СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛЬТЬЕСА

Проф. др. Авыт АСАНОВ
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

Введение и предварительные результаты

В общем случае системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса не сводятся к системе интегральных уравнений Вольтерра, так как интеграл Стильтьеса не всегда сводится к интегралу Римана или интегралу Лебега [1]. Поэтому изучение систем интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса представляет самостоятельный интерес. Исследованию систем интегральных уравнений Вольтерра посвящено большое количество работ [2-6]. Скалярные интегральные уравнения Вольтерра-Стильтьеса исследованы в работе [8]. В этой работе, с помощью понятия производной по возрастающей функции изучены системы интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого и второго рода. Понятие производной по возрастающей функции введено в работу автора [7].

В данной работе все интегралы понимается в смысле Стильтьеса.

ЛЕММА 1.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, для каждого фиксированного $t \in (a, b]$, функция $g(t, s)$ по s имеет ограниченное изменение на $[a, t]$, функции $f(t, s)$ и $g_{x(s)}(t, s)$ непрерывные функции в области $G = \{(t, s) / a £ s £ t£ b\}$, где

$$g'_{x(s)}(t, s) = \lim_{\Delta s \to o} \frac{g(t, s+\Delta s) - g(t, s)}{x(s+\Delta s) - x(s)}.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_a^t f(t, s)\, d_s [g(t, s)] = \int_a^t f(t, s)\, g'_{x(s)}(t, s) dx(s), \tag{1.1}$$

где $t\ \hat{I}\ (a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим $[a, t]$ на части точками $a = t_o < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = t$, выберем в пределах каждого частичного сегмента $[t_k, t_{k+1}]$ по точке ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=o}^{n-1} f(t, \xi_k) [g(t, t_{k+1}) - g(t, t_k)].$$

Если $\lambda = max\,(t_{k+1} - t_k)$, то по определению интеграла Стильтьеса имеем

$$\int_a^t f(t, s)\, d_s [g(t, s)] = \lim_{l \to o} \sigma_n(t), \tag{1.2}$$

где предел не зависит от способа дробления, ни от выбора точек x_k.

Для каждого частичного сегмента $[t_k, t_{k+1}]$ применяя обобщенное теоремы Лагранжа [7], имеем

$$g(t, t_{k+1}) - g(t, t_k)] = g'_{x(s)}(t, h_k)[x(t_{k+1}) - x(t_k)], \tag{1.3}$$

где $h_k \in (t_k, t_{k+1})$.

Учитывая (1.3) и выбирая $x_k = h_k$ из (1.2) получим требуемую формулу (1.1). Лемма 1.1 доказана.

Через A^T обозначим транспонированную матрицу к матрице А. Обозначим через $\|A\|$ и $\|u\|$ нормы соответственно для $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ и для n - мерного вектора $u = (u_i)$ т.е.

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \quad \|u\| = \sum_{i=1}^{n}|u_i|.$$

Будем обозначать через $C_n[a, b]$ пространства n - мерных вектор функций с элементами из $C[a, b]$ и $C_{nn}(G)$ – пространства $n \times n$ - мерных матричных функций с элементами из $C(G)$. Известно, что пространства $C_n[a, b]$ и $C_{nn}(G)$ являются банаховыми пространствами с нормой

$$\|u(t)\|_C = \sup_{t\in[a,b]}\|u(t)\|, \quad \|A(t)\|_C = \sup_{t\in G}\|A(t)\|,$$

где $u(t) \in C_n[a, b]$, $A(t) \in C_{nn}(G)$.

2. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода

Рассмотрим системы:

$$u(t) = \int_a^t A(t,s)\,[u^T(s)d_s B(t, s)]^T + f(t), \tag{2.1}$$

где $t \in [a, b]$, $A(t, s)$ и $B(t, s)$ – $n \times n$ - мерные известные матричные функции, $f(t)$ – n - мерная известная вектор-функция и $u(t)$ – n - мерная неизвестная вектор-функция.

ЛЕММА 2.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$,

$A(t, s)$ и $B'_{x(s)}(t,s)$ – $n \times n$ - мерные непрерывные матричные функции на G, где $B'_{x(s)}(t, s) = ((b_{ij}(t, s))'_{x(s)}$ является производной от $B(t, s) = (b_{ij}(t, s))$ по $x(s)$. Тогда система (2.1) эквивалентна к следующей системе

$$u(t) = \int_a^t K(t,s)\,u(s)dx(s) + f(t), \tag{2.2}$$

где $t \in [a, b]$,

$$K(t, s) = A(t, s)\,(B'_{x(s)}(t, s))^T.$$

Доказательство вытекает из леммы 1.1.

Далее в силу леммы 2.1 будем рассматривать систему (2.2). Пусть $n \times n$ - мерное матричное ядро $K(t, s)$ является непрерывной матричной функцией на G и

$$M = \sup_{(t,s)\in G} \| K(t, s) \| . \tag{2.3}$$

Тогда решение $R(t,s) = (R_{ij}(t,s))$ следующего матричного интегрального уравнения

$$R(t, s) = \int_s^t K(t,t) R(t, s)dx(t) + K(t, s), \quad (t, s) \in G, \tag{2.4}$$

будем называть резольвентой матричного ядра $K(t, s)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, $K(t, s) \in C_{nn}(G)$ и $f(t) \in C_n [a, b]$. Тогда

1) матричное уравнение (2.4) имеет единственное решение $R(t, s)$ в пространстве $C_{nn}(G)$;

2) система (2.2) имеет единственное решение $u(t)$ в пространстве $C_n [a, b]$ и $u(t)$ представимо в виде

$$u(t) = f(t) + \int_a^t R(t, t) f(t)\, d x(t), \quad t \in [a, b]. \tag{2.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сначала докажем единственность решения матричного уравнения (2.4). Пусть $R_1 (t, s)$ и $R_2 (t, s)$ - произвольные два решения матричного уравнения (2.4) из пространства $C_{nn}(G)$. Тогда

$$R_1 (t, s) - R_2 (t, s) = \int_s^t K(t,t) \, [R_1 (t, s) - R_2 (t, s)]dx(t), \quad (t, s) \in G.$$

Из этого матричного уравнения, имеем

$$\| R_1 (t, s) - R_2 (t, s) \| \leq \int_s^t M \, \| R_1 (t, s) - R_2 (t, s)\| dx(t) + \frac{1}{m},$$

где $(t, s) \in G$, $m \in N$ - множество натуральных чисел, M – определено по формуле (2.3). Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8, теорема 1.3] получим

$$\| R_1 (t, s) - R_2 (t, s) \| \leq \frac{1}{m} \exp \{M [x(b) – x(a)]\},$$

для всех $(t, s) \in G$, $m \in N$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, из последнего неравенстсва имеем $R_1 (t, s) = R_2 (t, s)$ при всех $(t, s) \in G$.

Далее, докажем существование решения матричного уравнения (2.4) в пространстве $C_{nn}(G)$. Для решения матричного уравнения (2.4) применим метод последовательных приближений:

$R_o (t, s) = K(t, s),$

$$R_m(t, s) = \int_s^t K(t,\tau) R_{m-1}(\tau, s)\, dx(\tau) + K(t, s), \tag{2.6}$$

где $m \in N$. Методом математической индукции, из (2.6) получим следующие оценки:

$\| R_o(t, s) \| \leq M,$

$$\| R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)\| \leq M^{m+1} \frac{[x(t)-x(s)]^m}{m!} \tag{2.7}$$

где $(t, s) \in G$, $m \in N$. Из оценки (2.7) имеем

$$\sup_{(t,s)\in G} \| R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)\| \leq M^{m+1} \frac{[x(b)-x(a)]^m}{m!} \tag{2.8}$$

для всех $m \in N$. В силу оценки (2.8) следует, что функциональный ряд

$$R_o(t, s) + \sum_{m=1}^{\infty} [R_m(t, s) - R_{m-1}(t, s)],$$

в области G равномерно сходится к $R(t, s)$ и $R(t, s)$ является единственным решением матричного уравнения (2.4) из банахова пространства $C_{nn}(G)$.

2) Сначала докажем единственность решения системы (2.2). Для этого нам достаточно доказать, что система (2.2) для $f(t) \equiv 0$ имеет только нулевое решение из $C_n[a, b]$. Пусть $f(t) \equiv 0$ в области $[a, b]$. Тогда, из системы (2.2) имеем

$$\| u(t) \| \leq \int_a^t M \| u(s)\|\, dx(s) + \frac{1}{m},$$

где $t \in [a, b]$, $m \in N$. Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8, теорема 1.3] и переходя к пределу при $m \to \infty$ получим, что $u(t) \equiv 0$ в области $[a, b]$.

Далее, докажем что вектор-функция $u(t)$ определенная по формуле (2.5) является единственным решением системы (2.2) из пространства $C_n[a, b]$. Из (2.5) нетрудно убедиться, что если $f(t) \in C_n[a, b]$, то $u(t) \in C_n[a, b]$. Подставляя формулу (2.5) в систему (2.2), применяя обобщенную формулу Дирихле [8, теорема 1.2] и учитывая, что $R(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.4), получим

$$\int_{t_o}^t [R(t,s) - \int_s^t K(t,\tau) R(\tau, s)dx(\tau) - K(t,s)]\, f(s)dx(s) = 0,$$

для всех $t \in [a, b]$. Теорема 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполняются все условия теоремы 2.1. Тогда

1) для решения $R(t, s)$ матричного уравнение (2.4) справедлива оценка

$$\| R(t, s)\| \leq M \exp\{M[x(t) - x(s)]\},\ (t, s) \in G,$$

где M определено по формуле (2.3);

2) для решения $u(t)$ системы (2.2) справедлива оценка

$$\| u(t) \|_C = \sup_{t\in[t_o,T]} \| u(t)\| \le C_o \| f(t)\|_C , \tag{2.9}$$

где

$$C_o = exp\, \{M\, [x(b) - x(a)]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (2.4), имеем

$$\| R(t, s)\| \le \int_s^t M\, R(t, s) dx(t) + M, \ \ (t, s) \in G.$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку

2) Из (2.2), имеем

$$\| u(t)\| \le \int_a^t M\, \| u(s)\|\, dx(s) + \| f(t) \|_C , \ \ t \in [a, b].$$

Отсюда, используя обобщенное неравенство Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемую оценку (2.9). Теорема 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $K(t, s) = A(t)\, B(s)$, где $A(t)$ и $B(t)$ – $n \times n$ - мерные непрерывные матричные функции в $[a, b]$.

Тогда

1) решение $R(t, s)$ матричного уравнения (2.4) определяется по формуле

$$R(t, s) = A(t)\, X(t, s)\, B(s), \ \ (t, s) \in \overline{G}\, , \tag{2.10}$$

где $X(t, s)$ является решением следующего матричного уравнения

$$X(t, s) = \int_s^t B(t)\, A(t) X(t, s) dx(t) + I_n , \tag{2.11}$$

I_n – $n \times n$ - мерная единичная матрица;

2) решение $u(t)$ системы (2.2) определяется по формуле

$$u(t) = f(t) + \int_a^t A(t)\, X(t, s) B(s) f(s) dx(s), \tag{2.12}$$

где $t \in [a, b]$, $X(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Проверим, что $R(t, s)$ определенное по формуле (2.10) удовлетворяет систему (2.4). В самом деле

$$A(t)\, \{X(t, s) - \int_s^t B(t)\, A(t) X(t, s) dx(\tau) - I_n \} B(s) = 0$$

при всех $(t, s) \in G$. Так как $X(t, s)$ является решением матричного уравнения (2.11).

2) Справедливость формулы (2.12) вытекает, из формулы (2.5) (теорема 2.1) и (2.10). Теорема 2.3 доказана.

3. Система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода

Рассмотрим системы

$$u(t) = \int_a^t K(t,s,u(s))\,dx(s) + f(t),\ t \in [a, b], \tag{3.1}$$

где $K(t, s, u)$ и $f(t)$ – n - мерные известные вектор-функции, $u(t)$ - неизвестная n - мерная вектор-функция, $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$.

Будем говорить, что для n - мерной вектор-функции $K(t, s, u)$ выполнено условие (A), если: $\| K(t, s, 0)\|$ - ограниченная функция в $\overline{G}$ и $K(t, s, u)$ по u удовлетворяет условие Липшица с коэффициентом L, т.е для любых (t, s, u_1),

$$(t, s, u_2) \in \overline{G} \times R^n$$

$$\| K(t, s, u_1) - K(t, s, u_2) \| \le L \| u_1 - u_2 \|.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняется условие (A) и $f(t) \in C_n [a, b]$**.** Тогда

1) система (3.1) имеет единственное решение в пространстве $C_n [a, b]$;

2) если $u_1(t)$ является решением системы (3.1) при $f(t) = f_1(t) \in C_n [a,b]$ и $u_2(t)$ является решением системы (3.1) при $f(t)= f_2(t) \in C_n [a, b]$, то справедлива оценка

$$\| u_1(t) - u_2(t)\|_C \le C \, \| f_1(t) - f_2(t)\|_C , \tag{3.2}$$

где

$$C = \exp \{L[x(b) - x(a)]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для решения системы (3.1) применим метод последовательных приближений:

$$\begin{gathered} u_o(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,0)\,dx(s), \\ u_m(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s,u_{m-1}(s))\,dx(s), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $m \in N$. Методом математической индукции с учетом условия (A) из (3.3) получим следующие оценки:

$$\| u_o(t)\| \le \sup_{t\in[a,b]} \| f(t) + \int_{t_o}^t K(t,s,0)\,dx(s) \| = N_o ,$$

$$|| u_m(t) - u_{m-1}(t)|| \le N_o L^m \frac{[x(t)-x(a)]^m}{m!}$$

где $t \in [a, b], m \in N$. Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_o(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(t) - u_{m-1}(t)]$$

в области $[a, b]$ равномерно сходится к $u(t) \in C_n [a, b]$ и $u(t)$ является решением системы (3.1). Единственность решения системы (3.1) вытекает из оценки (3.2). Докажем оценки (3.2).

2) Учитывая, что $u_1 (t), u_2 (t)$ являются решением системы (3.1) соответственно для

$f(t) = f_1(t), f(t) = f_2(t)$ и условие (A), из (3.1) имеем:

$$|| u_1(t) - u_2(t)||_C \le \int_a^t L \, || u_1 (s) - u_2 (s)|| dx(s) + || f_1(t) - f_2(t)||_C$$

при $t \in [a, b]$. Отсюда, в силу обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [8] получим требуемое оценку (3.2).

4. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого рода

Рассмотрим теперь следующие системы

$$\int_a^t A(t,s) \, [u^T(s) d_s B(t, s)]^T = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.1}$$

где $A(t, s)$ и $B(t, s)$ – $n \times n$ - мерные известные матричные функции, $f(t)$ – n - мерная известная вектор-функция и $u(t)$ – n - мерная неизвестная вектор-функция на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $x(t)$ - возрастающая непрерывная функция на $[a, b]$, $n \times n$ – мерные матричные функции $A(t, s)$, $\frac{\partial A(t,s)}{\partial x(t)}$, $\frac{\partial B(t,s)}{\partial x(s)}$, $\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial x(t)\partial x(s)}$, непрерывны в области $\overline{G}$ и $det \left[A(t,s) \frac{\partial B(t,s)}{\partial x(s)} \right] \Big|_{s=t} \ne 0$ при всех $t \in [a, b]$. Тогда, для того чтобы система (4.1) имела единственное решение из $C_n [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ в $[a, b]$ имела непрерывное производное $f_{x(t)}'(t)$ и $f(a) = 0$. В этом случае система (4.1) эквивалентна к следующей системе интегральных уравнений второго рода:

$$u(t) = - \int_a^t K^{-1}(t,t) \frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)} u(s) dx(s) + K^{-1}(t, t) f_{x(t)}'(t), \tag{4.2}$$

где $t \in [a, b]$, $K^{-1}(t, t)$ обратная матрица к $K (t, t)$,

$$K(t, s) = A(t, s) \left(\frac{\partial B(t,s)}{\partial x(s)} \right)^T, \quad (t, s) \in \overline{G}. \tag{4.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия теоремы 4.1 и леммы 2.1, имеем что система (4.1) эквивалентна к следующей системе

$$\int_a^t K(t,s)\, u(s)dx(s) = f(t), \quad t \in [a, b], \tag{4.4}$$

где $K(t,s)$ определена по формуле (4.3). Ясно, что для того, чтобы система (4.1) имела непрерывное решение $u(t)$, необходимо выполнение условия $f(a) = 0$. В силу условия теоремы 4.1 и (4.3) вытекает что матричное ядро $K(t,s)$ в области G имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)}$. Поэтому, в силу теоремы 1.1 [8] следует, что и $f(t)$ должна иметь непрерывную производную $f_{x(t)}{}'(t)$ Дифференцируя обе части (4.4) по $x(t)$ и учитывая теорему 1.1 [8], имеет

$$K(t,t)u(t) + \int_a^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)} u(s)dx(s) = f_{x(t)}{}'(t), \tag{4.5}$$

где $t \in [a, b]$. Очевидно, что при выполнении условия теоремы 4.1, система (4.5) эквивалентна к система (4.1). Если $f_{x(t)}{}'(t) \in C_n\,[a, b]$, то в силу теоремы 2.1, система (4.2) имеет единственное решение из $C_n\,[a, b]$. Теорема 4.1 доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть матричная функция $K(t,s)$ в области G имеет непрерывные производные $\dfrac{\partial^m K(t,s)}{\partial x^m(t)}$, $m \geq 2,\ m \in N,$

$$K(t,t) \equiv \left[\left. \frac{\partial K(t,s)}{\partial x(t)} \right|_{s=t} \right] \equiv \ldots \equiv \left[\left. \frac{\partial^{m-2} K(t,s)}{\partial x^{m-2}(t)} \right|_{s=t} \right] \equiv 0,$$

$$det \left[\left. \frac{\partial^{m-1} K(t,s)}{\partial x^{m-1}(t)} \right|_{s=t} \right] \neq 0 \quad \text{при} \quad (t, s) \in \overline{G},$$

где $K(t, s)$ определена по формуле (4.3). Тогда, для того чтобы система (4.1) т.е. (4.4) имела единственное решение из $C_n\,[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $f(t)$ имела производную $f^{(m)}_{x(t)}(t)$ из $C_n\,[a, b]$ и $f(a) = f_{x(t)}{}'(a) = \ldots = f^{(m-1)}_{x(t)}(a) = 0$. Кроме того, система (4.1) эквивалентна к следующей системе

$$u(t) = -\int_a^t M^{-1}(t)\, \frac{\partial^m K(t,s)}{\partial x^m(t)} u(s)dx(s) + M^{-1}(t) f^{(m)}_{x(t)}(t), \tag{4.6}$$

где $t \in [a, b]$, $M^{-1}(t)$ – обратная матрица к матрице

$$M(t) = \left[\left. \frac{\partial^{m-1} K(t,s)}{\partial x^{m-1}(t)} \right|_{s=t} \right], \quad t \in [a, b],$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированного целого *i* из *[1, m-1]*, дифференцируем по x(t) i раз систему (4.1) т.е. (4.4). Тогда, в силу условия теоремы 4.1 и в силу теоремы 1.1 [8], имеем

$$\int_a^t \frac{\partial^i K(t,s)}{\partial x^i(t)} u(s)dx(s) = f_{x(t)}^{(i)}(t), \qquad (4.7_i)$$

где *t* Î *[a, b], 1£ i £ m – 1,* ясно, что системы (4.1) и (4.7i) эквивалентны. Отсюда вытекает, что $f_{x(t)}^{(i)}(a) = 0$. Дифференцируем системы (4.7i) при *i = m -1*. Тогда, в силу условия теоремы 4.2, получим систему (4.6). Если $f_{x(t)}^{(m)}(t)$ Î $C_n [a, b]$, то в силу теоремы 2.1 система (4.6) имеет единственное решение из $C_n [a, b]$. Теорема 4.2. доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим системы (4.1), для *n = 2, a = 0, b = 1,*

$$A(t, s) = \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix},$$

$$B(t, s) = \begin{pmatrix} s^2 - \frac{1}{3}s^3 & 0 \\ 0 & s^2 - \frac{1}{3}s^3 \end{pmatrix}$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad \text{т.е}$$

рассматривается следующая система

$$\int_0^t \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix} [u^T(s)\, d_s\, B(t,s)]^T = f(t), \qquad (4.8)$$

где *t* Î *[0, 1]*. Ясно, что если выберем $x(t) = t^2$, то система (4.8) эквивалентна к следующей системе:

$$\int_0^t K(t, s)\, u(s)dx(s) = f(t), \qquad (4.9)$$

где *t* Î *[0, 1]*

$$K(t, s) = \begin{pmatrix} t^2 - s^2 & (s^2 - t^2)(1+s) \\ 4(t^2 - s^2) & (t^4 - s^4)(1+s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}s & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}s \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$K(t,t)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad K'_{x(t)}(t,s)=\begin{pmatrix}1&-1-s\\4&2t^2(1+s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}s&0\\0&1-\frac{1}{2}s\end{pmatrix},$$

$$K''_{x(t)}(t,s)=\begin{pmatrix}0&0\\0&2(1+s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}s&0\\0&1-\frac{1}{2}s\end{pmatrix},$$

$$det\left[K'_{x(t)}(t,s)\ \big|_{s=t}\right]=\begin{vmatrix}1&-(1+t)\\4&2t^2(1+t)\end{vmatrix}\frac{(2-t)^2}{4}=$$

$$=\frac{1}{4}(1+t)(4+2t^2)(2-t)^2\neq 0,$$

при всех $t\in[0,1]$, т.е. для системы (4.8) выполняются все условия теоремы 4.2 при $m=2$. Поэтому, в силу теоремы 4.2 система (4.8) имеет единственное решение из $C_2\,[0,1]$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(t)$ имеет второе производное $f''_{x(t)}(t)$ из $C_2\,[0,1]$ и $f(0)=f'_{x(t)}\big|_{t=0}=0$, где $x(t)=t^2$. В этом случае, дважды дифференцируя по $x(t)=t^2$, систему (4.8) сводим к следующей эквивалентной системе интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса второго рода:

$$\begin{pmatrix}1&-1-t\\4&2t^2(1+t)\end{pmatrix}(1-\frac{1}{2}t)\,u(t)+\int_0^t\begin{pmatrix}0&0\\0&1+s\end{pmatrix}(2-s)\,u(s)\,dx(s)=f''_{x(t)}(t),\quad t\in[0,1].$$

5. Система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра-Стильтьеса первого рода.

Будем рассматривать следующие системы:

$$\int_a^t K(t,s,u(s))\,d\varphi(s)=f(t),\quad t\in[a,b],\tag{5.1}$$

где $K(t,s,u)$ и $f(t)$ – n - мерные известные вектор-функции, $u(t)$ неизвестная n - мерная вектор-функция, $x(t)$ - возрастающая непрерывная вектор-функция на $[a,b]$ и $\varphi'_{x(t)}(t)$ - непрерывная функция на $[a,b]$.

Предположим выполнения следующих условий:

1. вектор-функции $K(t,s,u)$ и $\dfrac{\partial K(t,s,u)}{\partial x(t)}$ являются непрерывными в области

$G \times R^n$, вектор-функция $\dfrac{\partial K(t,s,u)}{\partial x(t)}$ в области $G \times R^n$ по u удовлетворяет условие Липшица с коэффициентом L, $\dfrac{d\varphi(t)}{dx(t)} \geq a > 0$ при всех $t \in [a, b]$;

2. для любого $t \in [a, b]$, и для любого $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in R^n$ система алгебраических уравнений

$$K(t, s, u) = v,\ u = (u_1, \ldots, u_n),\ K = (k_1, \ldots, k_n),$$

т.е. система

$$\begin{cases} k_1(t,t,u_1,u_2,\ldots,u_n) = v_1, \\ k_2(t,t,u_1,u_2,\ldots,u_n) = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n(t,t,u_1,u_2,\ldots,u_n) = v_n, \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$u = F(t, v),\ F = (F_1, F_2, \ldots, F_n),$$

где вектор-функция $F(t, v)$ в области $[a, b] \times R^n$ непрерывная функция и удовлетворяет условие Липшица по v с коэффициентом L_o.

Дифференцируя, систему (5.1) по $x(t)$ имеем

$$K(t, t, u(t))\ \varphi'_{x(t)}(t) + \int_a^t \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial x(t)}\, d\varphi(s) = f'_{x(t)}(t),$$

где $t \in [a, b]$. Отсюда, в силу условия 2, получим

$$u(t) = F\Big(t,\ \frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,u(s))}{\partial x(t)}\, \varphi'_{x(s)}(s)dx(s)\Big]\Big), \tag{5.2}$$

где $t \in [a, b]$.

Таким образом, систему (5.1) свели к системе интегральных уравнений второго рода (5.2). Нетрудно убедиться, что если $f'_{x(t)}(t) \in C_n[a, b]$ и $f(a) = 0$, то система (5.1) и система (5.2) эквивалентны.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполняются условия 1, 2, $f'_{x(t)}(t) \in C_n[a, b]$ и $f(a) = 0$. Тогда существует единственное решение системы (5.1) в пространстве $C_n[a, b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для решения системы (5.1) т.е. (5.2) применим метод последовательных приближений:

$$u_o(t) = F\Big(t,\ \frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial x(t)}\, d\varphi(s)\Big]\Big), \tag{5.3}$$

$$u_m(t) = F\Big(t,\ \frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,u_{m-1}(s))}{\partial x(t)}\varphi'_{x(s)}(s)dx(s)\Big]\Big),$$

где $m \in N,\ t \in [t_o, T]$.

Методом математической индукции с учетом условий 1и 2, из (5.3) получим следующие оценки:

$$\| u_o(t)\| \le \sup_{t\in[a,b]} \Big\| F\Big(t,\ \frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) - \int_a^t \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial x(t)}d\varphi(s)\Big]\Big)\Big\| = F_o,$$

$$\| u_1(t) - u_o(t)\| \le \frac{L_o}{a}\int_a^t \Big\|\frac{\partial K(t,s,u_o(s))}{\partial x(t)} - \frac{\partial K(t,s,0)}{\partial x(t)}\Big\| M_o\, dx(s) \le$$

$$\le \frac{M_o}{a} L_o L F_o [x(t) - x(a)],$$

$$\| u_2(t) - u_1(t)\| \le \frac{L_o M_o}{a}\int_a^t \Big\|\frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial x(t)} - \frac{\partial K(t,s,u_o(s))}{\partial x(t)}\Big\| dx(s) \le$$

$$\le \frac{M_o}{a} L_o L\int_a^t \| u_1(s) - u_o(s)\|\, dx(s) \le \frac{M_o^2}{a^2} L_o^2 L^2 F_o \int_a^t [x(s) - x(a)]\,dx(s) =$$

$$= F_o\frac{M_o^2}{a^2} L_o^2 L^2 \frac{[x(t)-x(a)]^2}{2!},$$

$$\| u_m(t) - u_{m-1}(t)\| \le F_o \frac{M_o^m}{a^m}(L_o L)^m \frac{[x(t)-x(a)]^m}{m!},$$

где $m \in N,\ t \in [t_o, T]$,

$$M_o = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi'_{x(s)}(t)|.$$

Отсюда, имеем

$$\| u_m(t) - u_{m-1}(t)\| \le F_o \frac{M_o^m}{a^m}(L_o L)^m \frac{[x(b)-x(a)]^m}{m!},$$

где $m \in N,\ t \in [t_o, T]$.

Из последней оценки следует, что функциональный ряд

$$u_o(t) + \sum_{m=1}^{\infty} [u_m(t) - u_{m-1}(t)]$$

в области $[a, b]$ равномерно сходится к $u(t) \in C_n[a, b]$ и $u(t)$ является решением системы (5.2), т.е. (5.1). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ - произвольные два решения системы (5.1) из пространства $C_n[a, b]$. Тогда

$$u_1(t) - u_2(t) = F\Big(t, \frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) - \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_1(s))}{\partial x(t)}\, d\varphi(s)\Big]\Big) - F\Big(t,$$

$$\frac{1}{\varphi'_{x(t)}(t)}\Big[f'_{x(t)}(t) -$$

$$- \int_{t_o}^{t} \frac{\partial K(t,s,u_2(s))}{\partial x(t)}\, d\varphi(s)\Big]\Big),$$

где $t \in [a, b]$. Отсюда, в силу условия 1 и 2, имеем

$$\| u_1(t) - u_2(t)\| \le L_o L \frac{M_o}{a} \int_{t_o}^{t} \| u_1(s) - u_o(s)\|\, dx(s) + \frac{1}{m},$$

где $m \in N$, $t \in [t_o, T]$. Применяя обобщенное неравенство Гроноулла-Беллмана, из последнего неравенства получим

$$\| u_1(t) - u_2(t)\| \le \frac{1}{m} \exp\Big\{\frac{M_o}{a} L_o L\, [x(b) - x(a)]\Big\},$$

где $m \in N$, $t \in [t_o, T]$. Отсюда переходя к пределу при $m \to \infty$ имеем

$\| u_1(t) - u_2(t)\|_C = 0$, т.е. $u_1(t) = u_2(t)$ для всех $t \in [t_o, T]$. Теорема 5.1 доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполняются условия 1, 2 и $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением системы (5.1) соотвественно $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, где

$$(f_1(t))'_{x(t)} \in C_n[a, b],\ (f_2(t))'_{x(t)} \in C_n[a, b],\ f_1(t_o) = 0$$

и $f_2(t_o) = 0$. Тогда справедлива оценка

$$\| u_1(t) - u_2(t)\|_C \le C_3\, \|(f_1(t))'_{x(t)} - (f_2(t))'_{x(t)}\|_C, \tag{5.4}$$

где

$$C_3 = \frac{L_o}{a} \exp\Big\{\frac{M_o}{a} L_o L\, [x(b) - x(a)]\Big\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $u_1(t)$, $u_2(t)$ являются решением системы (5.1) соответственно для $f(t) = f_1(t)$, $f(t) = f_2(t)$, условия 1 и 2, из (5.2) имеем

$$\| u_1(t) - u_2(t)\| \le \frac{M_o}{a} L_o L \int_{a}^{t} \| u_1(s) - u_2(s)\|\, dx(s) +$$

$$+ \frac{L_o}{a} \|(f_1(t))'_{x(t)} - (f_2(t))'_{x(t)}\|_C,\ t \in [a, b].$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Гроноулла-Беллмана [8] получим требуемую оценку (5.4). Теорема 5.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. НАТАНСОН И.П., **Теория функций вещественной переменной**, («Наука», Москва, 1974), стр 200, 250.
2. ТРИКОМИ Ф., **Интегральные уравнения**, (ИЛ, 1960).
3. BARBU V., SIAM L. **Math. Anal.** 6 (4) (1975).
4. BUGHGEIM A.L., **Volterra Equations and Inverse Problems**, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 204p.
5. DENISOV A.M., **Elements of the Theory of Inverse Problems**, (VSP, Utrecht-Tokyo, 1999), 272p.
6. ASANOV A., **Regularization, Uniqueness and Existence of Solutions of Volterra Equations of the fizst kind** (VSP, Utrecht-Tokyo, 1998), 276p.
7. АСАНОВ А., Манас университети, **Табигый Илимдер журналы**, 1 (Бишкек, 2001).
8. АСАНОВ А., Манас Университета, **Табигый Илимдер журналы**, 2 (Бишкек, 2002).