АНАЛИТИКАЛЫК ГЕОМЕТРИЯНЫН ЖӨНӨКӨЙ КОЛДОНМОЛОРУ

Доц., др. Анаркүл УРДАЛЕТОВА
Кыргыз–Түрк «Манас» университети
Доц., др. Сыргак КЫДЫРАЛИЕВ
Борбордук Азиядагы Америка университети

Аналитикалык геометрия–геометриялык маселелерди алгебра тилинде анализдегенге арналган математиканын бөлүгү.

Геометрияны практикалык, алардын ичинде экономикалык, маселе–лерге, колдонуунун маанилүүлүгү геометриялык жолдун көрсөтмөлүүлүгү менен шартталган. Жакшы чийилген график адатта, маселенин маңызын, формула же таблицага караганда, ачык көрсөтүшү мүмкүн.

Аналитикалык геометриянын ыкмаларын студенттерге үйрөтүү, бул эң маанилүү маселе. Тилекке каршы, кыргыз тилинде, адабияттар өтө аз. Ошондуктан, биз сунуш кылып жаткан макала пайдалуу болот деп ишенебиз. Талашчуу жерлери да бар болуш керек. Ошондуктан, бул макаланын тегерегиндеги ой–пикирлерди талкулоого даярбыз жана ишти жакшыртууга багытталган сунуштарга ыракматыбызды айтабыз.

§1. Тегиздиктеги түз сызыктын теңдемеси

1. Бюджет сызыгы

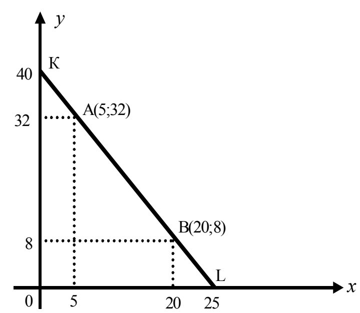
Жантемирге шокалад жана сагыз сатып берүүгө, энеси айына 200 сом бөлүп коёт. Эгерде шоколаддын баасы 8 сом, сагыздыкы 5 сом болсо, анда Жантемир канча шоколад жана сагызга ээ боло алат?

x аркылуу шоколаддын, y аркылуу сагыздын санын белгилеп, бөлүнгөн акча (бюджет) толук пайдаланылды деп, төмөнкү теңдемени алабыз: $8x + 5y = 200$

Буга окшогон жалпы түрдөгү $Ax+By+C = 0$ теңдеме биринчи даражадагы теңдеме же сызыктуу теңдеме деп аталат.

Акыркы теңдемени, тегиздиктеги ***түз сызыктын жалпы теңдемеси*** деп да аташат. Биздин учурда, $8x + 5y = 200$ теңдемеси бюджеттик сызыкты аныктайт. Белгисиздердин алдындагы коэффи–циенттерди каралып жаткан түз сызыкка перпендикуляр болгон вектордун координаттары деп да караса болот. Түз сызыкты чийүү үчүн бул түз сызыктын эки чекитинин координатасына ээ болуу жетиштүү. Бул координаттарды тандоо жолу менен тапса болот. Эгер $x = 5$ десек, анда $8x + 5y = 200$ теңдемеден $8{\cdot}5 + 5y = 200$ дү алабыз. Мындан, $y = 32$ ге ээ болобуз; x=20 кезинде $y = 8$ ди алабыз.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com



Сагыздан толук түрдө баш тартканда 25 шоколад, шоколадтан баш тартканда 40 сагыз сатып алса боловун байкайбыз. Бул сандар $\frac{x}{25}+\frac{y}{40}=1$ теңдемесинен орун алган. Акыркы теңдеме $8x + 5y = 200$ деген бюджет теңдемесин 200 гө бөлсөк пайда болот.

Жалпы учурда $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}=1$ теңдемеси ***түз сызыктын кесиндилердеги теңдемеси*** деп аталат. Мында a саны түз сызык менен OX огунун, $в$ саны түз сызык менен $OУ$ огунун кесилишүү чекиттери.

Биздин мисалда $a=25$ OL кесиндинин узундугу, $в=40$ OK кесиндинин узундугу.

Шоколад менен сагызды сатып алуу үчүн бөлүнгөн акчанын өзгөрүшү бюджет сызыгынын параллель жылышына алып келет. Буга ынаныш үчүн 200-дү 120-га, андан кийин 240-ка алмаштырып тиешелүү түз сызыктарды чийгиле. Кесиндилердеги тиешелүү теңдемелерди жазуу менен бул ишти кыйла жөнөкөйлөтүп аткарса болот.

$$8x+5y=120 \quad => \frac{x}{15}+\frac{y}{24}=1$$

жана

$$8x+5y=240 \quad => \frac{x}{30}+\frac{y}{48}=1.$$

Ошондой эле, эгерде эки типтеги товар сатып алынса, анда бир товардын баасынын өзгөрүлүшү бюджет түз сызыгынын экинчи товарды сатып алууга мүмкүн болгон максималдуу санын көрсөткөн чекит аркылуу бурулушуна алып келерине ынанса болот.

Мисал үчүн, сагыздын баасы мурункудай эле 5 сом болсун, ал эми шоколадтын баасы 8 сомдон 10 сом болуп кымбаттагандан кийин, дагы 12,5 сомго чейин өссүн. Тиешелүү болгон теңдемелерди

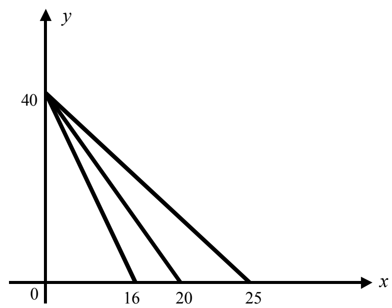
$8x + 5y = 200; 10x + 5y = 200; 12{,}5x + 5y = 200$

кесиндилердеги теңдемелер түрүндө төмөнкүдөй жазабыз:

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

$$\frac{x}{25}+\frac{y}{40}=1;\qquad \frac{x}{20}+\frac{y}{40}=1;\qquad \frac{x}{16}+\frac{y}{40}=1.$$

Бул теңдемелерге тиешелүү бюджет түз сызыктардын графиктери



Кызыкчылыгы арткан Жантемир энесинен: «5 шоколадка кошуп канча сагыз сатып алса болот? Эл эми эгерде 10 шоколад алсак, анда бөлүнгөн акча канча сагызды кошуп алганга жетет?»—деп суроо салат.

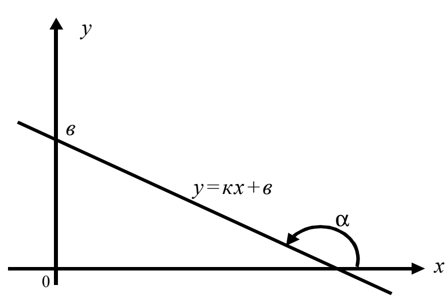
Бул жагдайда $8x + 5y = 200$ түрдөгү бюджет теңдемесин, y-ти туюнтуп, $y = -1{,}6x + 40$ түрүндө жазуу ыңгайлуу болот. Акыркы теңде—меден Жантемирдин суроосуна жоопторду табабыз:

$y = -1{,}6\cdot 5 + 40 = -8 + 40 = 32$, жана
$y = -1{,}6\cdot 10 + 40 = 16 + 40 = 24$ шоколад алса болот.

Түз сызыктын жалпы түрдөгү $Ax+By+C=0$ теңдемесин($B\neq 0$ болсо), андан y—ти таап, $y = \kappa x+в$ түрүндө жазса болот. Бул теңдеме ***түз сызыктын бурч коэффициенттүү теңдемеси*** деп аталат.

κ—бурч коэффициенти. Ал $y = \kappa x+в$ теңдеме менен аныкталган түз сызыктын Ox огуна болгон жантаюу α бурчунун тангенси ($\kappa = \text{tg}\alpha$),

$в$ түз сызыктын Oy огу менен кесилишкен чекиттин координаты.



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

2. Өзгөрүш−теңдөө чекити

Шайыр көйнөк тигип жана сатуу менен жан багууну ойлонот. Анын эсептөөлөрү боюнча, бир көйнөк үчүн кездемеге жана фурнитурага кетүүчү чыгаша 300 сомду түзөт, ал эми көйнөктү 400 сомго сатса болот. Мындан тышкары жабдуулар жана өндүрүш жайынын арендасы үчүн, ошондой эле ишкерлик кылууга уруксат алыш үчүн ай сайын 1000 сомдон төлөшү керек. Толук чыгашаны жабыш үчүн, Шайыр айына канча көйнөк тигип, сатыш керек?

Коюлган суроого жооп бериш үчүн киреше менен чыгашаны барабарлоо керек. q-деп тигилип сатылган көйнөктөрдүн санын белгилейли. Анда, киреше $400q$- ну түзөт. Чыгаша $1000 + 300q$ болот.

Ошентип, $400q=1000+300q$.

Бул теңдемеден $q = 10$ экендигин көрөбүз. Демек киреше менен чыгашанын тең салмактуулук чекити $q = 10$.

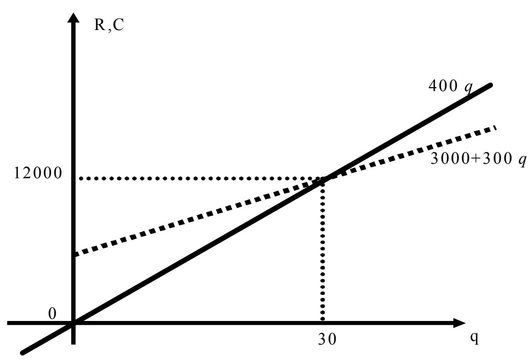
*Бул чекиттин кыргыз тилинде так аты жок. Ошондуктан, оригиналындагы, англис тилиндеги **break−even point** атын тагыраак которуп, маселенин **өзгөрүш−теңдөө чекити** деген атты сунуш кылабыз. Себеби, биринчиден, бул чекиттен өткөндө чыгым пайда болуп, же пайда чыгым болуп өзгөрөт. Экинчиден, бул чекитте киреше чыгашага тең.*

Алынган жыйынтык өтө эле оптимисттик жыйынтык. Себеби, көйнөктөр менен жан багыш үчүн, Шайыр ай сайын 2000 сом айлык алган ишинен бошонушу керек. Бул сумманы такай боло турган чыгашага кошуп, теңдемени кайра баштап чыгаруу керек.

$400q=1000+300q+2000 \Rightarrow q=30$.

Демек, маселенин өзгөрүш−теңдөө чекити 30.

Бул маселеде: $400q$-киреше (R), 300 сом−орточо өзгөрүүчү чыгаша (AVC), $300 \cdot q$−өзгөрүүчү чыгашанын чоңдугу (VC), 1000+2000−туруктуу чыгым (FC).



Эгерде сатыктын көлөмү 30 дан аз болсо, анда чыгым кирешеден көп болору, эгерде 30 дан көп болсо, анда аз болору сүрөттөн көрүнүп турат.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

3. Талап жана сунуш. Маркеттин тең салмактуулук чекити

Талап мыйзамында товардын аныкталган баасы менен жана ал баа менен сатып алынчу товардын санынын арасында тескери көз карандылык орун алары айтылат.

Ошол эле учурда сатууга сунуш кылынган товардын саны менен баасынын арасында түз көз карандылык орун алат.

Маркеттин тең салмактуулук чекити деп сатып алуучу менен сатуучунун кызыкчылыктары дал келген чекит аталат.

Геометриянын тилинде бул талап жана сунуш ийри сызыктарынын кесилишүү чекити, ал эми алгебра тилинде—талап жана сунуш теңдемелеринен турган системанын чыгарылышы болот.

Бизде, англис тилиндеги ***market****, орус тилиндеги* ***рынок*** *сөзү* ***базар*** *деп которулуп, колдонулуп жүрөт. Бирок, бул сөз көп учурда, туура эмес жыйынтыкка алып келип жатат. Жапон экономисти Хакамаданын айтышы боюнча, базарда пайданы башкаларды алдап табышат, маркет болсо пайда кызматташтыктын негизинде табылуучу жер. Ошондук— тан, илимий, экономикалык тилде маркет сөзүнүн колдонулушу туура болор деген ойдобуз. Айта кетчү нерсе, орус тилинде деле базар деген сөз бар, бирок алардын экономисттери базар деген базар дешет.*

Мисал. Фермердик чарба килограммы 15 сом баа менен 2 тонна ал эми 19 сом баа менен 5 тонна алма сатканга даяр. Соода фирмасы килограммы 26 сомдон 1,5 тонна, ал эми 22 сом баа менен 2,5 тонна алма сатып алганга даяр. Продукциянын баасы менен саны сызыктуу көз карандылыкта деп божомолдоп, төмөнкүлөрдү аныктагыла:

а) Фермерлер 21 сом/кг баада канча тонна алма сатканга даяр?

б) Соода фирмасы 18 сом/кг баада канча алма сатып алганга даяр?

в) Фермерлер жана фирма кандай баада жана кандай көлөмдө соода келишимин түзө алышат?

Чыгаруу. Товардын саны (q) жана баасы (p) арасындагы сызыктуу байланышты жалпы түрдө $q = a{\cdot}p + в$ сыяктуу жазса болот.

а) Бул барабардыкка фермердик чарбанын биринчи маалыматтарын коюп, сунуш теңдемесин

$$2 = a{\cdot}15 + в$$

түрүндө жазабыз.

Ал эми фермерлердин экинчи маалыматтарын колдонуп

$$5 = a{\cdot}19 + в$$

теңдемеге келебиз.

Бул теңдемелердеги a жана $в$ коэффициенттерди табыш үчүн

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 15 + b, \\ 5 = a \cdot 19 + b, \end{cases}$$

системанын чыгарабыз.

Экинчи теңдемеден биринчини кемитип $3 = a{\cdot}4$ барабардыкка келебиз.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Анда $a = 0,75$ болот. Табылган $a = 0,75$ маанини, системанын каалаган теңдемесине коюп, $в$ = - 9,25-ти алабыз. Эми $q = a{\cdot}p + в$ –ден, $a = 0,75$; $в$ = -9,25 маанилерди колдонуп $q = 0,75p$ - 9,25 түрдөгү сунуш теңдемесине келебиз.

Маселенин биринчи суроосуна жооп бериш үчүн, акыркы теңдемеге $p = 21$ маанини коюп, $q = 6,5$ экендигин табабыз.

Демек, фермерлер 21 сом/кг баада 6,5 тонна алма сатканга даяр.

б) Маселенин экинчи суроосуна жооп бериш үчүн, жогоруда көрсөтүлгөндөй эле $q = a{\cdot}p{+}в$ теңдемесине соода фирмасынын берилиштерин коюп,

$$\begin{cases} 1,5 = a \cdot 26 + в, \\ 2,5 = a \cdot 22 + в, \end{cases}$$

системага келебиз. Бул системаны чыгарып, a = -0,25; $в$ = 8 маанилерге ээ экендигин көрөбүз.

Анда $q = -0,25p + 8$ деген талап теңдемесине ээ болобуз.

Эми акыркы теңдемеге p = 18-ди коюп, q = 3,5-ти табабыз. Демек, алманын баасы 18 сом/кг кезинде, фирманын талап көлөмү q = 3,5 тонна болот.

в) Фермерлер чарбасы менен соода фирмасынын кызыкчылыктары дал келгенде, алар соода келишимин түзөт деп эсептейбиз. Б.а маркеттин тең салмактуулук чекитин табабыз. Ал чекит, талап жана сунуш ийри сызыктарынын кесилишүү чекити.

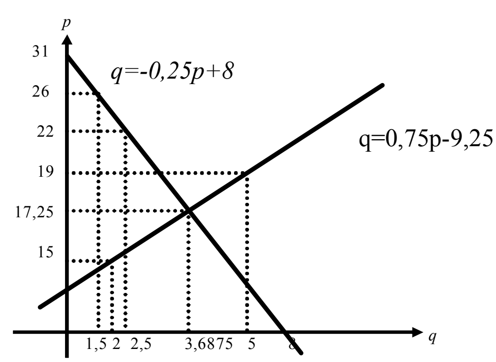
Бул чекиттин координаталары

$$\begin{cases} q = -0,25p + 8, \\ q = 0,75p - 9,25. \end{cases}$$

теңдемелер системасынан табылат. Системанын чыгарылышы p=17,25; q=3,6875 болот.

Ошентип, 17,25 сом тең салмактуулук баа менен 3,6875 тонна тең салмактуулук көлөм соода келишимине кирет.

Жогоруда айтылгандар төмөнкү сүрөт менен сүрөттөлүп көрсөтүлөт.



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

§2. Сызыктуу программалоого киришүү

1. Координаты $x = 5$ теңдемеси менен берилген чекит сан огун эки, ар бири жарым түз сызык болгон, бөлүккө бөлөт деп айтууга жетишээрлик негиз бар.

$x = 5$ чекити эмес $x=0$ чекити сан огун жарым түз сызыктарга бөлөт деген каршы чыгуулар да болушу мүмкүн. Компромистик жыйынтыкты кабыл алалы: $x = 5$ чекити да, $x = 0$ чекити да сан огун жарым түз сызыктарга бөлүшөт. Бул жыйынтык үчүн база болуп, эки учурда тең чекиттер сан огун, ар бир бөлүгүнүн узундугу ∞−ге барабар болгон бөлүктөргө бөлүшөт деген далил, кызмат кыла алат.

Ар бир жарым түз сызык $x \leq 5$ ($x \geq 5$) тибиндеги барабарсыздык менен берилет. (Муну жарым түз сызыкка таандык болгон ар бир чекиттин координатасы ал барабарсыздыкты канаатандырат деген мааниде түшүнөбүз).

Ушуга окшош эле, $Ax+By=C$ теңдемеси менен берилген ар бир түз сызык тегиздикти жарым тегиздикке бөлөт; ар бир жарым тегиздик $Ax+By \leq C$ же $Ax+By \geq C$ түрүндөгү барабарсыздык менен берилген деп айтабыз.

Керектүү жарым тегиздикти тандоо үчүн белгилүү болгон бир M чекитин алып, анын координаталарын алгачкы барабарасыздыкка коюу жетиштүү. Эгер M чекитинин координаталары барабарсыздыкты канааттандырса, анда ошол M чекити жаткан жарым тегиздикти алабыз. Эгер M чекитинин координаталары берилген барабарсыздыкты канааттандырбаса, анда M чекитин камтыбаган жарым тегиздикти алабыз.

Эгер берилген барабарсыздыктагы С бош мүчөсү нөлдөн айырмалуу болсо, анда M чекити катары O (0;0) чекитин, эгер $C = 0$ болсо, анда координата окторунун биринде жаткан чекитти алууну сунуш кылабыз.

Мисал. $2x+3y \leq 12$ барабарсыздыгы менен берилген жарым тегиздикти аныктагыла.

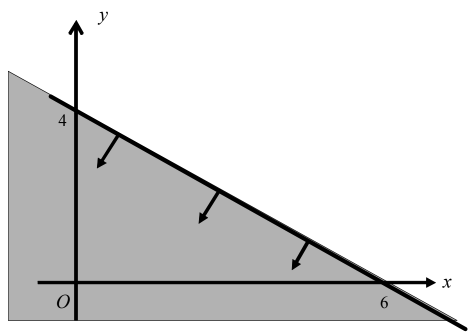
Бул жарым тегиздикти аныктоо үчүн $2x + 3y = 12$ теңдемеге ээ бол−гон түз сызыгын чийүү керек. Ал түз сызык тегиздикти экиге бөлөт. Ар бир бөлүгү жарым тегиздик болот. Бири $2x+3y \leq 12$ барабарсыздыгы менен, экинчиси $2x+3y \geq 12$ барабарсыздыгы менен аныкталат.

Берилген барабарсыздыгы менен аныкталган көптүк ал ***барабарсыздыктын аныкталуу областы*** деп аталат

Биздин учурда $C = 12 \neq 0$. $O(0;0)$ чекитинин координаталарынын $2x+3y \leq 12$ барабарсыздыгына коюп, $2 \cdot 0+3 \cdot 0 \leq 12 \Rightarrow 0 \leq 12$ деген барабарсыздыгына ээ болобуз. Демек, түз сызыктын эки жагында жаткан жарым тегиздиктерден O чекити жатканын тандоо керек.

Биз издеген жарым тегиздик жакты стрелка менен белгилеген пайдалуу деп сунуш кылабыз.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com



2. Эгер бир эмес бир нече сызыктуу барабарсыздыктар менен аныкталган система берилсе, анда алардын ар бирин канааттандыруучу чекиттерден түзүлгөн көптүк ***барабарсыз-дыктардын системасынын аныкталуу областы*** деп аталат.

Аныкталуу областын табуу үчүн, ар бир барабарсыздыктын аныкталуу областын табыш керек, андан кийин алардын кесилиши болгон көптүктү аныктоо зарыл. Табылган көптүк (кесилиш) системанын аныкталуу областы болот.

Мисал. Дүкөндө кутусу эки түрдө жасалгаланган конфеттер сатылып жатат. *A* түрүндөгү кутуда 100 гр шоколад конфети, 400 гр карамель салынган. *B* түрүндөгү кутуда эки түрдүн ар биринен 250 гр дан конфет салынган.

Эгерде дүкөндө 5 кг шоколад конфети, 8 кг карамель бар болсо, анда сатуу үчүн дүкөн кандай сандагы кутуларды камдай алат?

A түрүндөгү кутулардын санын *x, B* түрүндөгүлөрдүн санын *y* аркылуу белгилеп, бул маселени математика тилинде төмөнкүчө жазуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз:

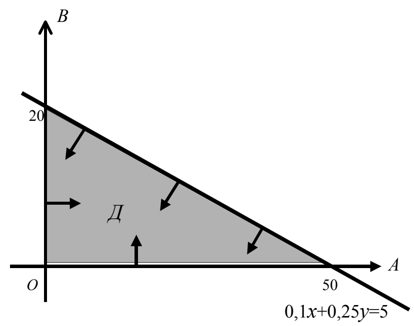
$$\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}25 \cdot y \le 5, \\ 0{,}4 \cdot x + 0{,}25 \cdot y \le 8. \end{cases}$$

Алгачкы эки барабарсыздыктын мааниси – кутулардын саны терс болушу мүмкүн эмес. Үчүнчү барабарсыздык шоколад конфетинин, төртүнчүсү –карамельдин саны чектелгендигин аныктайт. График тилинде $x \ge 0$ жана $y \ge 0$ барабарсыздыктары биринчи чейректи гана кароо керек деп айтышат. Шоколад конфетинин чектелишин аныктаган $0{,}1x+0{,}25y \le 5$ барабарсыздыкты өзгөртүп жазып:

$$10x+25y \le 500 \iff \frac{10x}{500}+\frac{25y}{500} \le 1 \iff \frac{x}{50}+\frac{y}{20} \le 1,$$

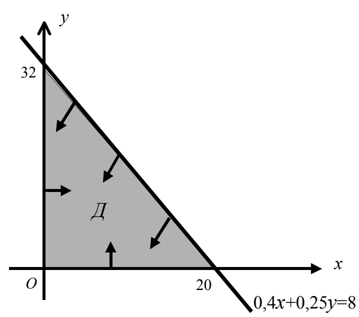
анын аныкталуу областын сүрөт түрүндө табабыз:

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

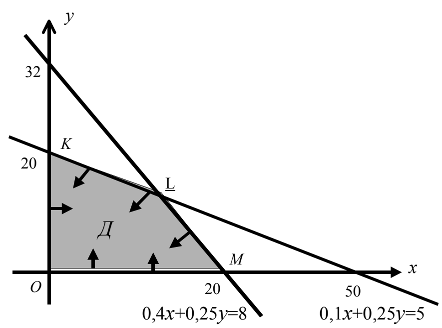


Карамель чектелиши:

$0{,}4x+0{,}25y\leq 8 \iff 40x+25y\leq 800 \iff \frac{x}{20}+\frac{y}{32}\leq 1$ төмөнкүчө сүрөттөлөт:



Биринчи чейректеги бул көптүктөрдүн кесилиши төмөнкү *KLMO* менен чектелген көптүк болот:



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Бул төрт бурчтук менен чектелген көптүктүн ар бир чекити (анын координаталары) дүкөндө мүмкүн болгон *A* жана *B* түрүндөгү кутулар-дын санын көрсөтөт.

Мисалы, (10;10) координаталуу чекит *KLMO* - го таандык болот. Бул болсо, дүкөндө 5 кг шоколад, 8 кг карамель конфеттери бар болсо, анда А жана *B* түрүндөгү кутулардын ар биринен 10-ду даярдаса болот дегенди билдирет. Ошондой эле, (10;20) чекити *KLMO*-го таандык эмес экендиги *A* кутулардан 10 жана *B* түрүндөгү кутулардан 20-ны бир эле мезгилде даярдоо мүмкүн эместигин айтат. Ушуга байланыштуу *KLMO* областы системанын аныкталуу областы (маанилердин уруксат областы) деп атоонун жөнү бар.

Мындан ары табылган көп бурчтуктун чокуларынын координаттарын табуу зарыл болот. Алар, ал көп бурчтуктун жактары болгон түз сызыктары кесилишкен чекиттер, б.а кесилишкен түз сызыктардын теңдемелерин система түрүндө жазып алып, системанын чыгарылышын издеш керек.

Мисалы, *L* чекити *KL* жана *LM* түз сызыктардын кесилиши. Демек, *L* чекиттин координаттары төмөнкү системаны канааттандырыш керек:

$$\begin{cases} 0,1 \cdot x + 0,25 \cdot y = 5, \\ 0,4 \cdot x + 0,25 \cdot y = 8. \end{cases}$$

Системанын чыгарылышын табабыз:

$$\begin{cases} x + 2,5 \cdot y = 50 \\ 4 \cdot x + 2,5 \cdot y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 30, \\ x + 2,5y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16 \end{cases}$$

Демек, *L (10;16)*.

3. Мындан мурдагы каралган пункттан *A* жана *B* түрүндөгү кутулардын тобунан көп санда даярдоого дүкөндүн мүмкүндүгү бар деген келип чыгат. Эң жогорку пайданы камсыз кыла турган тобун даярдоо зарыл деген ой табигый болот. Биз мындан ары, ар бир сатылган кутудан канча пайда алынарын билүү менен, эң чоң пайданы берүүчү кутулардын тобун кантип табуу керектиги жөнүндө айтмакчыбыз.

A түрүндөгү ар бир кутудан 5 сом, *B* түрүндөгү кутунун ар биринен 4 сом пайда алынары белгилүү болсун дейли. Анда жалпы пайданын мааниси $P(x,y) = 5x + 4y$ функциясы менен аныкталат. Бул функция ***максаттык функция*** деп аталат.

Ошентип, биз төмөнкү маселеге келдик:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 0,1 \cdot x + 0,25 \cdot y \leq 5, \\ 0,4 \cdot x + 0,25 \cdot y \leq 8, \end{cases}$$

сызыктуу барабарсыздыктардын системасы менен берилген аныкталуу областындагы төмөнкү максаттык сызыктуу функциянын

$$P(x;\, y) = 5x + 4y$$

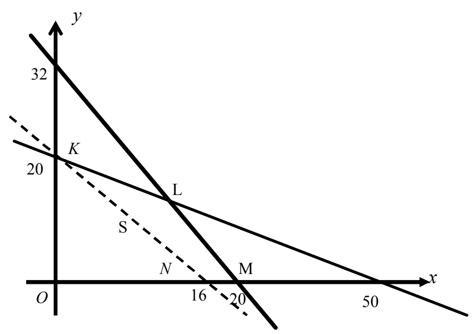
эң чоң маанисин (максимумун) тапкыла.

Бул маселе сызыктуу программалоо теориясынын маселелеринин бир түрү.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Максаттык функция $P(x;\ y)=0$ болгондо, $5x+4y=0$ теңдемеге келебиз. Бул теңдеме координата башталышы аркылуу өткөн түз сызыктын теңдемеси.

P—нын өсүшү менен түз сызык өзүнө паралелль түрдө оңго, жогору карай жылышып кетет. Мисалы, $P=80$ болгондо, $5x+4y=80$ теңдемеге келебиз жана төмөнкү сүрөттү алабыз:



Мындан, KN кесиндисинин чекиттеринин координаталарына туура келүүчү кутулардын сандары дүкөнгө 80 сом пайда берет деген келип чыгат.

Мисалы;

$P(K)=P(0;20)=5\cdot0+4\cdot20=80$; $P(N)=P(16;0)=5\cdot16+4\cdot0=80$;
$P(S)=P(8;10)=5\cdot8+4\cdot10=80$ ж.б.

Ошондой эле табылган аныкталуу областы $OKLM$ бул KN кесиндинин оң жана жогору жагында жаткан чекиттерди да камтыйт. Демек, кыйла жогору пайданы камсыз кыла турган кутулардын көптүктөрү бар экени көрүнүп турат. Ушундайча улантуу менен сызыктуу программалоо теориясынын негизги теоремасына туш болобуз:

Теорема. Максаттык функция аныкталуу областты сүрөттөгөн көп бурчтуктун чокуларынын биринде максимумуна (минимумуна) ээ болот.

(Бул теореманын далилденишин мында келтирбейбиз.)

Ошентип, дүкөн $K(0;20)$, $L(10;16)$, $M(20;0)$ чекиттеринин бирине туура келүүчү кутулардын көптүгүн даярдап сатса, максималдуу пайданы алат. Аныктыкка келиш үчүн, максаттык функциянын маанилерин эсептеп, алардын эң чоңун тандоо жетиштүү болот.

$$P(K)=P(0,20)=5\cdot0+4\cdot20=80;$$
$$P(L)=P(10,16)=5\cdot10+4\cdot16=114;$$
$$P(M)=P(20,0)=5\cdot20+4\cdot0=100.$$

Демек, дүкөн 114 сомго барабар болгон максималдуу пайданы A түрүндөгү кутулардан 10-ду жана B түрүндөгү кутулардан 16-ны даярдап сатуудан ала алат.

Эгер ошол эле аныкталуу областында башка максаттык функциянын максимумун табуу зарыл болсо, жооп өзгөрүшү мүмкүн:

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

мисалы $P(x, y) = 7x + 4y$ болсо, анда максимум $M(20;0)$ чекитинде болот.

Себеби: $P(K)=80$; $P(L)=7\cdot10+4\cdot16=134$; $P(M)=7\cdot20+4\cdot0=140$.

Демек, конфеттердин *A* түрүндөгү кутуларынын ар биринен пайда 5 сом эмес, 7 сом болсо, анда, $P(x, y) = 7x + 4y$ максаттык (пайда) функциясын максимал—даштырыш үчүн дүкөн конфеттердин *A* түрүндөгү кутуларын гана сатууга тийиш.

4. *Күйүүчү майдын* сапатын жакшыртуу үчүн кошулма заттар колдонулат. «Альфа» маркасындагы күйүүчү майдын ар бир тоннасы *X* түрдөгү кошулмадан *40 мг*-дан, ал эми *Y* түрүндөгүсүнөн *14 мг*—дан, *Z* кошулмадан *18 мг*—дан кем эмес затты камтышы керек. Бул кошулма заттар *A* жана *B* продукттарында камтылган.

Продукттардын ар бир литринде камтылган кошулмалар төмөнкү таблицада (мг менен) көрсөтүлгөн:

	X	*Y*	*Z*
A	4	2	3
B	5	1	1

Эгер *A* продуктунун 1 литринин баасы 50 сом, *B*-нын 1 литринин баасы 60 сом болсо, «Альфа» маркасындагы күйүүчү майдын ар бир тоннасындагы кошулмалардын наркын минималдаштырыш үчүн канча литр *A* жана *B* пайдаланыш жетиштүү?

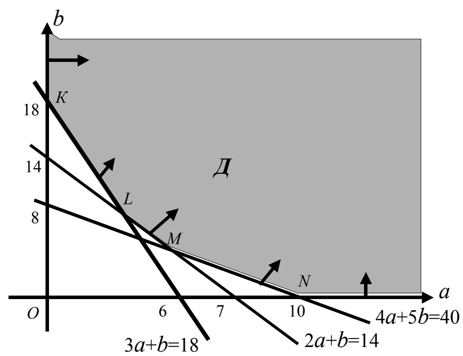
A продуктунун көлөмүн (литр менен) *a* жана *B* продуктунун көлөмүн *b* аркылуу белгилеп, маселени математика тилинде төмөнкүчө жазабыз:

Ресурстарды чектеген көптүк—маселенин аныкталуу областы *Д* болсун. Анда

$$Д:\begin{cases} a \ge 0, b \ge 0, \\ 4\cdot a + 5\cdot b \ge 40, \\ 2\cdot a + b \ge 14, \\ 3\cdot a + b \ge 18. \end{cases}$$

Наркы (максаттык функция) $C(a,b) = 50a + 60b$ болсо, $\min\limits_{Д} C(a,b)$–?

Маселенин аныкталуу областы графикте төмөнкүдөй:



PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Аныкталуу областын чектөөчү түз сызыктарды чийүү үчүн алардын теңдемелерин кесиндилердеги теңдемелер түрүндөгү жазууну пайдаланган ыңгайлуу экендигин белгилейбиз.

($4\cdot a+5\cdot b=40$ теңдемесин $\dfrac{a}{10}+\dfrac{b}{8}=1$ түрүндө ж.б.)

Мындан мурунку пункттан, $C=50\cdot a+60\cdot b$ максаттык функциясы K,L,M,N бурчтук чекиттердин биринде өзүнүн минимумуна жетет, деген келип чыгат. Чиймеде K чекити (0;18), N чекити (10;0) координаттарына ээ болгондугу көрүнүп турат**.** L жана M чекиттеринин координаттарын табыш үчүн, кесилишинде ушул чекиттер жаткан, түз сызыктарды баяндоочу теңдемелердин төмөнкү системаларын чыгарабыз:

$$L:\ \begin{cases}2\cdot a+b=14,\\ 3\cdot a+b=18,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\ b=6.\end{cases}$$ Демек, $L(4;6)$.

$$M:\ \begin{cases}4\cdot a+5\cdot b=40,\\ 2\cdot a+b=14,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\cdot b=12,\\ 2\cdot a+b=14,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=5,\\ b=4.\end{cases}$$ Демек, $M(5;4)$.

Маселе чыгаруу процессин аякташ үчүн максаттык функциянын бурчтук чекиттердеги маанилерин эсептөө калды.

$$C(K)=50\cdot 0+60\cdot 18=1080;$$
$$C(L)=50\cdot 4+60\cdot 6=560;$$
$$C(M)=50\cdot 5+60\cdot 4=490;$$
$$C(N)=50\cdot 10+60\cdot 0=500.$$

Бул жерде, эң кичине маани 490.

Ошентип, «Альфа» маркасындагы күйүүчү майдын тоннасына A продуктунан 5 литр, B продуктунан 4 литр пайдаланып, 490 сом сарп кылуу жетиштүү.

Маселенин шартын колдонуп, маселеде коюлган суроого берилген жооптон тышкары көптөгөн башка пайдалуу маалыматты алса болот. Атап айтканда, оптималдуу чекит, $M(5;4)$ чекити, X жана $У$ кошулма заттарга болгон талаптар менен аныкталат. Бул болсо, Z кошулма заты боюнча резерви бар дегенди билдирет. Анткени, берилген таблицаны колдонуп, 3·5+1·4=19 санды табабыз, б.а. Z кошулма затынан биз 19 бирдикти кошкону жатабыз, ал эми «Альфа» маркасына коюлган талаптар боюнча Z кошулма затынан 18 бирдикке (барабарсыздыктардын системасын кара) ээ болуу жетиштүү.

5. Бул пункта, биз, сызыктуу программалоо теориясын колдонуп, ***транспорт маселелерди*** изилдемекбиз.

Фирманын **I** сактоочу жайында 400 телевизор, **II**−синде 500 телевизор бар. Анын 350−сүн A дүкөнүнө, 300−үн $Б$ дүкөнүнө жеткирүү керек.

Эгер бир телевизорду **I**−сактоочу жайдан A дүкөнүнө жеткирүү 2,5 сом; $Б$ дүкөнүнө жеткирүү 1,5 сом; **II** сактоочу жайдан A дүкөнүнө жеткирүү 2,5 сом; $Б$ дүкөнүнө жеткирүү 1,8 сом болсо, анда, ташууга

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

кеткен чыгашаны минималдаштырыш үчүн, ар бир дүкөнгө ар бир сактоочу жайдан канча телевизор жеткирилүүгө тийиш?

Берилиштерди таблицага келтирүүдөн башташ ыңгайлуу болот:

	А	*Б*	Запастар
I	2,5	1,5	400
II	2	1,8	500
Талаптар	350	300	

x аркылуу **I** сактоочу жайдан *А* дүкөнүнө, y аркылуу **I**—ден *Б*—га жеткирилүүчү телевизорлордун санын белгилейли. Анда тиешелүү түрдө: (350-x) бул **II**—ден *А*—га; (300-y) бул **II**—ден *Б*—га жеткирилүүчү телевизорлордун саны.

Натыйжада, төмөнкү маселеге ээ болобуз:

$$Д:\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ 350 - x \ge 0, \\ 300 - y \ge 0, \\ x + y \le 400, \\ (350 - x) + (300 - y) \le 500, \end{cases}$$

$C(x,\ y) = 2,5\cdot x+1,5\cdot y+2(350-x)+1,8(300-y),$

$$\min_{Д} C(x, y) - ?$$

Биринчи барабарсыздыктар ташылган телевизорлордун саны терс эмес дегенди билдирет. Ал эми акыркы эки барабарсыздык **I** сактоочу жайдан алынган телевизорлордун саны 400-төн ашпайт, **II** ден 500-төн ашпайт дегенди көрсөтөт.

Чыгаша функциясы *C(x,y)* ташылган телевизорлордун санын жана ар бир телевизорду ташымак үчүн коротулган акчаны колдонуп табылган.

Окшош мүчөлөрдү топтоп, төмөнкү маселеге келебиз:

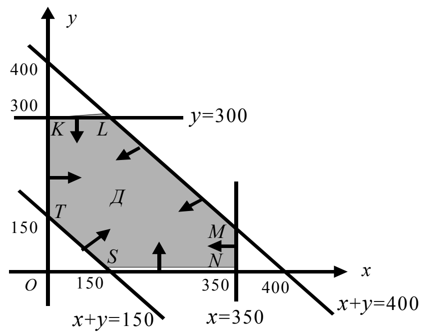
$$Д:\begin{cases} x \ge 0, y \ge 0, \\ x \le 350, y \le 300, \\ x + y \le 400, \\ x + y \ge 150, \end{cases}$$

$C=0,5\cdot x-0,3\cdot y+1240,$

$$\min_{Д} C(x, y) - ?$$

C(x,y) функциясынын көрүнүшүнөн, минимумга жетиш үчүн x эң кичине y эң чоң болгон чекит керек экендиги келип чыгат. Аныкталуу областын чийип көрсөтөбүз.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com



Сүрөттөн (0;300) чекити оптималдуу болуп эсептелери көрүнүп турат. Демек транспорт (ташуу) чыгашасынын минимуму;

$C(0;300)=0,5\cdot 300-0,3\cdot 300+1240=1150$ сомго барабар.

Бул минимумга жетиш үчүн, ташуу төмөнкүдөй планда ишке ашы–рылышы керек:

	А	*Б*
I	0	300
II	350	0

6. Эми транспорттук маселенин дагы бир түрүн карап көрөлү. Бул учурда дүкөндөрдүн саны 2 эмес 3 болсун дейли.

Пункт 5–де каралган маселеде сактоочу I жана II жайларда болгон 900 телевизордун 650 ташылды. Азыр биз болгон телевизорлорду бүт бойдон дүкөндөргө жеткизмекчибиз. Б.а., калган 250 телевизор үчүнчү *В* дүкөнгө жеткирилиши керек, жана I сактоочу жайдан *В* дүкөнүнө бир телевизорду жеткирүү 3 сом; II сактоочу жайдан жеткирүү 2,4 сом турат деген шарттар менен ташуу ишине арналган маселенин шарттарынын толуктайлы. Эми жеткирүү планы кандай болушу керек?

Ташуу чыгашасынын таблицасы төмөнкү түргө ээ болот:

	А	*Б*	*В*	
I	2,5	1,5	3	400
II	2	1,8	2,4	500
Талаптар	350	300	250	

Бул маселенин өзгөчөлүгү төмөнкүдө: запастардын көлөмү (400+500=900) жеткирүүлөрдүн көлөмүнө (350+300+250=900) дал келет. Мындай маселелер ***туюк*** деп аталышат.

Маселе туюк болгондуктан, *В* дүкөнүнө жеткирилүүчү телевизорлордун санын белгилеш үчүн жаңы өзгөрмөнү киргизүүнүн зарылчылыгы жок: I сактоочу жайдан *В* дүкөнүнө жеткирилүүчү телевизорлордун саны $400-(x+y)$, II–ден $500 - (350 - x) - (300 - y) = x + y - 150$ аркылуу белгиленет. Бул типтеги туюк транспорттук маселеге туура келүүчү чектөөлөр ташыла турган товардын санынын терс эместигине коюлуучу талаптар менен түшүндүрүлөт.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com

Ошентип, биздин маселе математика тилинде төмөнкү түрдө жазылат:

$$Д:\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0, \\ 400 - x - y \geq 0, \\ 350 - x \geq 0, \\ 300 - y \geq 0, \\ x + y - 150 \geq 0, \end{cases}$$

аныкталуу областы (ресурстарды чектөөчү шарттар).

Чыгаша функциясы:

$$C(x,y) = 2{,}5 \cdot x + 1{,}5 \cdot y + 3(400 - x - y) + 2(350 - x) + 1{,}8(300 - y) + 2{,}4(x + y - 150)$$
$$= -0{,}1x - 0{,}9y + 2080$$
$$\min_{Д} C(x,y) - ?$$

Көңүл буруучу нерсе, маселенин аныкталуу областы, 5 – чи пункттагы маселенин аныкталуу областынан өзгөргөн жок.

Теория боюнча максаттык *C(x,y)* функциясы өзүнүн минимумуна аныкталуу областын бурчтук чекиттеринин биринде жетиши керек. Ал эми *C(x,y)* функциясындагы *x* жана *y* белгисиздердин алдында турган коэффициенттер терс болгондуктан, *x* жана *y* координаттарды мүмкүн болушунча чоң болушу зарыл. Б.а., *C(x,y)* функциясынын минимуму *L* же *M* чекиттердин биринде экени түшүнүктүү.

Бул чекиттердеги маанилер:

$$C(L) = -0{,}1 \cdot 100 - 0{,}9 \cdot 300 + 2080 = 1800;$$
$$C(M) = -0{,}1 \cdot 350 - 0{,}9 \cdot 50 + 2080 = 2000.$$

Анда, $\min_{Д} C(x,y) = C(L) = C(100;300) = 1800 \cdot$

Жообу: төмөнкү план боюнча ташууну иш жүзүнө ашырганда

	А	*Б*	*В*
I	100	300	0
II	250	0	250

фирма 1800 сомго барабар болгон ташуунун минималдуу чыгашасына туш болот.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. COZZENS M.B., PORTER R.D., **Mathematics with Calculus**, USA, D.C. Heath and Compani, 1987, 910 p.
2. SYDSAETER K., HAMMOND P.J., **Mathematics for economic analysis**, USA, Prentice Haall, 1995, 1000 p.
3. КЫДЫРАЛИЕВ С.К., УРДАЛЕТОВА А.В., КЕРИМКУЛОВА Э., **Элементы аналитической геометрии**, Американский университет в Кыргызстане, Бишкек, 2000.

PDF created with FinePrint pdfFactory Pro trial version http://www.pdffactory.com