ОЦЕНКА МАКСИМУМА ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛОМ ОТ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ.

Доцент, к. ф.-м. н. Анаркуль УРДАЛЕТОВА

Кыргызско-Турецкий Университет «МАНАС»

Известно, что благодаря результатам О.А. Ладыженской , Н.Н.Уральцевой и В.А. Солонникова по линейным задачам для уравнений эллиптического и параболического типов и благодаря теореме Лере-Шаудера о неподвижных точках вполне непрерывных преобразований вопрос о разрешимости в целом краевых задач и задачи Коши для квайзилинейных эллиптических и параболических уравнений сводится к вопросу об априорной ограниченности норм в пространствах Гёльдера для всех возможных решений этих задач. Одной из наиболее трудоемких частей при решении указанного вопроса является оценка $\max\limits_{Q_T}|U_x(x,t)|$.

В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для уравнения типа теплопроводности, имеющего нелинейный коэффициент при старших производных. Этот коэффициент является функционалом от градиента неизвестной функции. Показано , что при некоторых условиях на известные в задаче функции имеет место классический принцип максимума и, кроме того, получена априорная внутренняя оценка градиента решений через известные постоянные.

Пусть Ω -ограниченная область в R^n, $\partial\Omega$ -граница области Ω, $[0,T]\subset R$, $Q_T=\Omega\times[0,T]$ - цилиндр, $S_T=\partial\Omega\times[0,T]$ - боковая поверхность Q_T, $\Gamma_T=S_T \cup \{(x,t)\in Q_T | t=0\}$.

Рассмотрим задачу следуюшего вида

$$LU \equiv U_t - \int_{\Omega} (1+U_x^2)dx \cdot \Delta U = f(x,t),(x,t)\in Q_T \,, \qquad (1)$$

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad (2)$$

$$U\big|_{S_T} = 0, \qquad (3)$$

на нахождение функции U(x,t), удовлетворяющей уравнению (1), начальному условию (2) и граничному условию(3).

Здесь Δ-оператор Лапласа, $U_x = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}$, $U_t = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Введем линейное банахово пространство $\overset{o}{B}_2(Q_T)$ функций $U(x,t)\in C([o,T]\to W_2^1(\Omega))$.Это абстрактные функции непрерывные по $t\in[0,T]$ и при фиксировании *t*, из [0,T] являющиеся элементами $\overset{o}{W}{}_2^{1}(\Omega)$, имеющих конечную норму $\|U(x,t)\|_{\overset{o}{B}_2(Q_T)} = \left(\max\limits_{0\le t\le T}\int_{\Omega} U_x^2)(x,t)dx\right)^{1/2}$. (4)

Определение 1. Ограниченным обобщенным решением уравнения (1) назовем функцию $U(x,t)\in \overset{o}{B}_2(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|U| < \infty$, удовлетворяющую интегральному тождеству.

$$\int_{\Omega} U\cdot\eta dx + \int_0^t\int_{\Omega}\left[-U\eta_t + \int_{\Omega}(1+U_x^2)dx\cdot U_{x_i}\cdot\eta_{x_i}\right]dxdt = \int_o^t\int_{\Omega} f\cdot\eta dxdt\,, \qquad (5)$$

при $\forall t\in[0,t]$, для $\forall\eta(x,t)\in \overset{o}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\eta(x,0)=0$, с $vrai\max\limits_{Q_T}|\eta| < \infty$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

(Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам).

Оределение 2. Ограниченным обобщенным решением задачи (1)-(3) из $\overset{o}{B}_2(Q_T)$ назовем функцию $U(x,t) \in \overset{o}{B}_2(Q_T)$ с $vrai\max\limits_{Q_T}|U| < \infty$, при $\forall t \in [0,T]$ удовлетворяющую интегральному тождеству.

$$\int\limits_{\Omega} U(x,t)\cdot\eta(x,t)dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}[-U(x,t)\cdot\eta_t(x,t) + \int\limits_{\Omega}(1+U_x^2(x,t))dx\cdot U_{x_i}(x,t)\cdot\eta_{x_i}(x,t)]\cdot dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\varphi(x)\cdot\eta(x,0)dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} f(x,t)\cdot\eta(x,t)dxdt, \tag{6}$$

для $\forall\eta(x,t) \in \overset{o}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ с

$vrai\max\limits_{Q_T}|\eta| < \infty, \varphi(x) \in \overset{o}{W}{}_2^{1}(\Omega), f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

Интегральные тождества (5) и (6) получаются формальным умножением уравнения (1) на соответствующие функции $\eta(x,t)$ и интегрированием по частям.

Покажем, что при некоторых условиях задачу (1)-(3) можно рассматривать как задачу для линейного параболического уравнения.

Обозначим через $a(t) = \int\limits_{\Omega}(1+U_x^2)dx$ (7)

Заметим , что $a(t) \geq 1$.

Возьмем $\eta(x,t) = -\Delta U(x,t)$. Умножим обе части (1) на $\eta = -\Delta U$ и проинтегрируем по Q_{t_1}, где $t_1 \in [0,T]$.

$$\int\limits_{Q_{t_1}} U_t(-\Delta U)dxdt - \int\limits_{Q_{t_1}} a(t)\cdot(\Delta U)^2 dxdt = \int\limits_{Q_{t_1}} f(x,t)\cdot(-\Delta U)dxdt.$$

Проинтерируем в первом слагаемом по частям и правую часть оценим сверху, используя неравенство Коши с ε вида $|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$,

справедливое при $\forall\varepsilon > 0$ и произвольных *a* и *b*,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{Q_{t_1}} \frac{\partial}{\partial t}(U_{x_k}^2)dxdt + (1-\frac{\varepsilon}{2})\int\limits_{Q_{t_1}} a(t)\cdot(\Delta U)^2 dxdt \le \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{2,Q_{t_1}}^2 .$$

При $\varepsilon = 1$ из последнего неравенства получим два следующих неравенства:

$$\int\limits_{Q_T} a(t)\cdot(\Delta U)^2 dxdt \le \|f\|_{2,Q}^2 + \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 , \tag{8}$$

$$\max_{0\le t_1\le T}\int U_x^2(x,t)\ \Big|^{t_1} dx \le \|f\|_{2,Q_T}^2 + \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}^2 . \tag{9}$$

Следовательно, если $f(x,t)\in L_2(Q_T), \varphi(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и *U(x,t)* является ограниченным обобщенным решением задачи (1)-(3), $U(x,t)\in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и имеет смешанные производные $U_{tx_k}\in L_2(Q_T)$, то задачу(1)-(3) можно рассматривать как задачу для линейного параболического уравнения

$$U_t - a(t)\cdot\Delta U = f(x,t), \tag{10}$$

с условием равномерной параболичности

$$1 \le a(t) \le \mu_0, \tag{11}$$

где $\mu_0 = \|f\|_{2,Q_T}^2 + \|\varphi\|_{\overset{\circ}{w}{}_2^1(\Omega)}^2$.

Это позволяет (см.[1], гл.III, § 7) утвеждать справедливость следующей теоремы.

Теорема (принцип максимума). Если $U(x,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ ограниченное обобщенное решения уравнения (1) с $U_{tx_k} \in L_2(Q_T)$, не превосходящее $\hat{K}$ на Γ_T, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и выоплнены условия

$$\|f\|^2_{2,Q_T} \leq \mu_1, \quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)} \leq \mu_2, \mu_1\mu_2 = const > 0 \qquad (12)$$

то $\max\limits_{Q_T} U(x,t)$ конечен и оценивается сверху постоянной *C*, определяемой лишь $n, \hat{K}, \mu_1, \mu_2$ и $mesQ_T$,причем *C* возрастает с ростом $mesQ_T$.

Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть $U(x,t)$ ограниченное обобщенное решение уравнения (1) и $vrai \max\limits_{Q_T} |U(x,t)| \leq M$, кроме того, пусть $|f(x,t)| \leq \mu_1$. Тогда для любого цилиндра $Q_{\rho,t}$, расположенного в цилиндре Q_T, вместе с концентрическим ему цилиндром $Q_{2\rho,t}$, где $Q_{\rho,t} = K_\rho \times (0,t)$, K_ρ-шар в $\Omega, t \in [0,T]$ имеет место оценка

$$\int\limits_{Q_{\rho,t}} a(t) U_x^2(x,t) dxdt \leq C_1(\mu_1, \mu_0, M, \rho^{-1}) \qquad (13)$$

где $C_1 = const > 0.$

Доказательство. Рассмотрим концентрические шары $K_\rho \subset K_{2\rho} \subset \Omega, 0 < \rho \leq 1$ и произвольную срезающую функцию $\zeta(x,t), t \in [0,T]$, равную единице в $Q_{\rho,t}$ и нулю вне $Q_{2\rho,t}$.

Умножим обе части (1) на $\eta(x,t) = e^{\lambda U} \zeta^2(x,t)$, с $\eta(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_2(Q_{2\rho,t})$ с некоторой $\lambda = const$ достаточно большой, значение которой будет конкретизировано ниже , и проинтегрируем по $Q_{2\rho,t}$

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} U_t \cdot e^{\lambda U}\zeta^2 dxdt - \int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t)e^{\lambda U}\zeta^2 \cdot \Delta U dxdt = \int\limits_{Q_{2\rho,t}} f \cdot e^{\lambda U}\zeta^2 dxdt., \quad (14)$$

Очевидно , что

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} U_t \cdot e^{\lambda U}\zeta^2 dxdt = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{Q_{2\rho,t}} (e^{\lambda U}\zeta^2)_t dxdt - \frac{2}{\lambda}\int\limits_{Q_{2\rho,t}} e^{\lambda U} \cdot \zeta \cdot \zeta_t dxdt. \quad (15)$$

Проведя во втором слогаемом (14) интегрирование по частям и учитывая (15),имеем

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{K_{2\rho}} e^{\lambda U}\zeta^2 dx + \lambda \int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t)\cdot e^{\lambda U}U_x^2 dxdt = -2\int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t)e^{\lambda U}\zeta\zeta_{x_i}\cdot U_{x_i} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [f\cdot e^{\lambda U}\zeta^2 + \frac{2}{\lambda}e^{\lambda U}\zeta\zeta_t]dxdt. \quad (16)$$

Первое слагаемое правой части (16) оценим сверху с помощью неравенства Коши с ε следующим образом

$$-2\int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t)e^{\lambda U}\zeta\zeta_{x_i}\cdot U_{x_i}\cdot dxdt \le \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [\varepsilon a(t)e^{\lambda U}U_x^2\zeta^2 + \frac{1}{\varepsilon}a(t)e^{\lambda U}\zeta_x^2]dxdt \quad (17)$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{2}$, тогда из (14) и (15) с использованием условий леммы при $\lambda = 2\mu_1$, получим неравенство (13)

$$\int\limits_{Q_{\rho,r}} a(t)U_x^2 dxdt \le C_1(\mu_1,\mu_0,M,\rho^{-1}).$$

Теперь получим априорную оценку $\max\limits_{Q'}|U_x(x,t)|$ для решений *U(x,t)* уравнения(1), при этом ограничимся внутренними оценками. Будем считать, что $U(x,t)\in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, и $U_{tx_k}\in L_2(Q_T)$, $k=\overline{1,n}$, $\|f\|_{2,Q_T}^2 \le \mu_1$.

Прежде оценим $\int\limits_{Q_{\rho,t}} |U_x(x,t)|^l\, dxdt$, при $\forall l > 2$ через известные в задаче параметры.

Возьмем цилиндр $Q_{2\rho,t} = K_{2\rho} \times (o,t)$ и гладкую функцию $\xi(x,t)$ со значениями между 0 и 1, равную нулю вблизи нижнего основания и боковой поверхности этого цилиндра.

Рассмотрим равенство

$$-\int\limits_{Q_{2\rho,t}} \sum_{k=1}^{n} LU \cdot \frac{d}{dx_k}(|U_x|^{2s} \cdot U_{x_k} \cdot \xi^2) dxdt = 0,$$

преобразуем его с помощью двукратного интегрирования по частям.

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} U_{tx_k} \cdot U_{x_k} \cdot |U_x|^{2s} \cdot \xi^2 dxdt - \int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t) \cdot U_{x_i x_k} \cdot (|U_x|^{2s} \cdot U_{x_k} \cdot \xi^2) x_i dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_{2\rho,t}} f \cdot [|U_x|^{2s} \cdot U_{x_k} \xi^2 dxdt = 0. \qquad (18)$$

Заметим,что

$$I_1 = \int\limits_{Q_{2\rho,t}} U_{tx_k} \cdot |U_x|^{2s} \cdot U_{x_k} \cdot \xi^2 dxdt = \frac{1}{2s+2} \int\limits_{Q_{2\rho,t}} \frac{d}{dt}[|U_x|^{2s+2} \xi^2] dxdt -$$

$$-\frac{2}{2s+2} \int\limits_{Q_{2\rho,t}} |U_x|^{2s+2} \cdot \xi \cdot \xi_t dxdt =$$

$$= \frac{1}{2s+2} \int\limits_{K_{2\rho}} |U_x|^{2s+2} \xi^2 dx \Big|_0^t - \frac{1}{s+1} \int\limits_{Q_{2\rho,t}} |U_x|^{2s+2} \xi \xi_t dxdt,$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_{2\rho,t}} a(t) \cdot U_{x_i \cdot x_k} (|U_x|^{2s} \cdot U_{x_k} \cdot \xi^2)_{x_i} dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [\sum_{k,i=1}^{n} a(t)U^2_{x_i \cdot x_k} \left|U_x\right|^{2s} \xi^2 dxdt + 2s \cdot a(t) \cdot U_{x_i \cdot x_k} \cdot U_{x_l x_i} \cdot \left|U_x\right|^{2s-2} \cdot U_{x_k} U_{x_l} \xi^2 +$$

$$+ 2a(t)U_{x_i \cdot x_k} \left|U_x\right|^{2s} U_{x_k} \cdot \xi\xi_{x_i}]dxdt$$

Оставим в левой части (18) заведомо неотрицательные члены, а остальные перенесем направо и оценим их сверху с помощью неравенства Коши с ε ,отдавая ε слагаемым подобным тем, которые стоят в левой части. Перенесем слагаемые с ε в левую часть , выберем ε так , слагаемые левой части оставались неотрицательными (по существу поступим также, как в § 11 гл III книги {2}).

Это приведет нас к неравенству

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} \left|U_x\right|^{2s+2} \xi^2 dxdt + \int\limits_{Q_{2\rho,t}} U^2_x \cdot \left|U_x\right|^{2s} \xi^2 dxdt \le$$

$$\le (s+1)C_2(\mu_1) \cdot \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [\left|U_x\right|^{2s+2} (\left|\xi_t\right|^2 + \left|\xi_x\right|^2 + \xi^2)]dxdt + \left\| \left|U_x(x,0)\right|^{s+1} \xi(x,0) \right\|^2_{2,K_{2\rho}} . \quad (19)$$

С другой стороны для производной гладкой функции справедливо неравенство (см.(5.8)глIII, книги {2}, стр.111).

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} \left|U_x\right|^{2s+4} \xi^2 dxdt \le C_3 \cdot \rho^{\alpha_1} \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [(s+1)^2 \left|U_x\right|^{2s} \cdot U^2_{xx} \xi^2 + \left|U_x\right|^{2\rho+2} (\xi^2_x + \xi^2)]dxdt \quad (20)$$

Из (19) и (20) получим

$$\int\limits_{Q_{2\rho,t}} \left|U_x\right|^{2s+4} \xi^2 dxdt \le C_4(s,\mu_1) \{ \int\limits_{Q_{2\rho,t}} [\left|U_x\right|^{2s+2} (\xi^2_t + \xi^2_x + \xi^2)]dxdt + \left\| \left|U_x(x,0)\right|^{s+1} \xi(x,0) \right\|^2_{2,K_{2\rho}} \} \quad (21)$$

Из неравенства (21) ввиду (13) и в связи с тем, что шар K_ρ был выбран произвольно, лишь бы $K_\rho \subset K_{2\rho} \subset \Omega$, очевидно имеем

$$\int\limits_{Q'} \left|U_x\right|^l dxdt \le C[\mu_1, n, M, \mu_0, dist(\Omega', \partial\Omega)], \quad (22)$$

для $\forall l \ge 2, \forall Q' \subset Q_T$.

Оценка (22) позволяет утверждать справедливость неравенства (см.[2]),

$$vrai\max_{Q'}\left|U_x(x,t)\right| \le C[\mu_1, n, M, \mu_0, dist(\Omega, \partial\Omega)].$$

ЛИТЕРАТУРА:

1. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева, Линейные и квайзилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, Москва, 1973 г.

2. Ладыженская О.А., Солонников В.А.,Уральцева Н.Н. Линейные и квайзилинейные уравнения параболического типа, Наука, Москва, 1967 г.