ВОКРУГ МОДЕЛИ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

к.ф.-м.н., доцент Анаркуль УРДАЛЕТОВА
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»

1. Спрос на пшеницу на рынке страны Халявия задается функцией

$$q^d = 2600 - 100p^d.$$

После того как правительство Халявии получило гуманитарную помощь в виде некоторого количества пшеницы и выбросило ее на рынок, рыночная цена пшеницы составила 10 халявок за кг, объем продаж – 1600 т.

После этого, Аграрный Союз Халявии требует компенсации от правительства в размере 37800 тысяч халявок, обосновывая это следующими фактами: 1600 т пшеницы аграрии сумели бы продать по цене 28 халявок за кг, а так как цена была только 10 халявок за кг, они продали только 700 т.

Соответственно, убытки в результате выброса гуманитарной помощи составили 28·1600000 - 10·700000 = 37800000 халявок.

Разберемся в этой ситуации считая, что предложение пшеницы на рынке Халявии, задается линейной функцией $q^s = e + fp^s$.

Подставив вышеприведенные значения, получим систему линейных уравнений $\begin{cases} 1600 = e + f \cdot 28, \\ 700 = e + f \cdot 10 \end{cases}$ и определим коэффициенты функции предложения: $e = 200, f = 50$.

Отсюда, воспользовавшись условием рыночного равновесия при отсутствии внешнего вмешательства $\begin{cases} p^s = p^d, \\ q^s = q^d \end{cases}$,

получим

$$\begin{cases} p^s = p^d = p, \\ 200 + 50p = 2600 - 100p \end{cases}.$$

Решив полученное уравнение, получим, что в этой ситуации равновесная цена была бы равна *16*, а отсюда, равновесный объем - *1000* т.

Следовательно, при отсутствии внешнего вмешательства Аграрии могли бы заработать *16·1000000* халявок и поэтому, максимальная сумма компенсации, на которую может претендовать Аграрный Союз Халявии равна

16·1000 000 - 10·700 000 = 15 300 000 халявок.

Помимо определения размеров справедливой компенсации, на основе приведенных данных мы можем определить размер гуманитарной помощи.

Обозначив ее через **Q**, получим, что функция предложения после выброса гуманитарной помощи на рынок будет иметь вид $q^s = 200 + 50p^s + Q$.

Подставив в это уравнение значения цены и объема в точке равновесия получим $1600 = 200 + 50 \cdot 10 + Q$. Отсюда следует, что правительство Халявии получило гуманитарную помощь в размере *900* т пшеницы.

2. В ситуации рассмотренной в пункте 1, точка рыночного равновесия находится как решение системы уравнений. При этом можно поставить вопрос: «А кто решает такие системы на реальных рынках?» Другими словами, как рынок приходит в равновесное состояние.

Далее мы приводим две модели, которые могут помочь ответить на поставленный вопрос. Прежде чем описать эти модели совершим небольшой экскурс в теорию разностных уравнений. Большим преимуществом разностных уравнений является то, что с их помощью, используя довольно ограниченный круг математических знаний и умений, можно перевести на язык математики (смоделировать) и решить широкий класс прикладных задач, в частности, экономических.

Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + b \tag{1}$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами. Здесь, a и b – коэффициенты уравнения, x_k – неизвестное, описывающее состояние системы в момент k.

Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент. В связи с этим, уравнения вида (1) часто называются *рекуррентными*.

Для того, чтобы найти решение уравнения (1), сначала отследим несколько шагов:

$$x_1 = ax_0 + b;$$

$x_2 = a\,x_1 + b,$ и подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получим

$x_2 = a(a\,x_0 + b) + b = a^2\,x_0 + a\,b + b;$

$x_3 = ax_2 + b,$ и повторив процесс, получим:

$x_3 = a(a^2\,x_0 + a\,b + b) + b = a^3\,x_0 + a^2b + ab + b;$

$x_4 = a\,x_3 + b = a(a^3x_0 + a^2b + ab + b) = a^4x_0 + a^3b + a^2b + ab + b.$

Тенденция ясна. Можно сделать индукционное предположение:

$x_{n-1} = a^{n-1}\,x_0 + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \ldots + ab + b.$

Индукционный переход

$$x_n = ax_{n-1} + b = a(a^{n-1}x_0 + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \ldots + ab + b) + b.$$

подтверждает наше предположение:

$$x_n=a^n x_0+a^{n-1}b+a^{n-2}b+\ldots+ab+b. \qquad (2)$$

Преобразуем равенство (2):

$$x_n=a^n x_0+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1). \qquad (3)$$

Выражение в скобках является суммой членов геометрической прогрессии. Использовав формулу для суммы членов геометрической прогрессии, из формулы (3) получим решение уравнения (1):

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}; \qquad (4)$$

3. **Модель Эванса** Рыночная цена товара была равна p_0. После того как под воздействием внешних обстоятельств спрос и предложение на этом рынке стали описываться уравнениями $q^d = a - bp^d$ и $q^s = e + fp^s$ (коэффициенты $a, b, e,$ неотрицательны), господин Маршалл заявил, что он знает, что новая равновесная цена будет равна $\frac{a-e}{b+f}$ В ответ, господин Эванс сказал: «А я знаю, каким образом рынок приходит к этой цене».

Далее мы приводим рассуждения господина Эванса.

Изменение рыночных условий приводит к изменению равновесной цены. Причем изменение цены прямо пропорционально разнице между объемом текущего спроса и текущего предложения. На математическом языке, это выражается следующим разностным уравнением:

$$p_n = p_{n-1} + k(q^d_{n-1} - q^s_{n-1}),$$

где k это коэффициент пропорциональности определяемый неценовыми факторами. Подставив значения q^d и q^s, получим линейное разностное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$p_n = p_{n-1} + k[(a - bp_{n-1}) - (e + fp_{n-1})]. \qquad (5)$$

Отсюда, собрав подобные члены, получим

$$p_n = p_{n-1}(1 - kb - kf) + k(a - e).$$

Уравнение (5) согласно формуле (4) есть функция

$$p_n = (1-kb-kf)^n p_0 + k(a-e)\frac{1-(1-kb-kf)^n}{kb+kf}. \qquad (6)$$

В частности, из формулы (6) следует, что если число $1 - kb - kf$ по абсолютной величине меньше единицы, $k \neq 0$, то при $n \to \infty$ цена будет стремится к числу указанному господином Маршаллом: $\frac{a-e}{b+f}$.

Пример: Пусть функция спроса задана уравнением $q^d = 10 - p^d$, функция предложения уравнением $q^s = 1 + 2p^s$, а цена в начальный момент времени равна

2. Тогда изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, будет описываться последовательностью

$$p_n = (1 - k \cdot 3)^n 2 + k \cdot 9 \cdot \frac{1 - (1 - k \cdot 3)^n}{k \cdot 3}\ .$$

Если ситуация на рынке не будет меняться достаточно долго, а $0 < |1 - k \cdot 3| < 1$, то цена будет стремится к 3.

При этом,
если $0 < k < 1/3$, то цена будет последовательно повышаться от 2 к 3, а если $1/3 < k < 2/3$, цена будет приближаться к 3, попеременно, сверху и снизу.

4. **Паутинообразная модель** Модель Эванса включает в себя коэффициент пропорциональности ***k***, который иногда трудно объяснить. Эта проблема отсутствует при использовании паутинообразной модели (правда появляются новые проблемы), которую мы проиллюстрируем следующей ситуацией.

Синбад-Мореход, который возит товары на продажу на остров ЭкТ, узнав от купцов, бывших до него на острове, что они продали каждый ящик с шоколадом за 10 мер серебра, взял с собой 10 ящиков. На острове выяснилось, что он может продать весь шоколад по цене 14 мер серебра за ящик. Вдохновленный этой, ценой он на следующий раз привез 14,8 ящиков шоколада. Но, к сожалению, он сумел продать эту партию шоколада только по цене 11,6 мер серебра за ящик. Поэтому, в 3-й раз Синбад-Мореход взял с собой только 11,92 ящика шоколада. …

Считая, что предложение шоколада со стороны Синбад-Морехода и спрос на шоколад со стороны островитян линейны выпишем соответствующие функции. Далее, предполагая, что на этот остров не будут ездить другие торговцы шоколадом, а спрос и предложение останутся неизменными, определим на какой цене и при каком объеме стабилизируется рынок.

Из условий следует, что объем предложения шоколада в каждой поездке определяется ценой, по которой шоколад был продан в предыдущую поездку. Отсюда, функция предложения $q_n^s = e + f p_{n-1}$. Подставив значения, получим систему уравнений, которая позволит определить коэффициенты функции предложения: $\begin{cases} 10 = e + f \cdot 10, \\ 14{,}8 = e + f \cdot 14 \end{cases}$. Решив эту систему, получим, что предложение шоколада со стороны Синбад-Морехода задается функцией $q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2$. Справедливость этого утверждения можно проверить данными 3-й поездки: $11{,}92 = 1{,}2(11{,}6) - 2$.

Коэффициенты функции спроса на шоколад со стороны островитян $q_n^d = a + b\, p_n$ определяются системой уравнений $\begin{cases} 10 = a + b \cdot 14, \\ 14{,}8 = a + b \cdot 11{,}6 \end{cases}$.

Решение системы: $a = 38;\ b = -2$.

Следовательно, цена, по которой продается шоколад в каждый приезд Синбад-Морехода, а также количество товара, который он каждый раз берет на остров задаются системой уравнений $\begin{cases} q_n^d = 38 - 2p_n, \\ q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2 \end{cases}$ и начальным условием $p_o = 10$. Так как Синбад-Мореход каждый раз продает весь товар, при каждой поездке объем спроса равен объему предложения.

Поэтому, имеет место равенство $38 - 2\,p_n = 1{,}2p_{n-1} - 2$.

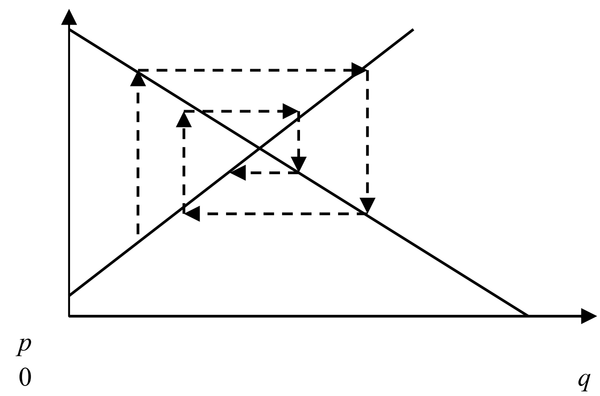
Отсюда, $p_n = -0{,}6p_{n-1} + 20$.

Решение этого уравнения,

$$p_n = (-0{,}6)^n p_0 + 20\frac{1-(-0{,}6)^n}{1-(-0{,}6)} = (-0{,}6)^n \cdot 10 + 20\frac{1-(-0{,}6)^n}{1+0{,}6}.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что цена стабилизируется на уровне *12,5*, и при этом будет продаваться *13* ящиков шоколада.

Для того чтобы понять, откуда пошло название модели, нарисуем линии спроса и предложения и соединим соответствующие точки.



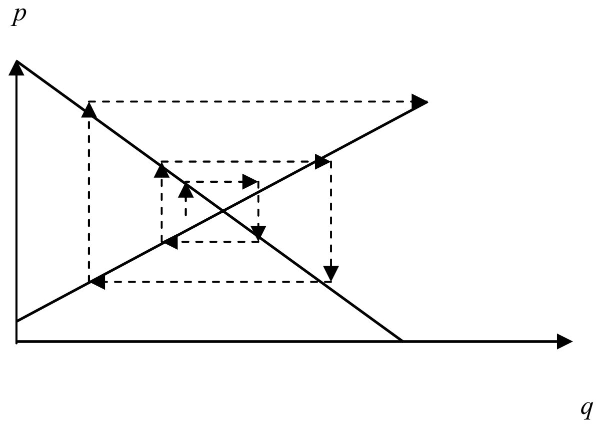
Выше, мы упоминали о недостатках, сопутствующих паутинообразной модели. В качестве примера, предположим, что спрос и предложение шоколада задаются уравнениями $q_n^d = 38 - 2\,p_n$ и $q_n^s = 3p_{n-1} - 2$. Тогда, соответствующее разностное уравнение будет иметь вид $p_n = -1{,}5p_{n-1} + 20$.

Его решение

$$p_n = (-1{,}5)^n p_0 + 20\frac{1-(-1{,}5)^n}{1-(-1{,}5)} = (-1{,}5)^n \cdot 10 + 20\frac{1-(-1{,}5)^n}{1+1{,}5}.$$

Так как последовательность $(-1{,}5)^n$ не имеет предела, мы получаем что цена на таком рынке никогда не стабилизируется.

Соответствующий график имеет вид раскручивающейся спирали:



Для того чтобы определить условия, при которых цена на рынке в условиях паутинообразной модели стабилизируется, напишем уравнения спроса и предложения в общем виде: $q_n^d = a - bp_n$, $q_n^s = e + f\, p_{n-1}$; а затем выпишем разностное уравнение: $p_n = \frac{f}{-b} p_{n-1} + \frac{e-a}{(-b)}$ и решим его:

$$p_n = \left(-\frac{f}{b}\right)^n p_0 + \frac{e-a}{(-b)} \cdot \frac{1-(-f/b)^n}{1-(-f/b)} = \left(-\frac{f}{b}\right)^n \left(p_0 + \frac{a-e}{b+f}\right) + \frac{a-e}{b+f} .$$

Последовательность цен сходится, то есть стабилизируется на числе $\frac{a-e}{b+f}$ только в том случае, когда абсолютное значение числа $\frac{f}{b}$ меньше чем 1.

Другими словами, паутинообразная модель может подсказать, как будет меняться цена на рынке в долгосрочный период только в том случае, когда «наклон» функции спроса будет по абсолютной величине больше, чем «наклон» функции предложения.

В заключение, отметим, что полученная равновесная цена совпадает с оной, полученной исходя из модели Эванса, что впрочем и не удивительно. Было бы странно, если бы дело обстояло не так.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. B. COZZENS, R. D. PORTER. **Mathematics with Calculus**. - USA, D. C. Heath and Company, 1987. - 910 p.
2. R. HARSHBARGER, J. REYNOLDS. **Calculus with Applications**. - USA, D. C. Heath and Company, 1993. - 630 p.