PARÇACIKLARI TAŞMA İŞERİNDE KONTROL EDEBİLME PROBLEMİNİN BİR ÇÖZÜMÜ

Doç. Dr. Vedat ASİL
Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE
Dr. Mustafa AYDOĞDU
Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü-Elazığ/TÜRKİYE

1. GİRİŞ

Nükleer reaktör düzgün geometrik G = {-a ≤ x ≤ a} yapılışına sahip olsun, t ≤ 0 olduğu taktirde reaktörde zamandan bağımsız hareket olur. Bu hareketin denklemi,

$$\mu \frac{\partial \psi_0(x,\mu)}{\partial x} + \psi_0(x,\mu) = \sum_{i=0}^{N} S_i \int_{-1}^{1} \psi_0(x,\nu)\,d\nu \tag{1.1}$$

ve sınır şartları

$$\psi_0(a,\ \mu) = 0, \quad -1 \le \mu < 0; \quad \psi_0(-a,\ \mu) = 0, \quad 0 \le \mu < 1 \tag{1.2}$$

ile tanımlanır [1, 2].

Kabul edelim ki, t = 0 anında reaktörün aktif bölgesine kontrol çubukları yerleştirilsin [1, 2]. O zaman nötronların kritik çoğalma katsayısı K_{k_r} değişir, artma olur (fazla reaktiflik) ve reaktörde zamana bağlı hareket başlar. Bu hareket -a ≤ x ≤ a, -1 ≤ μ ≤ 1, 0 ≤ t ≤ T bölgesinde zamana bağlı lineer integro - diferansiyel denklemi,

$$\frac{\partial \psi(x,\mu,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi(x,\mu,t)}{\partial x} + \psi(x,\mu,t) = F(x,\mu,t,u) + S_0 \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu',t)\,d\mu' +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i S_i \int_{a}^{\infty} e^{-\lambda_i \tau} d\tau \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu',t-\tau)\,d\mu' \tag{1.3}$$

sınır şartları;

$$\psi(a,\ \mu,\ t) = 0, \quad -1 \le \mu < 0; \quad \psi(-a,\ \mu,\ t) = 0, \quad 0 < \mu \le 1 \tag{1.4}$$

ve başlangıç şartı,

$$\psi(x,\ \mu,\ t)\big|_{t \le 0} = \psi(x,\ \mu,\ 0) = \psi_0(x,\ \mu) \tag{1.5}$$

ile tanımlanır [1, 2].

Burada $\psi_0(x,\mu)$, (1.1) ve (1.2) denklemlerinin bir çözümüdür. Yani, (1.1), (1.2) zamandan bağımsız homojen sınır problemnin (x, μ) noktasındaki nötronların yoğunluğunu belirten çözümdür. ψ (x , μ , t) nötronların (x , μ) noktasında ve t anındaki yoğunluğudur, S_i , i-inci takım gecikme nötronlarının miktarları ile birlikte nükleer reaksiyonların yoğunluğu, λ_i^{-1}, i-inci takım gecikme nötronlarının yaşama süresi, F (x , μ , t , u), (x , μ) noktasında t anındaki nötron kaynaklarının yoğunluğudur. Buradaki u = u (t) fazla reaktifliğe göre bağımlıdır.

Burada kolayca görülüyor ki, $t \leq 0$ olduğu zaman u (t) = 0 , ψ (x, μ, t) = ψ_O (x μ) ve

F = (x, μ, t, 0) = 0 dır. O halde (1.3) denklemi (1.1)'e denktir. Böylece (1.4) sınır şartları (1.2) sınır şartlarına dönüşür.

Burada kabul edilen kontrol fonksiyonları $u(t) \in U \subset L^2$ [0 , T] dir. (1.3) ve (1.5) sistemi için kontrol edebilme problemi en genel halde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Problem 1.1. Kabul edelim ki, ψ_1 (x, μ), nötronların zamandan bağımsız yoğunluğu ve ψ_O (x,μ) den farklı, ayrıca (1.1) denklemini ve (1.2) sınır şartını sağlasın.

Öyle bir $u(t) \in U \subset L^2$ [0 , T] kontrol fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, bu fonksiyona karşılık, (1.3) - (1.5) probleminin çözümü aşağıdaki son şartı sağlasın,

$$\psi(x, \mu, T) = \psi_1(x, \mu) \tag{1.6}$$

Ayrıca T- anından itibaren meydana gelen ψ_1(x , μ) dağılımı u (t) = 0 olduğu zaman her t > T için sabit kalsın.

2. Zamandan Bağımsız Homojen Taşıma Probleminin Çözümü :

(1.1) denklemini

$$\mu \frac{\partial \psi_0(x,\mu)}{\partial x} + \psi_0(x,\mu) = \frac{\sigma}{2}\int_{-1}^{1} \psi_0(x,\mu')d\mu' \tag{2.1}$$

şeklinde yazalım. [3] de gösterilmiştir ki, $\sigma = \sum_{i=0}^{N} S_i < 1$ halinde (2.1) ve (1.2) denklemlerinin aşikar olmayan çözümü yoktur.

Bundan dolayı σ >1 halini inceleyeceğiz ve [1, 2] in sonuçlarından faydalanacağız.

Dolayısıyla,

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} \psi_0(x,\mu)\psi_1(x,\mu)d\mu dx \neq 0 \text{ dir ve}$$

$$\psi_0(x,\mu) = C_0\varphi_0(x,\mu), \psi_1(x,\mu) = C_1\varphi_0(x,\mu)$$

dir. Burada C_O , C_1 > 0 sabitleri;

$$\varphi_0(x,\mu) = e^{\frac{x}{\alpha_1}}\varphi_{\alpha_1}(\mu) + e^{\frac{x}{\alpha_2}}\varphi_{\alpha_2}(\mu) + \int_{-1}^{1} A(\alpha) e^{\frac{-x}{\alpha}}\varphi_\alpha(\mu)d\alpha \tag{2.2}$$

dır.

$$\varphi_{\alpha_k}(\mu) = \frac{\sigma}{2}.\frac{\alpha_k}{\alpha_k - \mu}, k = 1,2, \alpha_k \notin [-1,1] \tag{2.3}$$

$$\varphi_\alpha(\mu) = \frac{\sigma}{2} P\frac{\alpha}{\alpha - \mu} + \lambda(\alpha)\delta(\alpha - \mu) \tag{2.4}$$

Burada δ - Dirak fonksiyonu, P, Cauchy anlamında fonksiyonun esas değeridir.

$$\lambda(\alpha) = 1 - \frac{\sigma}{2} P\int_{-1}^{1} \frac{\alpha}{\alpha - \mu} d\mu$$

α_k , k = 1 , 2 için aşağıdaki denklemin

$$\wedge(\alpha) = 1 - \frac{\sigma}{2}\alpha \ln\left|\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}\right| = 1 - \sigma\alpha Arcth(\frac{1}{\alpha}) = 0$$

farklı çözümleridir. Yani homojen (2.1) ve (1.2) sınır probleminin farklı özdeğerleridir. Bunlara karşılık gelen farklı öz fonksiyonlar da (2.3) formülleri ile verilmiştir. $\alpha \in [-1, 1]$ ise (2.1) ve (1.2) problemin sürekli özdeğer spektridir. Bunlara karşılık gelen öz fonksiyonlarda (2.4) formülü ile verilmiştir.

(2.3) ve (2.4) fonksiyonları [-1 , 1] aralığında μ çekimi ile ortogonaldırlar;

$$\int_{-1}^{1} \mu\varphi_{\alpha_k}(\mu)\varphi_{\alpha_j}(\mu)d\mu = N_k\delta_{jk}, j,k = 1,2$$

$$\int_{-1}^{1} \mu\varphi_\alpha(\mu)\varphi_\beta(\mu)d\mu = N_\alpha\delta(\alpha - \beta) \quad \text{dir.}$$

Burada N_k (k = 1, 2), N_α ($\alpha \in [-1, 1]$) norm bağlama katsayılarıdır [1, 2].

Bu denklemler reaktörü kritik yapılışa dönüştüren "σ ve α " değerleri ile belirtilir [1, 2]. Eğer nötron kaynaklarının yoğunluğu F (x, μ, t, u)

$$F(x,\mu,t,u) = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{-x}{\alpha}\right)\varphi_\alpha(\mu)F_\alpha(t,u)d\alpha + \sum_{k=1}^{2} \exp\left(\frac{-x}{\alpha_k}\right)\varphi_{\alpha_k}(\mu)F_{\alpha_k}(t,u) \tag{2.5}$$

ise (1.3) ve (1.6) probleminin çözümü [1 ,2]'de benzer şekilde ispatlanmıştır. Burada $F_\alpha(t,u)$, $\alpha \in F_{\alpha_k}(t,u)$, (k = 1, 2) belirli fonksiyonlardır.

$\alpha_{1,2} = \pm\alpha_0, = \langle i\beta, \beta\rangle = 0, i = \sqrt{-1}$ olduğu zaman

$$\Psi(x,\mu,t) = \int_{-1}^{1} \exp\left(\frac{-x}{\alpha}\right)\varphi_\alpha(\mu)\psi_\alpha(t)d\alpha + \sum_{k=1}^{2}\exp\left(\frac{-x}{\alpha_k}\right)\varphi_{\alpha_k}(\mu)\psi_{\alpha_k}(t)$$

olur. Burada $\varphi_{\alpha_k}(\mu), (k = 1,2), \varphi_\alpha(\mu), (\mu, \alpha \in [-1\,,1])$ (2.3) ve (2.4) formülleri ile belirtilirler. $\psi_{\alpha_k}(t)$, (k = 1, 2), $\psi_\alpha(t)$, ($\alpha \in$ [-1, 1]) halen bilinmeyen fonksiyonlardır.

3. Nötron Kaynaklar Yoğunluğunun Basit Halde Kontrol Edebilme Probleminin Çözümü:

Kabul edelim ki (2.5) fonksiyonun katsayıları,

$$F_\alpha(t,u) = F_\alpha.u(t), F_{\alpha_1}(t,u) = F_{\alpha_2}(t,u) = F_{0+}u(t)$$

şeklinde olsun. Problem 1 in aşağıdaki moment eşitliklerine dönüştüğünü göstermek istiyoruz.

$$\int_0^T W_{0+}(T-t)u(t)dt = \eta_{0+} = \frac{g_{0+}}{F_{0+}} \tag{3.1}$$

$$\int_0^T W_\alpha(T-t)u(t)dt = \eta_\alpha = \frac{g_\alpha}{F_\alpha}$$

Burada $g_{0+} \neq 0$ belirli miktar, $F_\alpha \neq 0$ belirli fonksiyondur.

$$g_{0+} = \widetilde{C} - q_{0+}(t), g_\alpha = \widetilde{C}A(\alpha) - q_\alpha(T), (\alpha \in [-1\,,1])$$

$$q_{0+}(T) = W_{0+}(T) + \sum_{i=1}^{N} m_j^+ \int_0^T W_{0+}(T-\tau)e^{-\lambda_j\tau}d\tau,$$

$$q_\alpha(T) = A(\alpha)\left[W_\alpha(T) - \sum_{i=1}^{N} m_j \int_0^T W_\alpha(T-\tau)e^{-\lambda_j\tau}d\tau\right], \alpha \in [-1\,,1]$$

Burada, $\widetilde{C} = \dfrac{C_1}{C_0}$ sabit, $W_{\alpha +}(T) = \sum_{k=0}^{N} \sigma_k^+ e^{p_k^+ t}$, $W_\alpha(T) = \sum_{k=0}^{N} \sigma_k e^{p_k t}$, ve

m_j^+, σ_k^+, p_k^+ belirli sabitlerdir. m_j, σ_k, p_k α dan bağımsız belirli fonksiyonlardır.

Böylece problemimiz aşağıdaki probleme dönüşür.

Problem 3.1. Öyle bir u(t) ∈ U ⊂ L^2 [0 , T] kontrol fonksiyonu bulmak istiyoruz ki, (3.1) moment eşitliklerini sağlasın,

Bu problemi çözmek için L^2 [0 , T] uzayında L_α lineer cümlesi seçelim. Öyle ki bu cümlenin elemanları

$$u(t) = C_{0+} W_{0+}(T-t) + \int_{-1}^{1} C_\alpha W_\alpha (T-t) dt \tag{3.2}$$

şeklinde olsunlar. Burada $C_{0+}, C_\alpha (\alpha \in [-1\,,1])$,

$$\int_0^T u^2(t)dt = C_{0+}^2 \gamma_{0+} + 2C_{0+} \int_{-1}^{1} \gamma_{\alpha_{o+}} C_\alpha + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \gamma_{\alpha\alpha'} C_\alpha C_{\alpha'} d\alpha d\alpha' < \infty$$

eşitsizliğini sağlamak zorundadır. Buradaki

$$\gamma_{0+} = \int_0^T W_{0+}^2(t)dt, \alpha_{0+} = \int_0^T W_{0+}(t) W_\alpha(t)dt$$

ve

$$\gamma_{\alpha\alpha'} = \int_0^T W_\alpha(t) W_{\alpha'}(t)dt \tag{3.3}$$

dır. L_α lineer cümlesi L^2 [0,T] uzayı tarafından kapsansın. O zaman meydana gelen uzayı $H_\alpha \subset L^2$[0,T] ile gösterelim.

Dolayısıyla H_α uzayının elemanları L_α nın (3.2.) şeklindeki elemanlarıdır. Ayrıca her $\widetilde{U} \in L^2[0,T]$ için $d(\widetilde{U}, U_n) \to 0$ şartını sağlayan $\widetilde{U}$ da H_α nın elemanıdır. Burada $\{U_n\} \in L_\alpha$, L^2[0,T] uzayında L_α lineer cümlesinin keyfi bir dizisidir.

$H_\alpha \subset L^2$ [0, T] fakat $H_\alpha \not\in L^2$ [0, T] dir [3 ,4].

Dolayısıyla öyle bir g (t) ∈ L^2 [0, T] vardır ki,

$$\int_0^T g(t) W_{0+}(T-t)dt = \int_0^T g(t) W_\alpha(T-t)dt = 0, \alpha \in [-1,1]$$

onun için her u (t) ∈ L_α için,

$$\int_0^T g(t)u(t)dt = 0 \tag{3.4}$$

dir. Buradan u (t) ∈ H_α dir.

Fonksiyonel analizin bir teoreminin sonucu gereğince [4] her u (t) ∈ L^2 [0, T] için tek anlamda

$$u(t) = u_0(t) + g(t) \tag{3.5}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada da $u_0(t) \in$ H_α dır. g (t) ise $u_0(t)$'ye ortogonaldır ve (3.4)'u sağlar.

Kabul edelim $u_0(t)$ (3.2) ifadesi ile tanımlanmış olsun. O zaman (3.5) ifadesini (3.1)'de yerine yazarsak

$$\int_0^T W_{0+}(T-t)u(t)dt = \int_0^T W_{0+}(T-t)u_0(t)dt,$$

$$\int_0^T W_\alpha(T-t)u(t)dt = \int_0^T W_\alpha(T-t)u_0(t)dt$$

elde ederiz. Yani (3.5) de ki g (t) (3.1) denklemlerinin sol tarafına etki etmiyor. Dolayısıyla incelenen momentler problemin çözümü varsa, bu çözüm H_α ya aittir.

Şimdi (3.2) ifadesini (3.1) sisteminde yerlerine koyarsak aşağıdaki,

$$\gamma_{0+}C_{0+} + \int_{-1}^{1} \gamma_{\alpha_{0+}} C_\alpha d\alpha = \eta_{0+} \tag{3.6}$$

$$\gamma_{\alpha_{0+}}C_{0+} + \int_0^T \gamma_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'} d\alpha' = \eta_\alpha , \alpha \in [-1, 1]$$

sistemini elde ederiz. Burada γ_{0+}, $\gamma_{\alpha 0+}$ (3.3) formülleri ile tanımlanan belirli integrallerdir.

$$C = \{C_{0+}, C_\alpha\}, \eta = \{\eta_{0+}, \eta_\alpha\}, \alpha \in [-1, 1] \tag{3.7}$$

özel vektörlerini ve

$$\Gamma(.) = \begin{bmatrix} \gamma_{0+} & \int_{-1}^{1} \gamma_{\alpha_{0+}}(.)d\alpha \\ \gamma_{\alpha_{0+}} & \int_{-1}^{1} \gamma_{\alpha\alpha'}(.)d\alpha' \end{bmatrix}$$

matris oparatörü olarak alalım. O zaman (3.2) veya (3.6) sistemi tek matris operatör denklemi olarak,

$$\Gamma C = \eta \tag{3.8}$$

şeklinde yazabiliz. Şimdi (3.7) şeklinde olan ve

$$\left|C_{0+}\right|^2 + \int_{-1}^{1} \left|C_{0+}\right|^2 d\alpha < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan elemanlardan oluşan $L_+^2[-1\,,1]$ Hilbert uzayını inceleyelim. $L_+^2[-1\,,1]$ de skalar çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsunlar.

$$\langle C,\eta\rangle = C_{0+}\eta_0 + \int_{-1}^{1} C_\alpha \eta_\alpha$$

$$\left\|C\right\|^2 = \left|C_{0+}\right|^2 + \int_{-1}^{1} \left|C_\alpha\right|^2 d\alpha$$

gösterilir ki,

$\Gamma :\ L_+^2[-1\,,1] \rightarrow L_+^2[-1\,,1]$

dönüşümü simetrik ve pozitif tanımlıdır. Yani her $0 \neq C \in L_+^2[-1\,,1]$ için $\langle \Gamma C, C\rangle \geq 0$ ve burada eşitlik sadece C = 0 $\in L_+^2[-1\,,1]$ olduğu zaman sağlanır. Bundan dolayı (3.8) operatör denklemini çözmek için varyans metotlarını uygulayacağız.

Sonuçta aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.: Eğer (3.1) veya (3.8)'de $\eta = \{\eta_{0+}, \eta_\alpha\},\ \alpha \in [-1\,,1],\ L_+^2[-1\,,1]$ uzayına ait ise, o zaman (3.7) momentler problemi,

$$u(t) = C_{0+}W_{0+}(T-t) + \int_{-1}^{1} C_\alpha W_\alpha (T-t) d\alpha$$

fonksiyonunun bulunması problemine dönüşür. Burada $C = \{C_{0+}, C_\alpha\},\ \alpha \in [-1\,,1],\ L_+^2[-1\,,1]$ uzayının elemanıdır ve aşağıdaki fonksiyoneli minimum yapar.

$D(C) = \langle \Gamma C, C\rangle - 2\langle \eta, C\rangle$

Böyle bir elemanın mevcut olması için gerek ve yeter şart

$\left|\langle \eta, C\rangle\right| \leq M\sqrt{\langle \Gamma C, C\rangle}$

eşitliğini sağlayan M > 0 sabitinin mevcut olmasıdır.

KAYNAKLAR

1. Ramiz RAFATOV, **Parçacıkları Taşıma ve Difüzyon İşlerindeki optimal Yönetimin dinamik Programlaması**. // Kırgızistan – Türkiye Manas Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi, Sayı 3, Bişkek, 2002, S.108 -140.
2. EGOROV, A.İ., RAFATOV, R.R., "**Termik ve Difüzyon İşleri Optimizasyonunun Matematiksel Metotları**", Frunze, Kırgızistan, 1990.
3. KEYZ, K., TSVAYFEL, P., "**Taşınmanın Lineer Teorisi**", M. Mir, 1972.
4. LÜSTERNİK, L.A., SOBOLEV, V.İ., "**Fonksiyonel Analizin Elemanları**", M. 1965.