ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Доц., др. Э.Р. АТАМАНОВ
Американский университет в Центральной Азии
С.А. АБЛАКИМОВА
КГУСТА

ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ. Исследуется следующая обратная задача:

$$u'(t) + (Au)' + a(t)(Au) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, B_i u + \sum_{i=1}^{m} j_i(t) f_i(t) + f(t) = 0 \qquad (1)$$

$$u(o) = u_o, \quad u_o \text{ Î } D(A), \qquad (2)$$

$$F_i\, u = g_i(t),\ t \text{ Î } [0, T],\ i = 1,\dots,m \qquad (3)$$

где $j_i(t)$ - неизвестные функции из $C[0, T]$, $u(t)$ - неизвестная функция из $C^l[0, T]; D(A))$, $f(t)$, $f_i(t)$ - известные функции из $C([0, T]; X)$, $g_i(t)$ - известные функции из $C^l[0, T]$, $a(t)$ и $b_j(t)$ - известные функции из $C[0, T]$, $i = 1,\dots, m$, $j = 1,\dots, n$

Отметим вначале принятые обозначения и свойства операторов.

X - Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_x$, T Î R, $T > 0$.

1) $C([0, T]; X), = \{u : [0, T]$ ® X, u - непрерывная функция$\}$

$$\| u\|_C = \sup_{t\in[0,T]} \| u(t) \|_X ;$$

2) $C^l([0, T]; X), = \{u : [0, T]$ ® X, u - непрерывно дифференцируемая функция$\}$

$$\| u\|_{C^1} = \| u(t) \|_C + \| u'(t)\|_C ;$$

3) $C_m [0, T]$ - пространство m - мерных вектор-функций с элементами из $C[0, T]$,

$$\| u(t) \|_{C_m[0,T]} = \max_{i=1,\dots,n}\{ \mathop{Sup}_{t\in[0,T]} | u_i(t) |\},\ u = (u_1,\dots, u_m).$$

4) $C_n ([0, T]: X)$ – пространство n - мерных вектор-функций с элементами из $C([0, T]; X)$

$$\| u\|_{C,n} = \max_{i=1,\dots,n}\{ \mathop{Sup}_{t\in[0,T]} \| u_i(t)\|_X \},\ u = (u_1,\dots, u_n).$$

1. Операторы $A : D(A)$ Ì X® X, $B_i : D(B_i)$ Ì X® X линейные замкнутые операторы, $D(A)$ Ì $D(B_i)$, $i = 1,\dots, n$.

11. Оператор $A - I$ обратим, т.е.

$$(A - I)^{-1} \text{ Î } L(X),$$

где I единичный оператор.
Ш. Для оператора $F\ _i$ Î $L(X),\ i = 1,\dots,\ m\ ,\ detM(t)$ ¹ $0,$
где

$$M(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(A-I)^{-1}f_1(t) & \Phi_1(A-I)^{-1}f_2(t)\dots\Phi_1(A-I)^{-1}f_m(t) \\ \Phi_2(A-I)^{-1}f_1(t) & \Phi_2(A-I)^{-1}f_2(t)\dots\Phi_2(A-I)^{-1}f_m(t) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \Phi_m(A-I)^{-1}f_1(t) & \Phi_m(A-I)^{-1}f_2(t)\dots\Phi_m(A-I)^{-1}f_m(t) \end{pmatrix}$$

Уравнения псевдопараболического типа описывают процессы массо-тепло-переноса в сложных средах.

Классические задачи для псевдопараболических уравнений исследованы многими авторами [1, 2]. Обратные задачи для этих уравнений впервые изучались, по-видимому, в [3]. Некоторые обратные задачи для интегродифференциальных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений исследованы в монографиях [3-5].

Ряд обратных коэффициентных обратных задач уравнений этого типа изучены в работе [6].

Сделав подстановку

$$u(t) = u_o + \int_0^t V(s)\,ds,\quad V(t) = u'(t), \tag{4}$$

уравнение (1) запишем в виде

$$AV = -\int_0^t a(t)AV(s)ds + [V(t) - \sum_{i=1}^n b_i(t)\int_0^t B_i\cdot V(S)\,ds -$$

$$-\sum_{i=1}^m j_i(t)f_i(t) - f(t) - a(t)Au_o - \sum_{i=1}^n b_i(t)\,B_i\,u_o].$$

Отсюда определим AV

$$AV(t) = V(t) - \sum_{i=1}^n b_i(t)\int_0^t B_i\cdot V(S)\,ds - \sum_{i=1}^m j_i(t)f_i(t) -$$

$$-\int_0^t a(t)\,e^{-\int_s^t a(t)dt}[V(s) - \sum_{i=1}^n b_i(t)\int_0^s B_i\,V(t)dt - \sum_{i=1}^m j_i(s)f_i(s)]\,ds + F_o(t), \tag{5}$$

где

$$F_o(t) = -f(t) - a(t)\,Au_o - \sum_{i=1}^n b_i(t)\,B_i\,u_o + \int_0^t a(t)\,e^{-\int_s^t a(t)dt}$$

$$[\,f(s) + a(s)\, Au_o + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, B_i\, u_o\,]ds. \tag{6}$$

Обращая оператор $(A - I)$ из (5) имеем

$$V(t) = -\,(A - I)^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} b_i(t) \int_0^t B_i \cdot V(S)\, ds + \sum_{i=1}^{m} j_i(t) f_i(t) +$$

$$+\int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\,\mathrm{V(s)} - \sum_{i=1}^{n} b_i(s) \int_0^s B_i V(t)dt - \sum_{i=1}^{m} j_i(s) f_i(s)]\, ds\} + F(t), \tag{7}$$

где

$$F(t) = (A - I)^{-1} F_o(t). \tag{8}$$

Вводя обозначения

$$V_i(t) = B_i\, V(t),\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

и применяя оператор B_i слева к уравнению (7), имеем

$$\mathrm{V_i(t)} = -\,B_i\,(A - I)^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} b_i(t) \int_0^t V_i(s)\, ds + \sum_{i=1}^{m} j_i(t) f_i(t) +$$

$$+\int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\,\mathrm{V(s)} - \sum_{i=1}^{n} b_i(s) \int_0^s V_i(t)dt - \sum_{i=1}^{m} j_i(s) f_i(s)]\, ds + B_i\, F(t), \tag{10}$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

Систему уравнений (7) и (10) запишем в виде

$$V(t) + \sum_{j=1}^{m} [\,(A - I)^{-1} f_j(t)]\ j_j(t) = -\ (A - I)^{-1}\{\sum_{j=1}^{n} b_j(t) \int_0^t V_j(s)\, ds +$$

$$\int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\,V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} j_j(s) f_j(s)]\, ds\} + F(t), \tag{11}$$

$$V_i(t) + \sum_{j=1}^{m} [B_i\,(A - I)^{-1} f_j(t)]\ j_j(t) = -\,B_i\,(A - I)^{-1}[\sum_{j=1}^{n} b_j(t) \int_0^t V_j(S)\, ds +$$

$$+\int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\,\mathrm{V(s)} - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} j_j(s) f_j(s)]\, ds + B_i\, F(t), \tag{12}$$

$$i = 1, \ldots, n,$$

Действуя функционалом F_i слева на уравнение (11) и учитывая (3) и (4), имеем

$$\sum_{j=1}^{m} [F_i (A - I)^{-1} f_j(t)]\, j_j(t) = - F_i (A - I)^{-1} \{ \sum_{j=1}^{n} b_j(t) \int_0^t V_j(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\, V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} j_j(s) f_j(s)]\, ds\} + F_i(t), \qquad (13)$$

где

$$F_i(t) = F_i F(t) - g'(t), \qquad i = 1, \dots, m, \qquad (14)$$

В силу условия Ш существует матрица

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1m}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mm}(t) \end{pmatrix} \qquad (15)$$

обратная к матрице

$$M(t) = (F_i (A - I)^{-1} f_j(t))_{i,j=1}^{m}.$$

Учитывая (15) из (13) имеем

$$j_i(t) = \sum_{n=1}^{m} a_{in}(t) \{ - \sum_{j=1}^{n} \Phi_n (A - I)^{-1} f_j(t) \int_0^t V_j(s)\, ds - \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} \Phi_\nu (A - I)^{-1} [\, V(s) -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} j_j(s) f_j(s)]\, ds + F_n(t)\}, \qquad i = 1, \dots, m, \qquad (16)$$

Подставляя (16) в правую часть (11) и (12), получим

$$V(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} [(A - I)^{-1} f_j(t)]\, a_{in}(t) \{ \sum_{j=1}^{n} b_j(t) F_n (A - I)^{-1} \int_0^t V_j(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} F_n (A - I)^{-1} [\, V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} j_j(s) f_j(s)]\, ds + F_n(t)\} -$$

$$- (A - I)^{-1} \{ \sum_{j=1}^{n} b_j(t) \int_0^t V_j(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\, V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(s) f_j(s)]\, ds\} + F(t), \tag{17}$$

$$V_i(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{m} [\, B_i (A - I)^{-1} f_k(t)]\, \alpha_{kn}(t)\, \{ \sum_{j=1}^{n} b_j(t)\, F_n (A - I)^{-1} \int_0^t \varphi_j(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} F_n (A - I)^{-1} [V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(s) f_j(s)]\, ds + F_n(t)\} -$$

$$- B_i (A - I)^{-1} [\sum_{j=1}^{n} b_j(t) \int_0^t V_j(s)\, ds +$$

$$+ \int_0^t a(t)\, e^{-\int_s^t a(t)dt} [\, V(s) - \sum_{j=1}^{n} b_j(s) \int_0^s V_j(t)dt - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(s) f_j(s)]\, ds + B_i F(t),$$

где $i = 1, \ldots, n$, $F_n(t)$ определяются по формуле (14)

$$n = 1, \ldots, m$$

Системы (16), (17), (18) определяют замкнутую линейную систему для нахождения неизвестных $V(t), V_i(t), \varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m.$

Из условия $D(A) \subset D(B_i)$, $i = 1, \ldots, n$ вытекает, что $B_i(A - I)^{-1}$ являются элементами из $L(X)$. Тогда (16), (17), (18) являются системой операторных уравнений Вольтерра второго рода с ограниченными операторами. Поэтому из системы (16), (17), (18) неизвестные $\{V(t), V_1(t), \ldots, V_n(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t),\}$ определяются единственным образом в пространстве $C([0, T], X) \times C_n([0, T], X) \times C_m[0, T]$. Причем, это решение можно найти методом последовательных приближений. Из (17) вытекает, что $V(t) \in C([0, T]; D(A))$.

Тогда, из (4) определим неизвестную $u(t)$ из $C^1([0, T]; D(A))$. Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия 1-Ш. Тогда обратная задача (1)-(3) имеет единственное решение $\{u(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t),\}$ - из пространства

$$C^1([0, T]; D(A)) \times C_m[0, T].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. COLTON D., QUAIT J. **Math** v.23 (1972).
2. TING T.W., **Math**. Soc. Japan v.21, (1969).
3. АТАМАНОВ Э.Р., МАМАЮСУПОВ О.Ш.. **Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений**. (Фрунзе: Илим, 1991).
4. ASANOV A. and ATAMANOV E.R.. **Nonolassical and Inverse Problems for Psendoparabolic Equations** (VSP, Utrecht-Tokyo, 1997), 152 p.
5. SHISHATSKII S.P., ASANOV A., ATAMANOV E.R.. **Uniqueness Problems for Degenerating Equations and Nonclassical Problems** (VSP, Utrecht-Tokyo, 2001), 178 p.
6. Б АБЛАБЕКОВ.С.- **Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям Вып.29**. (Бишкек: Илим, 2000).