)\right]dx=$$

$$=\int_{-a}^{a}q_i(x)\Phi_{i3}(x,t)dx+\int_G\widetilde{\psi}(\overline{x},t)\int_{-a}^{a}K_{i3}(y,\overline{x},t)q_i(y)dyd\overline{x}+$$

$$+\int_G\widetilde{\psi}(\overline{x},t)\int_{-a}^{a}K_{i3}(y,\overline{x},t)q_i(y)dyd\overline{x}+ \qquad \textbf{(3.14)}$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{-a}^{a}\widetilde{r}_j(x,t)\int_{-a}^{a}q_i(y)L_{j3}(y,x,t)dydx+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{-a}^{a}\widetilde{r}_i(x,t)\int_{-a}^{a}\widetilde{r}_j(y,t)L_{j3}(x,y,t)dxdy$$

yi alırız. Diyelim ki $\widetilde{K},L_j$ ve Φ fonksiyonları aşağıdaki şartlara tabidirler:

$$\widetilde{K}(a,\mu,\bar{y},t) = L_j(a,\mu,y,t) = \Phi(a,\mu,t) = 0$$

$0 \; \pi \; \mu \le 1,\ j = 1,2,...,N, t \ge 0, -a \le y \le a, -1 \le \nu \le 1$ **ise**

$$\widetilde{K}(-a,\mu,\bar{y},t) = L_j(-a,\mu,y,t) = \Phi(-a,\mu,t) = 0 \qquad \textbf{(3.15)}$$

$-1 \le \mu < 0,\ j = 1,2,...,N, t \ge 0, -a \le y \le a, -1 \le \nu \le 1$ **ise .**

Şimdi (3.5) , (3.10) , (3.12) ve (3.14) fonksiyonlarını (3.4)' deki yerlerine koyarsak

$$\int_G\int_G \left\{ -\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{1}{4\gamma} K_f(\bar{x},t) K_f(\bar{y},t) - K_2(\bar{x},\bar{y},t) \right\} \widetilde{\psi}(\bar{x},t)\widetilde{\psi}(\bar{y},t) d\bar{x} d\bar{y} +$$

$$+ \int_G \int_{-a}^{a} \sum_{i=1}^{N} \left\{ -\frac{\partial L_i}{\partial t} + \frac{1}{4\gamma} L_{if}(y,t) K_f(\bar{x},t) - L_{i2}(\bar{x},y,t) - \lambda_i K_{i3}(y,\bar{x},t) \right\} \bullet$$

$$\bullet \widetilde{\psi}(\bar{x},t) \widetilde{r}_i(y,t) dy d\bar{x} + \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \sum_{i,j=1}^{N} \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} M_{ij} + \frac{1}{4\gamma} L_{if}(x,t) L_{jf}(y,t) - \right.$$

$$\left. - \lambda_i L_{ij3}(x,y,t) \right\} \widetilde{r}_i(x,t) \widetilde{r}_j(y,t) dy dx +$$

$$+ \int_G \left\{ -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \Phi_f(t) K_f(\bar{x},t) - \Phi_2(\bar{x},t) - \int_G K_2(\bar{y},\bar{x},t) g(\bar{y}) d\bar{y} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{-a}^{a} K_{i3}(y,\bar{x},t) q_i(y) dy \right\} \widetilde{\psi}(\bar{x},t) d\bar{x} + \qquad \textbf{(3.16)}$$

$$+ \int_{-a}^{a} \sum_{j=1}^{N} \left\{ -\frac{\partial \xi_j}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \Phi_f(t) L_{jf}(\bar{x},t) - \int_G g(\bar{y}) L_{j2}(\bar{y},x,t) d\bar{y} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{-a}^{a} q_i(y) L_{ij3}(y,x,t) dy \right\} \widetilde{r}_j(x,t) dx +$$

$$+ \left\{ -\frac{d\eta(t)}{dt} + \frac{1}{4\gamma} \Phi_f^2(t) - \int_G g(\bar{x}) \Phi_2(\bar{x},t) d\bar{x} - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \int_{-a}^{a} q_i(x) \Phi_{i3}(x,t) dx \right\} = 0$$

eşitliğini alırız.

Bu (3.16) eşitliği her $\psi(x\mu,t), r_i(x,t), (i=1,2,...,N),$ **için sağlanacağından, buradan**

$$\frac{\partial K}{\partial t}+K_2(\bar{x},\bar{y},t)=\frac{1}{4\gamma}K_f(\bar{x},t)K_f(\bar{y},t) \quad \textbf{(3.17)}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial t}+L_{i2}(\bar{x},y,t)+\lambda_i K_{i3}(y,\bar{x},t)=\frac{1}{4\gamma}K_f(\bar{x},t)L_{if}(y,t) \quad \textbf{(3.18)}$$

$$\frac{\partial M_{ij}(x,y,t)}{\partial t}+\lambda_i L_{ij}(x,y,t)=\frac{1}{4\gamma}L_{if}(x,t)L_{jf}(y,t) \quad \textbf{(3.19)}$$

$$\frac{\partial \Phi(x,\mu,t)}{\partial t}+\Phi_2(\bar{x},t)+\int_G K_2(\bar{y},\bar{x},t)g(\bar{y})d\bar{y}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\int_{-a}^{a}K_{i3}(y,\bar{x},t)q_i(y)dy=\frac{1}{2\gamma}\Phi_f(t)K_f(\bar{x},t) \quad \textbf{(3.20)}$$

$$\frac{\partial \xi_j(x,t)}{\partial t}+\int_G g(\bar{y})L_{j2}(\bar{y},x,t)d\bar{y}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\int_{-a}^{a}q_i(y)L_{ij3}(y,x,t)dy=$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\Phi_f(t)L_{jf}(x,t) \quad \textbf{(3.21)}$$

$$\frac{d\eta(t)}{dt}+\int_G g(\bar{x})\Phi_2(\bar{x},t)d\bar{x}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\int_{-a}^{a}q_i(x)\Phi_{i3}(x,t)dx=\frac{1}{4\gamma}\Phi_f^2(t) \quad \textbf{(3.22)}$$

denklemlerini elde ederiz. (2.20)'den ve (3.5)'den ise

$$K(x,\mu,y,\nu,T)=\mu\delta(y-x)\delta(\nu-\mu), M_{ij}(x,y,T)=\delta(y-x),$$

$$\Phi(x,\mu,T)=\eta(T)=0, L_i(x,\mu,T)=\xi_i(x,T)=0, i,j=1,2,...,N \quad \textbf{(3.23)}$$

koşullarını alırız.

Demek $K, L_i, M_{ij}, \Phi, \xi_i$ **ve** η **fonksıyonlarını (3.17) – (3.22) integro-diferensiyel denklem sisteminden ve (3.15), (3.23) koşullarından bulabiliriz. İşte bu sınır problemine**

Rikkatti integro-diferensiyel sınır problemi **denir** $[2]$.

4. RİKKATTİ İNTEGRO-DİFERENSİYEL SINIR PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bilindiği gibi (3.17) - (3.22) sisteminin analitik çözümü çok karmaşık ola bilir. Onu basitleştirmek için (2.1) – (2.3) probleminin yerine bunun özel hali olan daha basit problemi, yani gecikme neutronları göz önüne almadan meydana gelen problemi inceleyeceğiz. Söz konusu problem şudur:

$$\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi(x,\mu,t)}{\partial x}+\psi(x,\mu,t)=$$

$$=F(x,\mu,t,u)+S_0\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu',t)d\mu', \qquad \textbf{(4.1)}$$

$$x\in[-a,a],\mu\in[-1,1],t\ \phi\ 0$$

denklemini ve

$$\psi(x,\mu,t)\big|_{t\le 0}=\psi(x,\mu,0)=\psi_0(x,\mu) \qquad \textbf{(4.2)}$$

$\psi(a,\mu,t)=0,-1\le\mu\ \pi\ 0$ **ise,** $\psi(-a,\mu,t)=0,0<\mu\le 1$ **ise** **(4.3)**

koşullarını sağlayan $\psi(x,\mu,t)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

Eğer (2.1) – (2.3) probleminde

$$S_i=0(i=1,2,...,N),r_i(x,t)=0(i=1,2,...,N,x\in[-a,a],t>0)$$

alırsak (4.1) – (4.3) problemi meydana gelir. Buradaki $u=u(t)$ **yönetim fonksiyonudur ve**

$$u(t)\big|_{t\pi 0}=0,F(x,\mu,t,0)\big|_{t\pi 0}=0,\psi(x,\mu,t)\big|_{t\pi 0}=\psi_0(x,\mu)$$

eşitlikleri sağlanmaktadırlar.

(2.5)'in yerine

$$J[u]=\gamma\int_0^T u^2(t)dt+\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}|\mu|[\psi(x,\mu,T)-g(x,\mu)]^2d\mu dx \qquad \textbf{(4.4)}$$

fonksiyonunu optimal yönetimin ölçüsü gibi kabul edeceğiz.

Burada $\psi_0(x,\mu)$ **aşağıdaki zamandan bağımsız homogen sınır probleminin çözümüdür:**

$$\mu\frac{\partial\psi_0(x,\mu)}{\partial x}+\psi_0(x,\mu)=S_0\int_{-1}^{1}\psi_0(x,\mu')d\mu' \qquad \textbf{(4.5)}$$

$\psi_0(a,\mu)=0,-1\le\mu\ \pi\ 0$ **ise ,** $\psi_0(-a,\mu)=0,0\ \pi\ \mu\le 1$ **ise .**

Diyelim ki $2S_0\ \phi\ 1$ **dir. O zaman** $\psi_0(x,\mu)\neq 0$ **bulunur. (4.1) – (4.3) probleminin genelleştirilmiş çözümünü ise aşağıdaki**

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)\psi^{*}(x,\mu,t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} d\mu dx -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\int_{-a}^{a} dx\int_{-1}^{1}\{\psi(x,\mu,t)\left[\frac{\partial\psi^{*}}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}-\psi^{*}(x,\mu,t)+\right.$$

$$\left.+S_0\int_{-1}^{1}\psi^{*}(x,\mu',t)d\mu'\ \right]+F(x,\mu,t,u)\psi^{*}(x,\mu,t)\ \}d\mu+ \quad \textbf{(4.6)}$$

$$+\int_{-t_1}^{t_2} dt\left\{\int_{0}^{1}\mu\psi(a,\mu,t)\psi^{*}(a,\mu,t)d\mu-\int_{-1}^{0}\mu\psi(-a,\mu,t)\psi^{*}(-a,\mu,t)d\mu\right\}=0$$

integral eşitliğinden bulabiliriz $[1,2]$.
(2.13) fonksiyonunun özel hali olan

$$S[t,\psi]=\min_{u(\tau)\in U}\left\{\int_{-a}^{a} dx\int_{-1}^{1}|\mu|[\psi(x,\mu,T)-g(x,\mu)]^2 d\mu+\gamma\int_{t}^{T}u^2(\tau)d\tau\right\} \quad \textbf{(4.7)}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada t **keyfi bir zaman noktasıdır ve** $t\in[0,T]$ **dir ,** U **ise kabul edilebilir yönetim fonksiyonları cümlesidir. Buradan ve (2.19)'dan (4.1)**
(4.4) ve (4.7) problemi için Bellman denklemini buluruz :

$$-\frac{\partial S[t,\psi]}{\partial t}=\min_{u(t)\in U}\{\gamma u^2(t)+\int_{-a}^{a} dx\int_{-1}^{1}\left\{\psi(x,\mu,t)\left[\mu\frac{\partial\psi^{*}}{\partial x}-\right.\right.$$

$$\left.-\psi^{*}(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\psi^{*}(x,\mu',t)d\mu'\ \right]+F(x,\mu,t,u)\psi^{*}(x,\mu,t)\ \}d\mu+ \quad \textbf{(4.8)}$$

$$+\int_{-1}^{0}\mu\psi(-a,\mu,t)\psi^{*}(-a,\mu,t)d\mu-\int_{0}^{1}\mu\psi(a,\mu,t)\psi^{*}(a,\mu,t)d\mu\ \}$$

Bu denkleme $0\le t\le T$ **zaman aralığının sağ tarafında verilen bir şart eklenmelidir:**

$$S[T,\psi(x,\mu,T)]=\int_{-a}^{a} dx\int_{-1}^{1}|\mu|[\psi(x,\mu,T)-g(x,\mu)]^2 d\mu \quad \textbf{(4.9)}$$

$F(x,\mu,t,u)$ **fonksiyonunu (3.2)'den (4.8)'deki yerine koyarsak yönetim fonksiyonu olan** $u(t)$ **için (3.3) formülünü elde ederiz. Buradan ve (4.8) Bellman denkleminden (3.4)'ün özel hali olan**

$$-\frac{\partial S[t,\psi]}{\partial t} = -\frac{1}{4\gamma}\left\{\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} f(x,\mu)\psi^*(x,\mu,t)\,d\mu\right\}^2 +$$

$$+\int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1}\psi(x,\mu,t)\left[\mu\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*(x,\mu,t) + S_0\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)\,d\mu'\right]d\mu + \qquad \textbf{(4.10)}$$

$$+\int_{-1}^{0}\mu\psi(-a,\mu,t)\psi^*(-a,\mu,t)\,d\mu - \int_{0}^{1}\mu\psi(a,\mu,t)\psi^*(a,\mu,t)\,d\mu$$

denklemini alırız.

4.1. Bellman Denkleminin Çözümü**. Bu denklemin çözümünü aşağıdaki şekilde yazacağız:**

$$S[t,\psi] = \int_G\int_G K(\bar{x},\bar{y},t)\widetilde{\psi}(\bar{x},t)\widetilde{\psi}(\bar{y},t)\,d\bar{x}\,d\bar{y} +$$

$$+\int_G \Phi(\bar{x},t)\widetilde{\psi}(\bar{x},t)\,d\bar{x} + \eta(t) \qquad \textbf{(4.11)}$$

Burada $K(x,\mu,y,\nu,t),\Phi(x,\mu,t)$ **ve** $\eta(t)$ **bilinmeyen fonksiyonlardır.** $\widetilde{\psi}(x,\mu,t)$ **ise (3.8)'deki üçüncü formül ile belirtilir. Fresche diferensiyeli formülüne göre (4.11)'den**

$$\psi^*(\bar{x},t) = \int_G \widetilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)\widetilde{\psi}(\bar{y},t)\,d\bar{y} + \Phi(\bar{x},t) \qquad \textbf{(4.12)}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\widetilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)$ **fonksiyonu (3.8)'deki birinci formül ile belirtilir.**

(4.12)'den

$$\left\{\int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} f(x,\mu)\psi^*(x,\mu,t)\,d\mu\right\}^2 =$$

$$= \Phi_f^2(t) + 2\Phi_f(t)\int_G K_f(\bar{x},t)\widetilde{\psi}(\widetilde{x},t)\,dx + \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$+\int_G\int_G K_f(\bar{x},t)K_f(\bar{y},t)\widetilde{\psi}(\bar{x},t)\widetilde{\psi}(\bar{y},t)\,d\bar{x}\,d\bar{y}$$

eşitliği bulunur. Buradaki $\Phi_f(t)$ ve $K_f(x,t)$ fonksiyonları (3.9) formülleri ile belirtilmektedirler.

$$\mu\frac{\partial\psi^*(x,\mu,t)}{\partial x}-\psi^*(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\psi^*(x,\mu',t)d\mu'=$$
$$=\Phi_2(\bar{x},t)+\int_G K_2(\bar{x},\bar{y},t)\widetilde{\psi}(\bar{y},t)d\bar{y}$$

ve

$$\Phi_2(\bar{x},t)=\mu\frac{\partial\Phi(\bar{x},t)}{\partial x}-\Phi(\bar{x},t)+S_0\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu',t)d\mu', \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$K_2(\bar{x},\bar{y},t)=\mu\frac{\partial\widetilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)}{\partial x}-\widetilde{K}(\bar{x},\bar{y},t)+S_0\int_{-1}^{1}\widetilde{K}(x,\mu',\bar{y},t)d\mu'$$

olduklarından (4.11),(4.12) fonksiyonlarını (4.10) denklemindeki yerlerine koyarsak ve (4.13), (4.14) eşitliklerini göz önüne alırsak

$$\frac{\partial K(\bar{x},\bar{y},t)}{\partial t}+K_2(\bar{x},\bar{y},t)=\frac{1}{4\gamma}K_f(\bar{x},t)K_f(\bar{y},t)\ ,$$
$$\frac{\partial\Phi(\bar{x},t)}{\partial t}+\Phi_2(\bar{x},t)+\int_G K_2(\bar{y},\bar{x},t)g(\bar{y})d\bar{y}=\frac{1}{2\gamma}\Phi_f(t)K_f(\bar{x},t)\ , \qquad \textbf{(4.15)}$$
$$\frac{d\eta(t)}{dt}+\int_G g(\bar{x})\Phi_2(\bar{x},t)d\bar{x}=\frac{1}{4\gamma}\Phi_f^2(t)$$

denklem sistemini elde ederiz. Bunun koşullarını da (3.15)'den ala biliriz:

$$K(a,\mu,y,\nu,t)+K(y,\nu,a,\mu,t)=0\ ,\ \ 0<\mu\le 1;$$
$$K(-a,\mu,y,\nu,t)+K(y,\nu,-a,\mu,t)=0\,,-1\le\mu<0; \qquad \textbf{(4.16)}$$
$$\Phi(a,\mu,t)=0,\ \ 0<\mu\le 1;\ \ \Phi(-a,\mu,t)=0,\ \ -1\le\mu<0. \qquad \textbf{(4.17)}$$

(4.9) ve (4.11)' den ise

$$K(x,\mu,y,\nu,T)=\mu\delta(y-x)\delta(\nu-\mu) \qquad \textbf{(4.18)}$$
$$\Phi(x,\mu,T)=\eta(T)=0 \qquad \textbf{(4.19)}$$

şartlarını elde ederiz. Bu (4.15) – (4.19) problemi *Rikkatti İntegro-Diferensiyel Sınır Problemidir.*

4.2. Rikkatti probleminin çözümü. (3.9) ve (4.14) formüllerine göre (4.15) sisteminin birinci denklemini aşağıdaki şekilde yazarız:

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x,\mu,y,\nu,t)+\mu\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)-\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)+$$

$$+S_0\int_{-1}^{1}\widetilde{K}(x,\mu',y,\nu,t)d\mu'= \tag{4.20}$$

$$=\frac{1}{4\gamma}\int_G f(y,\nu)\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)d\nu dy\int_G f(x,\mu)\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)dxd\mu\,.$$

Burada $\overline{K}(x,\mu,y,\nu,t)=K(x,\mu,y,\nu,t)+K(y,\nu,x,\mu,,t)$ **dir. Bu (4.20) denklemine (4.16) ve (4.18) koşullarını eklemek gerekir.**
(4.20),(4.16) ve (4.18) probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$K(x,\mu,y,\nu,t)=\sum_{i,j}^{2}a_{ij}(t)\exp(\frac{x}{\alpha_i}+\frac{y}{\alpha_j})\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu)\varphi_{\alpha_j}(\nu)+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathrm{A}_{\alpha\beta}(t)\exp(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta})\mu\varphi_\alpha(\mu)\varphi_\beta(\nu)d\alpha d\beta\,. \tag{4.21}$$

Burada $\varphi_{\alpha_i}(\mu),(i=1,2)$ **ve** $\varphi_\alpha(\mu),(\alpha\in[-1,1])$ **fonksiyonları**

$$\mu\frac{\partial K(x,\mu)}{\partial x}-K(x,\mu)+S_0\int_{-1}^{1}K(x,\mu')d\mu'=0\,,$$

$$K(a,\mu)=0,\ 0<\mu\le 1;\ K(-a,\mu)=0,\ -1\le\mu<0 \tag{4.22}$$

homogen lineer probleminin α_1,α_2 **kesikli spektrosuna ve** $\alpha\in[-1,1]$ **sürekli spektrosuna karşılık gelen öz fonksiyonlarıdır.**
(4.21)'den

$$\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)=\sum_{i,j=1}^{2}\widetilde{a}_{ij}(t)\exp(\frac{x}{\alpha_i}+\frac{y}{\alpha_j})\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu)\nu\varphi_{\alpha_j}(\nu)+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}(t)\exp(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta})\mu\varphi_\alpha(\mu)\beta\nu\varphi_\beta(\nu)d\alpha d\beta \tag{4.23}$$

eşitliğini alırız. Burada $\widetilde{a}_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$, $\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}=\mathrm{A}_{\alpha\beta}+\mathrm{A}_{\beta\alpha}$ **dır.**

$$f(x,\mu)=\int_{-1}^{1}f_\alpha e^{-x/\alpha}\varphi_\alpha(\mu)d\alpha+\sum_{i=1}^{2}f_{\alpha_i}e^{-x/\alpha_i}\varphi_{\alpha_i}(\mu) \tag{4.24}$$

olduğunu biliyoruz. Burada α_1, α_2 - (4.5) probleminin kesikli spektrosudur, $\alpha \in [-1,1]$ ise yine o problemin sürekli spektrosudur. (4.22) ve (4.5) problemlerinin spektroları çakışıyorlar ve onlara karşılık gelen öz fonksiyonlar ise aşağıdaki gibidirler:

$$\varphi_{\alpha_i}(\mu) = \frac{S_0 \alpha_i}{\alpha_i - \mu}, (i = 1,2);$$

$$\varphi_\alpha(\mu) = \alpha S_0 \mathrm{P}\frac{1}{\alpha - \mu} + \lambda(\alpha)\delta(\alpha - \mu), (\alpha \in [-1,1]) \tag{4.25}$$

(4.25) fonksiyonlarının $[-1,1]$ aralığında μ yükü ile ortogonal olduklarından (4.23) ve (4.24) eşitliklerinden

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} f(y,\nu)\widetilde{K}(x,\mu,y,\nu,t)d\nu dy = 2a\left\{\sum_{i,k=1}^{2} f_{\alpha_k} N_k \widetilde{a}_{ik}(t) e^{x/\alpha_i}\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu) + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_\beta N_\beta \widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}(t) e^{x/\alpha}\mu\varphi_\alpha(\mu) d\alpha d\beta \right\} \tag{4.26}$$

yı elde ederiz. Burada $N_k(k = 1,2), N_\alpha(\alpha \in [-1,1])$ (4.25) öz fonksiyonları için norumlaşdırıcı katsayılarıdırlar. (4.21),(4.23) ve (4.26) ifadelerini (4.20)'deki yerlerine koyarsak ve (4.25)'deki $\varphi_\alpha(\mu)$ fonksiyonunun

$$\int_{-1}^{1}\varphi_\alpha(\mu)d\mu = 1 \ , \ (\frac{\mu}{\alpha} - 1)\varphi_\alpha(\mu) + S_0 = 0 \tag{4.27}$$

eşitliklerini sağladığını göz önüne alırsak aşağıdaki denklemi alırız:

$$\int_{-1}^{1} d\alpha \int_{-1}^{1} d\beta \frac{d\mathrm{A}_{\alpha\beta}(t)}{dt}\exp(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta})\mu\varphi_\alpha(\mu)\nu\varphi_\beta(\nu)) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2}\frac{da_{ij}(t)}{dt}\exp(\frac{x}{\alpha_i} + \frac{y}{\alpha_j})\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu)\nu\varphi_{\alpha_j}(\nu) +$$

$$+ S_0\left\{\int_{-1}^{1} d\alpha \int_{-1}^{1} d\beta \widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}(t)\exp(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta})\nu\varphi_\beta(\nu)[(1 - 2S_0)\alpha - \mu] + \right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\widetilde{a}_{ij}(t)\exp(\frac{x}{\alpha_i}+\frac{y}{\alpha_j})\nu\varphi_{\alpha_j}(\nu)\left[(1-2S_9)\alpha_i-\mu)\right]\ \Big\}=$$

$$=\frac{a^2}{\gamma}\left\{\int_{-1}^{1}d\alpha\int_{-1}^{1}d\beta f_\beta N_\beta\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha\beta}(t)\exp(\frac{x}{\beta})\mu\varphi_\alpha(\mu)+\right. \qquad \mathbf{(4.28)}$$

$$\left.+\sum_{i,k=1}^{2}f_{\alpha_k}N_k a_{ik}(t)\exp(\frac{x}{\alpha_i})\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu)\ \right\}*$$

$$*\left\{\int_{-1}^{1}d\alpha'\int_{-1}^{1}d\beta f_{\alpha'}N_{\alpha'}\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha'\beta}(t)\exp(\frac{y}{\beta})\nu\varphi_\beta(\nu)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j,l=1}^{2}f_{\alpha_l}N_l\widetilde{a}_{jl}(t)\exp(\frac{y}{\alpha_j})\nu\varphi_{\alpha_j}(\nu)\ \right\}$$

Bu (4.28) denkleminin her iki tarafını sırasıyla $e^{-x/\alpha}\varphi_\alpha(\mu), e^{-y/\beta}\varphi_\beta(\nu),\ e^{-x/\alpha_k}\varphi_{\alpha_k}(\mu),$ $e^{-y/\alpha_i}(\nu)$ ile çarparsak ve $\mu,\nu\in[-1,1]$ değişkenlerine göre integral alırsak (4.25) fonksiyonlarının ortogonal olduklarından

$$\frac{d\mathrm{A}_{\alpha\beta}(t)}{dt}+\frac{S_0(1-2S_0)}{2aN_\alpha}\int_{-1}^{1}\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha'\beta}(t)2\alpha\alpha'\sinh\left[a(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha'})\right]d\alpha'=$$

$$=\frac{a^2}{\gamma}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha'\beta}(t)\widetilde{\mathrm{A}}_{\alpha'\beta'}(t)f_{\alpha'}f_{\beta'}N_{\alpha'}N_{\beta'}d\alpha'd\beta', \qquad (4.29)$$

$$\frac{da_{kl}(t)}{dt}+\frac{S_0(1-2S_0)}{2aN_k}\sum_{i=1}^{2}\widetilde{a}_{il}(t)2\alpha_i\alpha_k\sinh\left[a(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\alpha_i})\right]=$$

$$=\frac{a^2}{\gamma}\sum_{i,j=1}^{2}f_{\alpha_i}f_{\alpha_j}N_iN_j\widetilde{a}_{kj}(t)\widetilde{a}_{li}(t)$$

denklemini elde ederiz.

(4.21) fonksiyonu (4.18) şartlarını sağlayacağından

$$_{\alpha\beta}(\ ) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\frac{\sinh\left[\ (\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\right]}{2\ ^{2}\ _{\beta}}\delta(\alpha-\beta), \qquad (4.30)$$

$$a_{ik}(T) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_k}{4a^2N_k}\sinh(\dfrac{2a}{\alpha_k}), i = k, \\ 0, i \neq k, i, k = 1,2. \end{cases} \qquad (4.30)$$

eşitliklerini elde ederiz. Doğrudan doğruya gösterilebilir ki

$$\begin{cases} a_{kk}(t) = \left[(T-t)\dfrac{4a^2}{\gamma}(N_k f_{\alpha k})^2 + \dfrac{4a^2N_k}{\alpha_k \sinh(2a/\alpha_k)}\right]^{-1}, \\ a_{ik}(t) = 0, i \neq k, i, k = 1,2 \end{cases} \qquad (4.31)$$

fonksiyonları (4.29) sisteminin ikinci denklemi için Cauchy probleminin çözümüdür.

(4.29) sisteminin birinci denklemi için (4.30) Cauchy probleminin çözümünü

$\mathrm{A}_{\alpha\beta}(t) = C_{\alpha\beta}(t)\delta(\alpha-\beta), \alpha, \beta \in [-1,1]$ (4.32) şeklinde yazacağız. (4.32) fonksiyonunu (4.29) sisteminin birinci denklemindeki yerine koyarsak ve elde edilen denklemin her iki tarafından $\beta \in [-1,1]$ değişkenine göre integral alırsak $C_{\alpha\alpha}(t)$ bilinmeyenine göre aşağıdaki integr0-diferensiyel denklemini alırız:

$$\frac{dC_{\alpha\alpha}(t)}{dt} + \frac{S_0(1-2S_0)}{aN_\alpha}\int_{-1}^{1} C_{\beta\beta}(t)\alpha\beta \sinh\left[a(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})\right]d\beta =$$

$$= \frac{4a^2}{\gamma} f_\alpha N_\alpha C_{\alpha\alpha}(t)\int_{-1}^{1} f_\beta N_\beta C_{\beta\beta}(t)d\beta . \qquad (4.33)$$

(4.32) ve (4.30) eşitliklerini inceleyerek gösterilebilir ki (4.33) denklemini

$$C_{\alpha\alpha}(T) = \frac{\alpha \sinh(\frac{2a}{\alpha})}{4a^2N_\alpha}, \alpha \in [-1,1] \qquad (4.34)$$

şartı ile birlikte çözmek gerekir.

(4.33) denklemi lineer olmayan integro-diferensiyel denklemdir ve onun sol tarafı $C_{\alpha}(t),(\alpha\in[-1,1])$ bilinmeyenine göre lineerdir hem de integral içindeki çekirdek

$$\alpha\beta\sinh\left[a\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\right]$$

değişkenleri ayrılabilendir. Değişkenleri ayrılabilen çekirdekli integral denklemler teorisine dayanarak $[1,2]$ bu (4.33),(4.34) Cauchy probleminin yaklaşık çözümü bulunabilir. Böylece $K(x,\mu,y,\nu,t)$ fonksiyonu bulunur. Bundan sonra (4.15),(4.17) ve (4.19) eşitliklerinden $\Phi(x,\mu,t)$ fonksiyonunu bulmaya çalışacağız. $\Phi(x,\mu,t)$ fonksiyonunu bulmak için (3.9) ve (4.14) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki denklemi yazabiliriz:

$$\frac{\partial\Phi(x,\mu,t)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\Phi(x,\mu,t)}{\partial x}-\Phi(x,\mu,t)+S_0\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu',t)d\mu'+$$

$$+\int_G\left\{\mu\frac{\partial\widetilde{K}}{dx}-\widetilde{K}(\overline{x},\overline{y},t)+S_0\int_{-1}^{1}\widetilde{K}(x,\mu',\overline{y},t)d\mu'\right\}g(\overline{y})d\overline{y}=$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\int_G F(\overline{x})\Phi(\overline{x},t)d\overline{x}\int_G f(\overline{y})\widetilde{K}(\overline{y},\overline{x},t)d\overline{y}. \qquad (4.35)$$

Bu denklemin çözümünü

$$\Phi(x,\mu,t)=\int_{-1}^{t}\Phi_{\alpha}(t)e^{x/\alpha}\mu\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha+\sum_{i=1}^{2}\Phi_{\alpha_i}(t)e^{x/\alpha}\mu\varphi_{i}(\mu) \qquad (4.36)$$

şeklinde arayacağız. Buradaki $\Phi_{\alpha}(t)(\alpha\in[-1,1]),\Phi_{\alpha}(t)(i=1,2)$ bilinmeyen katsayıları (4.19) gereğince

$$\Phi_{\alpha}(T)=0(\alpha\in[-1,1]),\Phi_{\alpha_i}(T)=0(i=1,2) \qquad (4.37)$$

sağlamalıdırlar. Buradan ve (4.24)'den

$$\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1}f(x,\mu)\Phi(x,\mu,t)d\mu= \qquad 4.38)$$

$$=2\alpha\left\{\int_{-1}^{1}f_{\alpha}N_{\alpha}\Phi_{\alpha}(t)d\alpha+\sum_{i=1}^{2}f_{\alpha_i}N_i\Phi_{\alpha_i}(t)\right\}$$

yi alırız. (4.36) ve (4.21) fonksiyonlarını (4.35) denklemindeki yerlerine koyarsak ve (4.26), (4.32) , (4.38) eşitliklerini ve $\varphi_{a}(\mu), \varphi_{a_i}(\mu)$ fonksiyonlarının da (4.22) probleminin öz fonksiyonları olduklarını göz önüne alırsak

$$\frac{d\Phi_\alpha(t)}{dt} + \frac{S_0(1-2S_0)}{aN_\alpha}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\Phi_\beta(t) + 4aC_{\beta\beta}(t)g_\beta N_\beta\right]\alpha\beta\sinh\left[a(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta})\right]d\beta + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\left[\Phi_{\alpha_j}(t) + 4aN_j g_{\alpha_j} a_{jj}(t)\right]\alpha\alpha_j \sinh\left[a(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha_j})\right]\right\} =$$

$$= \frac{2a}{\gamma} N_\alpha f_\alpha C_{\alpha\alpha}(t)\left\{\int_{-1}^{1} f_\beta \Phi_\beta(t)d\beta + \sum_{j=1}^{2} f_{\alpha_j} N_j \Phi_{\alpha_j}(t)\right\}, \qquad (4.39)$$

$$\frac{d\Phi_{\alpha_k}(t)}{dt} + \frac{S_0(1-2S_0)}{aN_k}\left\{\int_{-1}^{1}\left[\Phi_\beta(t) + 4aC_{\beta\beta}(t)g_\beta N_\beta\right]\beta\alpha_k \sinh\left[a(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta})\right]d\beta + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2}\left[\Phi_{\alpha_j}(t) + 4ag_{\alpha_j} N_j a_{jj}(t)\right]\alpha_j\alpha_k \sinh\left[a(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\alpha_j})\right]\right\} =$$

$$= \frac{2a}{\gamma} a_{kk}(t) f_{\alpha_k} N_k\left\{\int_{-1}^{1} f_\beta N_\beta \Phi_\beta(t)d\beta + \sum_{j=1}^{2} f_{\alpha_j} N_j \Phi_{\alpha_j}(t)\right\}$$

denklem sistemini elde ederiz.

Demek (4.36) fonksiyonunun katsayıları olan $\Phi_\alpha(t), (\alpha \in [-1,1]); \Phi_{\alpha_k}(t), (k=1,2)$ fonksiyonları (4.39) integro-diferensiyel denklem sisteminden ve (4.37) başlangıç şartlarından belirtile bilirler.

Şimdi de (4.15) sisteminin son denklemini açık bir şekilde yazalım:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + \int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1} g(x,\mu)\left\{\mu\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Phi(x,\mu,t) + S_0\int_{-1}^{1}\Phi(x,\mu',t)d\mu'\right\}d\mu =$$

$$= \frac{1}{4\gamma}\left\{\int_{-a}^{a}dx\int_{-1}^{1} f(x,\mu)\Phi(x,\mu,t)d\mu\right\}^2.$$

$\Phi(x,\mu,t)$ fonksiyonunun (4.36) şeklinde olduğunu göz önüne alırsak

$$\eta(t)=2S_0(1-2S_0)\int_t^T\Bigg\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}g_\beta\Phi_\alpha(\tau)d\beta\sinh\frac{(\alpha-\beta)a}{\alpha\beta}d\alpha d\beta+$$

$$+\sum_{i,k=1}^{2}g_{\alpha_i}\Phi_{\alpha_k}(\tau)\alpha_i\alpha_k\sinh\frac{(\alpha_k-\alpha_i)a}{\alpha_k\alpha_i}+ \tag{4.40}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left[g_\beta\Phi_{\alpha_k}(\tau)-g_{\alpha_k}\Phi_\beta(\tau)\right]\beta\alpha_k\sinh\frac{(\alpha_k-\beta)a}{\beta\alpha_k}d\beta\ \Bigg\}d\tau-$$

$$-\frac{a^2}{\gamma}\int_t^T\Bigg\{\int_{-1}^{1}f_\alpha N_\alpha\Phi_\alpha(\tau)d\alpha+\sum_{i=1}^{2}f_{\alpha_i}N_i\Phi_{\alpha_i}(\tau)\ \Bigg\}^2d\tau$$

eşitliğini elde ederiz.

5. PARÇACIKLARI TAŞIMA İŞLERİ OPTİMİZASYONUNDA SENTEZ YÖNETİMİ

İlkönce $S[t,\psi]$ fonksiyonunu başka bir şekilde yazalım. Bu nedenle $\widetilde{\psi}(x,\mu,t)$ fonksiyonunu (4.25) öz fonksiyonlarına göre açalım:

$$\widetilde{\psi}(x,\mu,t)=\psi(x,\mu,t)-g(x,\mu)=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\psi_\alpha(t)-g_\alpha\right]\exp(-x/\alpha)\varphi_\alpha(\mu)d\alpha+ \tag{5.1}$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\left[\psi_{\alpha_k}(t)-g_{\alpha_k}\right]\exp(-x/\alpha_k)\varphi_{\alpha_k}(\mu).$$

Bunu ve (4.21), (4.36) fonksiyonlarını (3.11)'deki yerlerine koyarsak ve (4.31), (4.32) eşitliklerini göz önüne alarak bazı işlemleri yaparsak $S[t,\psi]$ için aşağıdaki ifadeyi alırız:

$$S[t,\psi]=4a^2\Bigg\{\int_{-1}^{1}N_\alpha^2C_{\alpha\alpha}(t)\left[\psi_\alpha(t)-g_\alpha\right]^2d\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}a_{ii}(t)N_i^2\left[\psi_{\alpha_i}(t)-g_{\alpha_i}\right]^2\ \Bigg\}+2a\Bigg\{\int_{-1}^{1}\Phi_\alpha(t)\left[\psi_\alpha(t)-g_\alpha\right]N_\alpha d\alpha+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\Phi_{\alpha_i}(t)\left[\psi_{\alpha_i}(t)-g_{\alpha_i}\right]N_i\ \Bigg\}+\eta(t). \tag{5.2}$$

Burada $C_{\alpha\alpha}(t), a_{ii}(t),_{h}\ (t)$ (4.33), (4.31) ve (4.40) eşitlikleriyle belirtilirler, $\Phi_{\alpha}(t), (\alpha \in [-1,1]); \Phi_{\alpha_i}(t), (i = 1,2)$ fonksiyonları ise (4.37), (4.39) Cauchy probleminin
çözümüdür.

(5.2) fonksiyonunun gradyantı olan $\psi^{*}(x,\mu,t)$ fonksiyonu (4.12) formülüne göre aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\psi^{*}(x,\mu,t) = 4a\left\{\int_{-1}^{1} e^{x/\alpha} N_{\alpha}\left[\psi_{\alpha}(t) - g_{\alpha}\right] C_{\alpha\alpha}(t)\mu\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} e^{x/\alpha_i} N_i \left[\psi_{\alpha_i}(t) - g_{\alpha_i}\right] a_{ii}(t)\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu) \right\} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} \Phi_{\alpha}(t) e^{x/\alpha} \mu\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha + \sum_{i=1}^{2} \Phi_{\alpha_i}(t) e^{x/\alpha_i} \mu\varphi_{\alpha_i}(\mu) \qquad (5.3)$$

Optimal yönetim $u(t)$ ise (3.3) formülüne göre $\psi(x,\mu,t)$ fonksiyonunun yardımıyla belirtilebilen bir fonksiyondur. Gerçekten (3.3) ve (5.3) formüllerinden aşağıdaki eşitliği alırız:

$$u(t) = -\frac{4a^2}{\gamma}\left\{\int_{-1}^{1} f_{\alpha} N_{\alpha}^{2} C_{\alpha\alpha}(t)\left[\psi_{\alpha}(t) - g_{\alpha}\right]d\alpha + \sum_{i=1}^{2} f_{\alpha_i} N_i^{2} a_{ii}(t)\left[\psi_{\alpha_i}(t) - g_{\alpha_i}\right]\right\} -$$

$$- \frac{a}{\gamma}\left\{\int_{-1}^{1} f_{\alpha} N_{\alpha} \Phi_{\alpha}(t)d\alpha + \sum_{i=1}^{2} f_{\alpha_i} N_i \Phi_{\alpha_i}(t)\right\} \qquad (5.4)$$

Şimdi de (5.1)'den

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} \left[\psi(x,\mu,t) - g(x,\mu)\right]\mu\varphi_{\alpha}(\mu)d\mu = 2\alpha \sinh(\frac{a}{\alpha}) N_{\alpha}\left[\psi_{\alpha}(t) - g_{\alpha}\right] \quad ,$$

$\alpha \in [-1,1]$

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} \left[\psi(x,\mu,t) - g(x,\mu)\right]\mu\varphi_{\alpha_i}(\mu)d\mu = 2\alpha_i \sinh(\frac{a}{\alpha_i}) N_i\left[\psi_{\alpha_i}(t) - g_{\alpha_i}\right] \quad ,$$

$i = 1,2$

eşitliklerini elde ederiz. Bu son formüllerden ve (5.4)'den

$$u(t) = \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} R(\mu,t)\psi(x,\mu,t)d\mu + \xi(t) \tag{5.5}$$

eşitliğini alırız. Burada

$$R(\mu,t) = -\frac{2a^2}{\gamma}\left\{ \int_{-1}^{1} \frac{f_\alpha N_\alpha C_{\alpha\alpha}(t)}{\alpha \sinh(\frac{a}{\alpha})} \mu\varphi_\alpha(\mu)d\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2} \frac{f_{\alpha_i} N_i a_{ii}(t)}{\alpha_i \sinh(\frac{a}{\alpha_i})} \mu\varphi_{\alpha_i}(\mu) \right\}, \tag{5.6}$$

$$\xi(t) = -\frac{a}{\gamma}\left\{ \int_{-1}^{1} f_\alpha N_\alpha \Phi_\alpha(t)d\alpha + \sum_{i=1}^{2} f_{\alpha_i} N_i \Phi_{\alpha_i}(t) \right\} -$$

$$- \int_{-a}^{a} dx \int_{-1}^{1} R(\mu,t)g(x,\mu)d\mu$$

dür. İşte (5.5) ve (5.6) formülleri (4.1) parçacıkları taşıma denklemi için (4.4) kuadratik fonksiyonunun minimizasyonu problemindeki optimal yönetimin istenen *sentezini* belirtmektedirler.

KAYNAKLAR

1. *K. Keyz, P. Tzvayfel*. Lineynaya Teoriya Perenosa (İzd. Mir, Moskova, 1972), 384s.
2. *A. Egorov, R. Rafatov*. Matematiçeskiye Metodı Optimizatzii Protzessov Teploprovodnosti i Diffuzii (İzd. İlim, Bişkek,1990),337s.
3. *Rafatov*. Metod Sferiçeskih Harmonik v Probleme Minimizatzii zagryazneniy Atmosferı Çastitzami Vrednıh Primesey. // Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi: Sayı: 2, 2002, 96-117.s.