DİFÜZYON DENKLEMİ VE ÇEVRE KİRLİLİĞİNİN BAZI PROBLEMLERİ

Prof. Dr. Ramiz R. RAFATOV
Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bişkek/KIRGIZİSTAN
Doç. Dr. Vedat ASİL
Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE
Dr. Mustafa AYDOĞDU
Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE

GİRİŞ

Kabul edelim ki G bölgesi $\Re^3$ e aittir ve M(x,y,z)$\in$G değişken noktadır. $\vec{\vartheta}=(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$ birim hız vektörüdür. $\vec{\vartheta}\in\Omega$ (burada Ω-birim küredir). $\psi(M,\vec{\vartheta},t)$ t-anında M noktasında bulunan $\vec{\vartheta}$ hızına sahip aerosollerin yoğunluğu olsun. Yine kabul edelim ki, G çevresinin M_0 noktasında Q_1 kuvvete sahip aerosol kaynakları mevcuttur. Difüzyon katsayısını D ile gösterelim. T_0-aerosol parçacıklarının yaşam süresi olsun. M$\in$G noktasında bulunan ve $\vec{\vartheta}_1\in\Omega$ hızına sahip aerosol parçacıklarının bu noktada çarpışma neticesinde $\vec{\vartheta}\in\Omega$ hızına sahip olması ihtimali $W(M,\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}_1)$ olsun. O zaman G çevresinde aerosol parçacıklarının dağılımını belirten $\psi(M,\vec{\vartheta},t)$ yoğunluğu [1 , 2],

$$\frac{\partial\psi(M,\vec{\vartheta},t)}{\partial t}=div(Dgrad\psi)-\frac{1}{T_0}\psi(M,\vec{\vartheta},t)+Q_1\delta(M-M_0)+$$

$$+\frac{1}{T_0}\int_\Omega W(M_1,\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}_1)\psi(M,\vec{\vartheta}_1,t)d\vartheta_1 \qquad (1.1)$$

difüzyon denklemi ile tanımlanabilir. Burada $\delta(M-M_0)$-Dirac fonksiyonudur.

Belirli bir zaman sürecinden sonra çevrede M_0 noktasındaki aerosol kaynakları nedeniyle meydana gelen kirlenme (1.1) e karşılık zamandan bağımsız,

$$div(Dgrad\psi) - \frac{1}{T_0}\psi(M,\vec{\vartheta}) + Q_1\delta(M - M_0)$$

$$+\frac{1}{T_0}\int_\Omega W(M,\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}_1)\psi(M,\vec{\vartheta}_1)d\vartheta_1 = 0 \tag{1.2}$$

integro-diferansiyel denklemi ile tanımlanabilir.

Eğer Ω birim küresi elemanı $\vec{\vartheta}=(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3)$ birim vektörünü küresel koordinatlar ile değiştirirsek;

$$\vartheta_1 = Sin\theta Cos\eta\,,\ \vartheta_2 = Sin\theta Sin\eta\,,\ \vartheta_3 = Cos\theta \tag{1.3}$$

ve W(M, $\vec{\vartheta},\vec{\vartheta}_1$) $/T_0=\lambda_1/4\pi$ kabul edersek (1.2) denklemi aşağıdaki

$$div(Dgrad\psi) - \frac{1}{T_0}\psi(M,\eta,\theta) + Q_1\delta(M - M_0) +$$

$$\frac{\lambda_1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\eta_1 \int_0^{\pi}\psi(M,\eta,\theta_1)Sin\theta_1 d\theta_1 = 0 \tag{1.4}$$

zamandan bağımsız denklemine dönüşür.

1. Difüzyon katsayısı D sabit halinde difüzyon denkleminin çözümü:

Hesaplamaları kolaylaştırmak için kabul edelim ki ,G çevresinde difüzyon hareketleri x,y,η den bağımsızdır ve z$\in$(-∞,+∞), Cos$\theta = \mu \in$[-1,+1], D sabittir. Bunları göz önünde tutarsak ve z nin yerine x i koyarsak (1.4) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\sigma\psi(x,\mu) = \frac{\partial^2\psi(x,\mu)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x,\vartheta)d\vartheta + Q\delta(x - x_0) \tag{1.5}$$

Burada $\sigma = \dfrac{1}{T_0 D}$, $\lambda = \dfrac{\lambda_1}{D}$, $Q = \dfrac{Q_1}{D}$ dir. (1.5) de $x = x_0$ noktasında integral alınırsa,

$$\sigma\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\psi dx = \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_0+\frac{\varepsilon}{2}} - \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\int_{x_0-\frac{\varepsilon}{2}}^{x_0+\frac{\varepsilon}{2}}\psi(x,\vartheta)dxd\vartheta + Q$$

elde edilir. Şimdi $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x_0+} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x_0-} + Q = 0 \tag{1.6}$$

bulunur. Bu nedenle şimdi bizim iki bölgemiz $-\infty < x \le x_0$ ve $x_0 \le x < +\infty$ dir. Bu bölgelerde bulunan iki çözümümüz ψ_- ve ψ_+ ve bunlara karşılık iki problemimiz olur.

$$\frac{\partial^2\psi_+}{\partial x} - \sigma\psi_{\pm} + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\psi_{\pm}(x,\vartheta)d\vartheta = 0 \tag{1.7}$$

$$\psi_+ = 0 \ , \ x \to \infty \ \text{ ise } \ \psi_- = 0 \ , \ x \to -\infty \ \text{ ise} \tag{1.8}$$

Bu iki çözümü birbirine bağlamak için (1.6) dan

$$\frac{\partial\psi_+}{\partial x} - \frac{\partial\psi_-}{\partial x} + Q = 0 \tag{1.9}$$

x = x_0 noktasında şartını sağlarız. Çözümün $(-\infty,+\infty)$ bölgesinin her noktasında süreklilik şartı şu şekildedir:

$$\psi_+ = \psi_- \text{ , x = } x_0 \text{ noktasında} \tag{1.10}$$

(1.7) deki $\psi_{\pm}(x,\mu)$ yü aşağıdaki şekilde arayalım:

$$\psi(x,\mu) = \varphi_\alpha(\mu)e^{-\alpha x} \tag{1.11}$$

Eğer (1.11) ifadesini (1.7) de yerine yazarsak,

$$(\alpha^2 - \sigma)\varphi_\alpha(\mu) + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_\alpha(\vartheta)d\vartheta = 0 \tag{1.12}$$

elde ederiz. Bilinmeyen $\varphi_\alpha(\mu)$ fonksiyonuna,

$$\int_{-1}^{1}\varphi_\alpha(\mu)d\mu = 1 \tag{1.13}$$

norm bağlama şartını yazalım. O zaman (1.12) den $\alpha^2 \ne \sigma$ için

$$\varphi_\alpha(\mu) = \frac{\lambda}{2(\sigma - \alpha^2)} \tag{1.14}$$

yi alırız. (1.14) ifadesini (1.13) de ki yerine yazarsak,

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{\sigma - \lambda} \tag{1.15}$$

yı elde ederiz. Burada kabul edilmiştir ki $\sigma > \lambda$ dır. Yani $\alpha_{1,2} \in \Re$ dir. Şimdi (1.7) integro-diferansiyel denkleminin çözümleri şu şekilde yazılabilir:

$$\psi_{+}(x,\mu) = C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu)e^{-\alpha_1(x-x_0)} \; ; \; \psi_{-}(x,\mu) = C_2\varphi_{\alpha_2}(\mu)e^{-\alpha_2(x-x_0)} \tag{1.16}$$

Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir. Eğer (1.16) yı (1.9) da yerine yazarsak,

$$C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu)(-\sqrt{\sigma-\lambda}\,) - C_2\varphi_{\alpha_2}(\mu)\sqrt{\sigma-\lambda} + Q = 0 \tag{1.17}$$

elde ederiz. Eğer (1.16) ifadesini (1.10) da yerine yazarsak,

$$C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu) = C_2\varphi_{\alpha_2}(\mu) \tag{1.18}$$

yü elde ederiz. (1.17) ve (1.18) eşitliklerinden,

$$\varphi_{\alpha_1}(\mu) = \varphi_{\alpha_2}(\mu) = \frac{1}{2} \quad , \quad C_1 = C_2 = \frac{Q}{\sqrt{\sigma-\lambda}}$$

yı alırız. Şimdi (1.5) integro-diferansiyel difüzyon denkleminin çözümünü yazabiliriz.

$$\psi(x,\mu) = \frac{Q}{\sqrt{\sigma-\lambda}} \begin{cases} \exp[-\sqrt{\sigma-\lambda}(x-x_0)], x \geq x_0 ise \\ \exp[-\sqrt{\sigma-\lambda}(x-x_0)], x \geq x_0 ise \end{cases} \tag{1.19}$$

Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 1. Eğer difüzyon katsayısı D = sabit > 0 , $\sigma > \lambda$ ise (1.5) integro-diferensiyel difüzyon denkleminin (1.8)-(1.10) şartını sağlayan çözümü (1.19) şeklindedir. Böylece aerosol parçacıklarının miktarı,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,\mu)dxd\mu = \frac{4Q}{\sqrt{\sigma-\lambda}}$$

dır.

Kolayca görebiliriz ki , $\sigma \leq \lambda$ olduğunda (1.5),(1.8)-(1.10) probleminin çözümü mevcut değildir. Çünkü bu halde (1.15) in kökleri sıfır veya sanaldır ve (1.19) çözümü (1.8) şartını sağlamaz.

2. Difüzyon katsayısı D nin değişken halinde difüzyon denkleminin çözümü:

(1.1) veya (1.4) difüzyon denkleminde difüzyon katsayısı D yi değişken olarak kabul edersek, yani

D($\vec{\vartheta}$) $= D(\vartheta_3) = D(Cos\theta) = D(\mu)$ integro-diferensiyel difüzyon denklemi

$$\text{Div}(\text{D}(\text{Cos}\,\theta)\ \text{grad}\,\psi\ \text{-}\ \frac{1}{T_0}\psi(M,\eta,\theta)+Q_1\delta(M-M_0)\ +$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\eta_1\int_0^{\pi}\psi(M,\eta_1,\theta_1)Sin\theta_1 d\theta_1\ =0$$

denklemine, sonrada bazı sadeleştirmelerin sonucunda,

$$\text{D}(\mu)\frac{\partial^2\psi(x,\mu)}{\partial x^2}-\frac{1}{T_0}\psi(x,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x,\vartheta)d\vartheta+Q\delta(x-x_0)=0 \tag{2.1}$$

İntegro diferansiyel denklemine dönüşür. Buradan (1.7)-(1.10) a benzer bir problem elde edilir.

$$\text{D}(\mu)\frac{\partial^2\psi_{\pm}(x,\mu)}{\partial x^2}-\frac{1}{T_0}\psi_{\pm}(x,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\psi_{\pm}(x,\vartheta)d\vartheta \tag{2.2}$$

$$\psi_{+}=0,\ \text{x}\rightarrow+\infty\ ;\ \psi_{-}=0\ ,\text{x}\rightarrow-\infty \tag{2.3}$$

$$\text{D}(\mu)\frac{\partial\psi_{+}}{\partial x}-D(\mu)\frac{\partial\psi_{-}}{\partial x}+Q=0\ ,\ \text{x}=\text{x}_0 \tag{2.4}$$

$$\psi_{+}(x,\mu)=\psi_{-}(x,\mu)\ ,\ \text{x}=\text{x}_0\ \text{noktasında} \tag{2.5}$$

(2.2)-(2.5) probleminin çözümünü yine (1.11) şeklinde göstereceğiz. O zaman (2.4) den,

$$(\frac{D(\mu)}{\alpha^2}-\frac{1}{T_0})\varphi_u(\alpha)+\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_{\alpha}(\vartheta)d\vartheta=0$$

ı sonra (1.13) şartından

$$(\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu))\varphi_{\alpha}(\mu)=\frac{\lambda\alpha^2}{2} \tag{2.6}$$

yı elde ederiz. Eğer her $\mu\in[-1\ ,1]$ için

$$\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu)\neq0\ \ \text{ise}$$

$$\varphi_{\alpha}(\mu)=\frac{\lambda\,\alpha^2}{2}\left[\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu)\right]^{-1} \tag{2.7}$$

fonksiyonunu (2.6) denkleminin çözümü olur. α parametresini belirtmek için (2.7) ifadesini (1.3) de yerine yazarız.

$$\wedge(\alpha) \equiv 1-\frac{\lambda}{2}\alpha^2\int_{-1}^{1}\left[\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu)\right]^{-1}d\mu=0 \tag{2.8}$$

Bu denklemin kökleri $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots(\mathrm{Re}\,\alpha_k\geq 0)$ ve $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\ldots(\mathrm{Re}\,\beta_k\leq 0)$ (2.2) nin özdeğerleridir. Böylece (2.2)-(2.5) probleminin genel çözümü:

$$\psi(x,\mu)=\begin{cases}\psi_+(x,\mu)=\sum\limits_k C_k^+\varphi_{\alpha_k}(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha_k}, x\geq x_0\\ \psi_-(x,\mu)=\sum\limits_k C_k^-\varphi_{\beta_k}(\mu)e^{-(x-x_0)/\beta_k}, x\leq x_0\end{cases} \tag{2.9}$$

dir. Burada C_k^+, C_k^- keyfi sabitlerdir. (2.3) şartını sağlamak için (2.9) da ki C_k^+ , C_k^- katsayılarını gerektiği şekilde belirtmek gerekir.

Eğer $-1\leq\mu\leq 1$ için $\mathrm{D}(\mu)=\frac{\alpha^2}{T_0}$ eşitliği herhangi bir $\mu\in[-1\ ,\ 1]$ noktasında sağlanabilirse (2.6) nın çözümü (2.7) şeklinde olmaz. Bu çözüm,

$$\varphi_\alpha(\mu)=\frac{\lambda\alpha^2}{2}\mathrm{P}\frac{1}{\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu)}+\gamma(\alpha^2)\delta\left(\frac{\alpha^2}{T_0}-D(\mu)\right) \tag{2.10}$$

şeklinde olabilir. Burada P-Cauchy baş değeridir. δ-Dirac genelleştirilmiş fonksiyonudur. $\gamma(\alpha^2)$-bilinmeyen keyfi fonksiyondur.

Şimdi (2.1) denkleminin çözümünü şöyle tanımlayabiliriz:

$$\psi_+(x,\mu)=\sum_k C_k^+\varphi_{\alpha_k}(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha_k}+\int_0^1 A^+(\alpha)\varphi_\alpha(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha}d\alpha, x\geq x_0 \text{ ise} \tag{2.11}$$

$$\psi_-(x,\mu)=\sum_i C_i^-\varphi_{\beta_i}(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha_i}+\int_0^1 A^-(\alpha)\varphi_\beta(\mu)e^{-(x-x_0)/\beta}d\beta, x\leq x_0 \text{ ise}$$

Burada $\varphi_{\alpha_k}(\mu)$, $\varphi_{\beta_i}(\mu)$ (2.2) nin farklı özdeğerlerine karşılık öz fonksiyonlarıdır.

$\varphi_{\alpha_k}(\mu)$, $\varphi_{\beta_i}(\mu)$ $(\beta \in [-1,1], \alpha \in [0,1], \mu \in [-1,1]$ (2.10) tipinde (2.2) nin sürekli spektrine karşılık öz fonksiyonlarıdır. C_k^+, C_i^- bilinmeyen sabit katsayılarıdır. $A^+(\alpha), A^-(\beta)$ ise bilinmeyen fonksiyonlardır. Bunlar (2.3)-(2.5) şartlarından bulunabilirler.

(2.2)-(2.5) problemi ve onun çözümü (2.10) her D(μ) için genel halde incelemek oldukca zordur. Hesaplamaları kolaylaştırmak için difüzyon katsayısı D(μ) nün bazı özel hallerini inceleyelim:

Kabul edelim ki,

$$D(\mu) = \mu / T_0$$

dır. O zaman (2.10) ifadesini (1.13) de yerine yazarsak $\gamma(\alpha^2)$ yi buluruz:

$$\gamma(\alpha^2) = 1 - \frac{\lambda T_0 \alpha^2}{2} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\alpha^2 - \mu} = 1 - \frac{\lambda T_0 \alpha^2}{2} \ln \frac{1 + 1/\alpha^2}{1 - 1/\alpha^2}$$

Bu ifadeyi ve (2.12) yi (2.10) da yerlerine koyarsak sürekli özdeğer spektrine karşılık öz fonksiyonlar ailesini, yani $\kappa_\alpha(\mu)(\alpha, \mu \in [-1,1])$ i elde ederiz.

Eğer (2.12) ve (2.7) yi (1.13) norm bağlama şartına koyarsak;

$$1 - \frac{\lambda T_0 \alpha^2}{2} \ln \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = 0 \tag{2.13}$$

denklemini elde ederiz. (2.13) denkleminin dört adet kökü vardır [1]. $\alpha_1, \alpha_2 (\mathrm{Re}\,\alpha_k \geq 0)$, $\beta_1, \beta_2 (\mathrm{Re}\,\beta_i \leq 0)$. Onun için (2.11) de toplamlar,

$$\sum_{k=1}^{2} C_k^+ \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{2} C_i^-$$

şeklinde olurlar. Diğer terimler değişmezler. Şimdi burada (2.5) şartını uygularsak

$$C_1^+ \varphi_{\alpha_1}(\mu) + C_1^+ \varphi_{\alpha 2}(\mu) + \int_0^1 A^+(\alpha) \varphi_\alpha(\mu) d\alpha = C_1^- \varphi_{\beta_1}(\mu) C_1^- \varphi_{\beta 2}$$

$$(\mu) + \int_{-1}^{0} A^-(\beta) \varphi_\beta(\mu) d\beta \tag{2.14}$$

eşitliğini elde ederiz.(2.10) dan görebiliriz ki $\varphi_\alpha(\mu)$, α ya göre çifttir. Bunun için

$$\int_{-1}^{0} A^{-}(\beta)\varphi_{\beta}(\mu)d\beta = \int_{0}^{1} A^{+}(\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha \qquad (2.15)$$

dir. Kolayca görebiliriz ki (2.7) fonksiyonu ve (2.13) denkleminin sol tarafı α ya göre çifttir. Dolayısıyla kabul edebiliriz ki,

$\alpha_1^2 = \beta_1^2, \alpha_2^2 = \beta_2^2$ ve $\varphi_{\alpha_k}(\mu) = \varphi_{\beta_k}(\mu)$ (k=1,2)

Buradan ve (2.14),(2.15) den

$$(C_1^{+} - C_1^{-})\varphi_{\alpha_1}(\mu) + (C_2^{+} - C_2^{-})\varphi_{\alpha_2}(\mu) + \int_{0}^{1}[A^{+}(\alpha) - A^{-}(\alpha)]\varphi_{\alpha}(\mu)d\alpha = 0$$

buluruz. $\varphi_{\alpha_k}(\mu)$, (k = 1 , 2) ve $\varphi_{\alpha}(\mu)$, $(\alpha \in [-1, 1])$ öz fonksiyonları tam olduğundan son eşitlikten

$$C_1^{+} = C_1^{-} = C_1 \ , \ C_2^{+} = C_2^{-} = C_2 \ , \ A^{+}(\alpha) = A^{-}(\alpha) = A(\alpha)$$

yı elde ederiz. Buradan ve (2.11) den

$$\psi_{+}(x,\mu) = \sum_{k=1}^{2} C_k \varphi_{\alpha_k}(\mu) e^{-(x-x_0)/\alpha_k} + \int_{0}^{1} A(\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu) e^{-(x-x_0)/\alpha} d\alpha \quad , \ x \geq x_0 \qquad (2.16)$$

$$\psi_{+}(x,\mu) = \sum_{k=1}^{2} C_k \varphi_{\alpha_k}(\mu) e^{-(x-x_0)/\beta_k} + \int_{-1}^{0} A(-\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu) e^{-(x-x_0)/\alpha} d\alpha \ , \ x \geq x_0$$

yı buluruz. Kolayca görebiliriz ki,

$$\int_{-1}^{0} A(-\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu)\frac{d\alpha}{\alpha} = -\int_{-1}^{0} A(\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

dır. Bunu ve (2.12) yi göz önüne alırsak ve (2.16) ifadesini (2.4) eşitliğinde yazarsak,

$$C_1\left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\alpha_1}\right)\varphi_{\alpha_1}(\mu) + C_2\left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\alpha_2}\right)\varphi_{\alpha_2}(\mu) - 2\int_{0}^{1} A(\alpha)\varphi_{\alpha}(\mu)\frac{d\alpha}{\alpha} = -QT_0\frac{1}{\mu} \qquad (2.17)$$

yü elde ederiz.

$\varphi_{\alpha_1}(\mu), \varphi_{\alpha_2}(\mu), \varphi_{\alpha_1}(\mu), (\alpha \in [-1, 1])$ fonksiyonları [-1 , 1] aralığında μ çekimi ile ortogonaldirler [1 , 2]. Yani,

$$\int_{-1}^{1} \mu\varphi_{\alpha_k}(\mu)\varphi_{\alpha_i}(\mu)d\mu = N_k\delta_{k_i} \quad , \ k,i=1,2,\ldots$$

$$\int_{-1}^{1} \mu\varphi_{\alpha}(\mu)\varphi_{\beta}(\mu)d\mu = N_{\alpha}\delta_{(\alpha-\beta)} \quad , \quad \alpha,\beta \in [-1\,,1]$$

Burada N_k (k=1,2) , N_α $\alpha,\beta \in [-1\,,1]$ norm bağlama katsayılarıdır. Bunun için (2.17) den

$$C_1 = \frac{QT_0}{2} N_1^0 \sqrt{\frac{\vartheta_0}{2}}, C_2 = \frac{QT_0}{2} N_2^0 \sqrt{\frac{\vartheta_0}{2}}, A(\alpha) = \frac{\alpha QT_0}{2N_\alpha} \tag{2.18}$$

yı elde ederiz. Burada,

$$N_1^0 = \frac{1+i}{N_1}, N_2^0 = \frac{1-i}{N_2}, N_k = \int_{-1}^{1} \mu\left[\varphi_{\alpha_k}(\mu)\right]^2 d\mu, \tag{2.19}$$

$$N_\alpha = \int_{-1}^{1} \mu\left[\varphi_{\alpha_k}(\mu)\right]^2 d\mu \quad , \quad (\text{k=1,2 ; } \mu \in [-1,1] \text{ ,}$$

ϑ_0 ise α_k ve β_k için $\alpha_1^2 = i, \vartheta_0 = \beta_1^2, \alpha_2^2 = -i, \vartheta_0 = \beta_2^2$ eşitliklerini sağlıyor. Çünkü burada λT_0>1 kabul edilmiştir (tahmin edilmiştir). Bu durumda (2.13) denkleminin sadece sanal kökleri vardır [2, 3, 4]. Kabul edelim ki,

$$\frac{QT_0}{2} = \tilde{Q}, N_k^0 \sqrt{\frac{\vartheta_0}{2}} = \tilde{N}_k \text{, (k=1,2)}$$

dir. O zaman (2.18) ifadelerini (2.16) da yerine yazarsak

$$\psi(x,\mu) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{2} Q\tilde{N}_k \varphi_{\alpha_k}(\mu) e^{-(x-x_0)/\alpha_k} + \int_0^1 \frac{\alpha}{N_\alpha}\varphi_\alpha(\mu) e^{-(x-x_o)/\alpha} d\alpha, x \ge x_0 \\ \sum_{k=1}^{2} Q\tilde{N}_k \varphi_{\alpha_k}(\mu) e^{-(x-x_0)/\beta_k} + \int_{-1}^0 \frac{-\alpha}{N_\alpha}\varphi_\alpha(\mu) e^{-(x-x_o)/\alpha} d\alpha, x \le x_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

elde ederiz. Şimdi (2.20) nin yardımı ile sonsuz çevrede aerosol sübstansının madde miktarını hesaplayabiliriz.

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,\mu)dxd\mu = \frac{4Q}{\lambda}\left(\frac{\lambda T_0 \vartheta_0^2}{1+\vartheta_0^2} - 1 + QT_0 \int_0^1 \frac{\alpha^2}{N_\alpha} d\alpha \right. \tag{2.21}$$

dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 2. Eğer difüzyon katsayısı $D(\mu) = \mu / T_0$ ve $\lambda T_0 > 1$ ise ve taşımanın denkleminin tüm spektrlerine (kesikli ve sürekli) öz fonksiyonlarını göz önüne alırsak (2.1) denkleminin çözümü (2.20) şeklindedir. Bu çözüm x = x_0 noktasından her iki tarafa simetrik ve üstel formu boyunca azaliyor. Aeorosol sübstansının sonsuz çevredeki madde miktarı (2.21) formülü ile belirtilir.

3. Difüzyon katsayısı üstel fonksiyon olduğu taktirde (2.1) denklemini çözme:

Şimdi kabul edelim ki,

$$D(\mu) = (1/T_0)e^{-k\mu}, \ (k>0) \tag{3.1}$$

dır. O zaman (2.7) nin yerine

$$\varphi_\alpha(\mu) = \frac{\lambda T_0}{2}\alpha^2\left[\alpha^2 - e^{-k\mu}\right]^{-1} \tag{3.2}$$

i ve (2.13) denkleminin yerine de

$$\wedge(\alpha) \equiv 1 - \lambda T_0 - \frac{\lambda T_0}{2} K \ln\frac{\alpha^2 - e^{-k}}{\alpha^2 - e^{k}} = 0 \tag{3.3}$$

elde ederiz. (3.3) denklemi λT_0<1 halinde iki reel köke $(\alpha_1 > 0 \ , \ \alpha_2 > -\alpha_1)$, λT_0>1 olduğunda ise iki sanal köke $(\beta_1, \beta_2 = -\beta_1)$ sahiptir.

Buradan ve (3.2) fonksiyonu α ya göre çift olduğundan

$$\varphi_{\alpha_1}(\mu) = \varphi_{\alpha_2}(\mu) \text{ ve } \varphi_{\beta_1}(\mu) = \varphi_{\beta_2}(\mu)$$

kesikli spektre karşı öz fonksiyonları elde ederiz.

Yukarıdaki düşüncelerle λT_0>1 halinde (2.1) veya (2.2) denkleminin ve (2.3),(2.5) şartlarını sağlayan çözümü;

$$\begin{cases} \psi_+(x,\mu) = C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha_1} + \int\limits_0^1 A(\alpha)\varphi_\alpha(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha}d\alpha, x \ge x_0 \\ \psi_-(x,\mu) = C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha_k} + \int\limits_{-1}^0 A(-\alpha)\varphi_\alpha(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha}d\alpha, x \le x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada C_1 bilinmeyen sabit, A(α),($\alpha \in [-1, 1]$) bilinmeyen fonksiyondur.

Şimdi D(μ), (3.1) formülü ile tanımlandığı halde (3.4) ifadelerini (2.4) eşitliğinde kullanırsak,

$$C_1\varphi_{\alpha_1}(\mu)/\alpha_1 + \int_0^1 A(\alpha)\varphi_\alpha(\mu)\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{T_0 Q}{2}e^{k\mu}$$

yü buluruz.Eğer (2.19) eşitliklerinden faydalanırsak,

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{T_0 Q\alpha_1}{2N_1}\displaystyle\int_{-1}^{1}\mu e^{k\mu}\varphi_{\alpha_1}(\mu)d\mu \\ A(\alpha) = \dfrac{T_0 Q\alpha_1}{2N_1}\displaystyle\int_{-1}^{1}\mu e^{k\mu}\varphi_\alpha(\mu)d\mu, \alpha \in [-1,1] \end{cases} \quad (3.5)$$

(3.4) çözümünün katsayılarını buluruz. Eğer $\lambda T_0 > 1$ ise problemimizin kesikli öz değerleri sadece sanal sayılardır $(\beta_1, \beta_2,\ \beta_2 = -\beta_1)$. Bunun için (2.1)-(2.5) probleminin çözümü sadece aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\psi(x,\mu) = \begin{cases} \psi_+(x,\mu) = \displaystyle\int_0^1 A(\alpha)\varphi_\alpha(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha}d\alpha, x \geq x_0 \\ \psi_-(x,\mu) = \displaystyle\int_{-1}^0 A(-\alpha)\varphi_\alpha(\mu)e^{-(x-x_0)/\alpha}d\alpha, x \leq x_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Burada $A(\alpha)$ (3.5) formüllerinin ikincisi ile tanımlanıyor. Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3. Eğer difüzyon katsayısı $D(\mu)$ (3.1) ifadesi ile verilmiş ise (2.1) difüzyon denkleminin $x = x_0$ noktasından iki tarafa simetrik ve üstel formu boyunca azalan çözümü $\lambda T_0 < 1$ halinde (3.4)-(3.5) formülleri ile $\lambda T_0 > 1$ olduğu taktirde ise (3.6) formülleri belirtilir.

Bu çalışmada difüzyon katsayısı $D(\mu) = \mu^2 / T_0$ olduğu halde difüzyon denklemi incelenmiştir. Bu metodu kullanarak difüzyon denklemini bir çok $D(\mu)$ için inceleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. RAFATOV Ramiz, **Parçacıkları Taşıma ve Difüzyon İşlerindeki optimal Yönetimin dinamik Programlaması**. // Kırgızistan – Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, Sayı 3, Bişkek, 2002, S.108 -140.
2. EGOROV A.İ., RAFATOV R.R., '**Termik ve difüzyon işleri optimizasyonunun matematiksel metotları**' Frunze, Kırgızistan, 1990.
3. KEYZ K., TSVAYFEL '**Taşımanın Lineer Teorisi**' , M. Mir, 1972.
4. LÜSTERNİK L. A., SOBOLEV V.I., '**Fonksiyonel Analizin Elemanları**' , M.1965.