УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ СИЛОЙ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

Доц., док. З. ИМАНАЛИЕВ
Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Рассмотрим следующую проблему оптимального управления:
требуется найти управление $u = u_\beta^\circ(t,\mu)$ $\quad (u_\beta^\circ \in R^1)$ переводящее систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1(t)x + A_2(t)z + B_1(t)u, \\ \mu\dot{z} &= A_3(t)x + A_4(t)z + B_2(t)u \end{aligned} \tag{1}$$

из начального состояния

$$x(t_0) = x^0, \quad z(t_0) = z^0 \tag{2}$$

в конечное состояние

$$x(t_1) = x^1, \quad z(t_1) = z^1 \tag{3}$$

при условии, что норма

$$\|u\|_{L_\infty} = \max_{t_0 \le t \le t_1} |u(t,\mu)| \tag{4}$$

достигла минимального значения.

Здесь $x \in R^n$, $z \in R^m$, $u \in R^1$, μ – *малый параметр.*

Аналогичная задача рассматривалась в [1,3] для линейной системы, которая не содержит малый параметр, характеризующее возмущение, что может привести к существенному качественному изменению состояния системы.

Предположим, что для задачи (1)-(4) выполнены следующие условия:

1^o. Матрицы $A_i(t)$ $(i = \overline{1,4})$, B_j $(j = \overline{1,2})$ - равномерно ограничены и равномерно непрерывны вместе со своими производными при $t \in [t_0, t_1]$; матрица $A_4(t)$ не вырождена, т.е. существует $A_4^{-1}(t)$.

2^o. Векторы $L_1(t), L_2(t), ..., L_n(t)$ линейно независимы, по крайней мере, при одном $t^* \in (t_0, t_1)$, т.е. $\sum_{i=1}^n \nu_i l_i(t^*) \neq 0$ при $\sum_{i=1}^n \nu_i^2 \neq 0$,

где

$$L_1(t) = B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t),$$

$$L_k(t) = A_0(t)L_{k-1} - \frac{dL_{k-1}}{dt}, \quad A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad k = 2,3,...,n;$$

3^o. В точке $t = t_1$

$$rank\{B_2(t_1), A_4(t_1)B_2(t_1),..., A_4^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m; \tag{5}$$

4^o. Корни $\lambda_i(t)$ характеристического уравнения матрицы $A_4(t)$ подчиняются неравенству $\mathrm{Re}\lambda_i(t) \le -\gamma < 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad t \in [t_0, t_1]);$ (6)

В случае, когда $A_i \quad (i = \overline{1,4}) \quad и \quad B_j\,(j = 1,2)$ – постоянные матрицы, вместо условия -$1^o, 2^o$ примем следующие требования:

5^o. $$rank\{B_0, A_0B_0,..., A_0^{n-1}B_0\} = n, \tag{7}$$

6^o. $$rank\{B_2, A_4B_2,..., A_4^{m-1}B_2\} = m. \tag{8}$$

При выполнении условия $1^o, 4^o$ в системе (1) можно произвести полное разделение движений. После несложных преобразований из (1)-(3) получаем [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}_1(t,\mu)\tilde{x} + \tilde{B}_1(t,\mu)u, \\ \mu\dot{\tilde{z}} &= \tilde{A}_4(t,\mu)\tilde{z} + \tilde{B}_2(t,\mu)u, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}^0, \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}^0, \tag{10}$$

$$\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}^1, \quad \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}^1, \tag{11}$$

где $\tilde{A}_1(t,\mu) = A_1(t) - A_2(t)H(t,\mu), \quad \tilde{A}_4(t,\mu) = A_4(t) - \mu H(t,\mu)A_2(t),$

$$\tilde{B}_1(t,\mu) = B_1(t) + N(t,\mu)\tilde{B}_2(t), \quad \tilde{B}_2(t,\mu) = B_2H - \mu H(t,\mu)B_1(t),$$

$$\tilde{x} = x + \mu N(t,\mu)\tilde{z}, \qquad \tilde{z} = z - H(t,\mu)x$$

$$\tilde{x}^\nu = x^\nu + \mu N(t_\nu,\mu)\tilde{z}^\nu, \qquad \tilde{z}^\nu = z^\nu - H(t_\nu,\mu)x^\nu, \quad \nu = 0,1...;$$

матрицы $N(t,\mu)$ и $H(t,\mu)$ являются решениями уравнений

$$\mu\dot{N} - \mu\tilde{A}_1N = -A_2 - N\tilde{A}_4, \tag{12}$$

$$\mu\dot{H} + \mu H\tilde{A}_1 = A_3 + A_4H \tag{13}$$

Элементы матриц N, H регулярно зависят от параметра. Матрицы N и H из (12), (13) определяются однозначно, в силу чего вместо задачи (1)-(4) можно рассмотреть задачу (9)-(11), (4). Эта задача легко сводится к проблеме моментов [1,3]: найти

$$\rho_\beta^0 = \min_{p,q}\int_{t_0}^{t_1}\left|\tilde{B}_1'(\sigma,\mu)\Phi'(t,\sigma,\mu)p + \tilde{B}_2'(\sigma,\mu)\Psi(t,\sigma,\mu)q\right|d\sigma, \tag{14}$$

при условии $$C_1' p + \mu C_2' q = 1, \qquad (15)$$

где $\Phi(t,s,\mu)$ *и* $\Psi(t,s,\mu)$ $(t_0 \le t \le t_1)-$ нормированные в точке $s \in [t_0, t_1]$ фундаментальные матрицы однородных систем $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}_1 x,\ \ \mu\dot{\tilde{z}} = A_4 \tilde{z}$ соответственно;

$$C_1 = \tilde{x}^1 - \Phi(t_1, t_0, \mu)\tilde{x}^0, \qquad C_2 = \tilde{z}^1 - \Psi(t_1.t_0, \mu)\tilde{z}^0. \qquad (15a)$$

Для матрицы $\Psi(t,s,\mu)$ выполняется условие [4]

$$\|\Psi(t,s,\mu)\| \le C\exp(-\gamma_1(t-s)/\mu)$$

для всех $t,s \in [t_0, t_1]$, $t \ge s$, *где* $C, \gamma_1 > 0 - const$.

Если будем считать, что тем или иным способом решены задачи (14),(15) и при этом найдены векторы $p = p^0$, $q = q^0$, то будет известна минимальная функция

$$h_\beta^0(t,\mu) = \tilde{B}_1'(t,\mu)\Phi'(t_1,t,\mu)p^0 + \tilde{B}_2'(t,\mu)\Psi(t_1,t,\mu)q^0 \qquad (16)$$

и число $\rho_\beta^0 > 0$.

Согласно правилу проблемы моментов [1], мы должны определить искомое оптимальное управление $u = u_\beta^0(t,\mu)$ опираясь на условие максимума

$$\int_{t_0}^{t_1} h_\beta^0(t,\mu)u_\beta^0(t,\mu)dt = \max_u \int_{t_0}^{t_1} h_\beta^0(t,\mu)u(t,\mu)dt = 1 \qquad (17)$$

при $\max\limits_{t_0 \le t \le t_1} |u(t,\mu)| = \dfrac{1}{\rho_\beta^0}$ или, иначе при $|u(t,\mu)| \le \dfrac{1}{\rho_\beta^0}$.

Максимум интеграла в (17) будет достигаться в том случае, если каждый момент времени t подынтегральная функция $h^0(t,\mu)u(t,\mu)$ будет максимальной. Таким образом, оптимальное управление $u_\beta^0(t,\mu)$ должно определяться из условия [1]:

$$h_\beta^0(t,\mu)u_\beta^0(t,\mu) = \max_u h_\beta^0(t,\mu)u(t,\mu) \qquad (18)$$

при $$|u(t,\mu)| \le \frac{1}{\rho_\beta^0} = \omega_\beta^0 \quad (t_0 \le t \le t_1). \qquad (19)$$

Так как система (1) неособенная и следовательно, функция $h_\beta^0(t,\mu)-$ неособая [1], т.е. она на заданном отрезке времени обращается в нуль лишь в конечном числе изолированных значений $t = t_j$. Тогда решение задачи (18),(19) доставляется выражением:

$$u_\beta^0(t,\mu) = \omega_\beta^0 sign(\tilde{B}_1'(t,\mu)\Phi'(t_1,t,\mu)p^0 + \tilde{B}_2'(t,\mu)\Psi(t_1,t,\mu)q^0 \qquad (20)$$
$$(t_0 \le t \le t_1).$$

Функция $u_\beta^0(t,\mu)$ определена всюду, кроме конечного числа изолированных значений $t = t_j$, где функция, стоящая под знаком “sign” обращается в нуль.

При $\mu = 0$ из (9)-(11) получаем:

$$\dot{\bar{x}} = A_0(t)\bar{x} + B_0(t)\bar{u} \quad , \quad \bar{x}(t_\nu) = x^\nu, \qquad \nu = 0;1...; \tag{21}$$

$$\bar{z} = -A_4(t)A_3(t)\bar{x} + B_2(t)\bar{u} \ , \tag{22}$$

где $A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3$, $\quad B_0B_1 - A_2A_4^{-1}B_2$.

Полученная система называется порождающей системой [4]. Следует заметить, что решение задачи (21), (22), (4) не может служить в качестве нулевого приближения задачи (9)-(11), (4), так как в окрестности границы интервала времени $[t_0, t_1]$ могут существовать конечные числа изолированных точек (до m единиц), где должны проходить процессы переключения управляющего воздействия. Кроме того, в этом случае, вопрос о переходе системы с одного состояния в другое для быстрой подсистемы (9) остается открытым. Поэтому в первую очередь нам необходимо указать такую систему, для которой решение оптимальной задачи является корректно определенным нулевым приближением задачи (9)-(11), (4).

В силу требований относительно $A_i(t)$ $\quad (i=\overline{1,4})$ системы (1) (см условие 1^o) решения уравнений (12)-(13) являются ограниченными и при $\mu \to 0$ будут выполняться:

$$\widetilde{A}_1(t,\mu) \to A_0(t), \quad \widetilde{A}_4(t,\mu) \to A_4(t), \quad \widetilde{B}_1(t,\mu) \to B_0(t), \quad \widetilde{B}_2(t,\mu) \to B_2(t).$$

Рассмотрим систему

$$\dot{\bar{x}} = A_0(t)\bar{x} + B_0(t)\bar{u}, \quad \bar{x}(t_\nu) = x^\nu \tag{23}$$

$$\mu\dot{\bar{z}}_* = A_4(t_1)\bar{z}_* + B_2(t_1)\bar{u}, \quad \bar{z}_*(t_\nu) = z_*^\nu \tag{24}$$

где $z_* = \bar{z} + A_4^{-1}(t_1)A_3(t_1)\bar{x}, \quad z_*^\nu = z^\nu + A_4^{-1}(t_1)A_3(t_1)x^\nu$, $\quad \nu = 0;1...$

Система (23), (24) аппроксимирует систему (9)-(11) с точностью порядка малости $O(\mu)$ и она получается из (9)-(11) при следующих приближениях:

$$H(t,\mu) \approx H_0(t) = -A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad N(t,\mu) \approx N_0(t) = -A_2(t)A_4^{-1}(t), \quad \widetilde{A}_4(t_1+\tau\mu) \approx A_4(t_1),$$
$$\widetilde{B}_2(t_1+\tau\mu) \approx B_2(t_1), \qquad -\infty < \tau \le 0.$$

Для новой системы минимальная функция примет вид:

$$h_0^0(t,\mu) = h_0^0(t,\bar{p}^0,\bar{q}^0,\mu) = B_0'(t)\overline{\Phi}'(t_1,t)\bar{p}^0 + B_2(t_1)e^{-A_4'(t_1)\frac{t-t_1}{\mu}\bar{q}^0}, \tag{25}$$

где $\overline{\Phi}(t,s)$- фундаментальная матрица однородной системы $\dot{\bar{x}} = A_0\bar{x}$; $\bar{p}^0, \bar{q}^0$ - решения экстремальной задачи: найти

$$\rho_0^0 = \min_{\bar{p},\bar{q}} \int_{t_0}^{t_1} |h_0(t,\bar{p},\bar{q},\mu)|dt \quad (26)$$

при условии

$$\overline{C}_1'\bar{p} + \mu\overline{C}_2'\bar{q} = 1, \tag{27}$$

$$\overline{C}_1 = x^1 - \overline{\Phi}(t_1,t_0)x^0, \qquad \overline{C}_2 = z_*^1 - e^{-A_4(t_1)\tau_0}z_*^{0'} = z_*' + O(e^{-\gamma\tau_0}) \approx z_*^1, \quad \tau_0 = \frac{t_0 - t_1}{\mu}. \tag{27a}$$

Оптимальное управление (20) для данного случая записывается как

$$u_0^0(t,\mu) = \omega_0^0 sign(B_0'(t)\overline{\Phi}'(t_1,t)\bar{p}^0 + B_2'(t_1)e^{-A_4'(t_1)\tau}\bar{q}^0), \quad \tau = \frac{t-t_1}{\mu}, \quad t_0 \le t \le t_1 \quad \varpi_0^0 = \frac{1}{\rho_0^0} \tag{28}$$

Управление (28) переводит систему (23), (24) из начальных состояний (x^0, z^0) в конечное состояние (x^1, z^1) и оно является релейной функцией. Минимальная функция $h_0^0(t,\mu)$ (25) могут иметь нули в окрестности точки t_0, t_1, так как она содержит функцию типа погранслоя, в силу чего управление (28) имеет полный набор точек переключений, что не всегда возможно для порождающей системы (21), (22).

Перепишем равенство (27) в форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i^{(1)}\bar{p}_i + \mu\sum_{k=1}^{m} \overline{C}_k^{(2)}\bar{q}_k = 1 \tag{29}$$

Покажем теперь один из приближенных способов определения оптимальных параметров $\bar{p}_i^0$, $\bar{q}_k^0$ $\quad (i = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,m})$

Полагая, что вектор $\overline{C}_1$ в (27) удовлетворяет условию $\overline{C}_n^{(1)} \neq 0$, из (29) получаем:

$$\bar{p}_n = \frac{1}{\overline{C}_n^{(1)}}(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \overline{C}_i^{(1)}\bar{p}_i - \mu\sum_{k=1}^{m} \overline{C}_k^{(2)}\bar{q}_k) \tag{30}$$

Составляющие функции $h_0(t,\mu) = h_0(t,\bar{p},\bar{q},\mu)$ стоящие под знаком модуля в (26) может быть представлены в виде:

$$B_0'(t)\overline{\Phi}'(t_1,t)\bar{p} = K(t,t_1)\bar{p} = \sum_{i=1}^{n} K_i(t,t_1)\bar{p}_i, \tag{31}$$

$$B_2'(t)e^{-A_4(t_1)(t=t_1)/\mu}\bar{q} = \eta(\frac{t-t_1}{\mu})\bar{q} = \sum_{k=1}^{m} \eta_k(\frac{t-t_1}{\mu})\bar{q}_k, \tag{32}$$

где $\eta(\dfrac{t-t_1}{\mu})-$ функция типа пограничного слоя, иначе говоря, для нее имеет место оценка $\|\eta\| \le C\exp(\gamma(\dfrac{t-t_1}{\mu})), \qquad C,\gamma > 0 - const$.

С учетом (30)-(32) функция $h_0(t,\mu)$ записывается в форме:

$$h_0(t,\mu)=h_0(t,\tilde{p},\bar{q},\mu)=\frac{K_n(t_1,t)}{C_n^{(1)}}+(\tilde{K}'(t,t_1)-\frac{K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}\tilde{C}_1')\tilde{p}+(\eta'(\frac{t-t_1}{\mu})-\mu\frac{K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}\tilde{C}_2')\bar{q}, \tag{33}$$

где
$$\tilde{K}'=(K_1,K_2,...,K_{n-1}), \qquad \tilde{p}'=(\bar{p}_1,\bar{p}_2,...,\bar{p}_{n-1}),$$
$$\eta'=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_m), \qquad \tilde{C}_1'=(\bar{C}_1^{(1)},\bar{C}_2^{(1)},...,\bar{C}_{n-1}^{(1)}),$$
$$C_2'=(\bar{C}_1^{(2)},\bar{C}_2^{(2)},...,\bar{C}_m^{(2)}), \qquad \bar{q}'=(\bar{q}_1,\bar{q}_2,...,\bar{q}_m),$$

В этом случае, задача (26), (27) на условный минимум сводится к проблеме безусловного минимума функции

$$\rho_0(\tilde{p},\bar{q},\mu)=\int_{t_0}^{t_1}\left|h_0(t,\tilde{p},\bar{q},\mu)\right|dt \tag{34}$$

Заметим, что для функции $h_0(t,\tilde{p},\tilde{q},\mu)$, $\rho_0(\tilde{p},q,\mu)$ при $\mu\to 0$ имеет место следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{\mu\to 0}h_0(t,\tilde{p},\bar{g},\mu)=\bar{h}_0(t,\tilde{p})$,

$$\lim_{\mu\to 0}\rho_0(\tilde{p},\bar{q},\mu)=\bar{\rho}_0(\tilde{p}), \tag{35}$$

где $\bar{h}_0(t,\tilde{p})=\dfrac{K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}+(\tilde{K}'(t,t_1)-\dfrac{K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}\tilde{C}_1')\tilde{p}$, $\rho_0(\tilde{p})=\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\left|\bar{h}_0(t,\tilde{p})\right|dt.$

Числа $\bar{p}_i=\bar{p}_i^0 \qquad (i=\overline{1,n-1}), \qquad \bar{q}_k=\bar{q}_k^0 \qquad (k=\overline{1,m})$

определяющие минимальную функцию $h_0^0(t,\bar{p}^0,\bar{q}^0,\mu)$ будет удовлетворять системы уравнений

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial\bar{p}_i}=\int_{t_0}^{t_1}(K_i(t,t_1)-\frac{K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}C_i^{(1)})sign\,h_0(t,\tilde{p},\bar{q},\mu)dt=0, \qquad i=\overline{1,n-1}; \tag{36}$$

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial\bar{q}_k}=\int_{t_0}^{t_1}(\eta_k(\frac{t-t_1}{\mu})-\frac{\mu K_n(t,t_1)}{C_n^{(1)}}C_k^{(2)})sign\,h_0(t,\tilde{p},\bar{q},\mu)dt=0, \qquad k=\overline{1,m}.$$

Как указывается в работе [1] для решения подобной задачи на условный минимум рассматривается дифференциальные уравнения относительно неизвестных параметров l_k $(k = \overline{1, M-1})$ (в данном случае $\overline{p}_i, \overline{q}_k$)

$$\frac{dl_i}{dv} = -\varepsilon \frac{\partial \rho(l_{1,} l_2, ..., l_{m-1})}{\partial l_i}, \qquad i = \overline{1, M-1}, \tag{37}$$

где $\varepsilon > 0$ –коэффициент пропорциональности, определяющий скорость "спуска".

При составлении дифференциального уравнения (37) вводится новый параметр v, который трактуется как время, отсчитываемые при движении точки $l = \{l_i\}$ вдоль "кривой спуска" от какой-то произвольно выбранной точки $\bar{l} = \{\bar{l}_i\}$ на гиперплоскости $\sum_{l=1}^{M} C_i l_i = 1$ к искомой точке $l^0 = \{l_i^0\}$, численное интегрирование осуществляется с помощью рекуррентного соотношения:

$$l_i^{(j+1)} = l_i^{(j)} - \varepsilon [\frac{\partial \rho(l_1, l_2, ..., l_{M-1})}{\partial l_i}]_{l=l^{(j)}} \Delta v \,. \tag{38}$$

Из второго уравнения (36) заметим, что производные $\frac{\partial \rho}{\partial \overline{q}_k}$ $(k = \overline{1, m})$ определяются быстрыми составляющими функции $h_0(t, \widetilde{p}, q, \mu)$.

Тогда в данном случае, будем рассматривать следующие сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения относительно $\overline{p}_i$, $\overline{q}_k$ $(i = \overline{1, n-1}; \quad k = \overline{1, m})$

$$\frac{d\overline{p}_i}{dv} = -\varepsilon \frac{\partial \rho_0}{\partial \overline{p}_i}, \qquad \mu \frac{d\overline{q}_k}{dv} = -\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial \overline{q}_k}, \tag{39}$$

где частные производные $\frac{\partial \rho_0}{\partial \overline{p}_i}$, $\frac{\partial \rho_0}{\partial \overline{q}_k}$ определяются соотношениями в (36).

Для численного интегрирования уравнения (39) можно предложить следующий процесс последовательного приближения. При $\mu = 0$ из (39) получаем редуцированную систему $\frac{d\overline{p}_i}{dv} = -\varepsilon \frac{\partial \rho_0(\widetilde{p})}{\partial \overline{p}_i}$ $(i = \overline{1, n-1})$. (40)

Уравнение (40) можно интегрировать на ЭВМ пользуясь соотношением (38), определив все $p_i = p_i^0$ $(i = \overline{1, n-1})$ и подставляя их в уравнение

$$\mu \frac{d\overline{q}_k}{dv} = -\varepsilon \frac{\partial \rho_0(\widetilde{p}^0, \overline{q})}{\partial \overline{q}_k}, \quad k = \overline{1, m} \tag{41}$$

и совершая замену $\tau = \dfrac{t - t_1}{\mu}$ в правой части (41) получим:

$$\frac{d\overline{q}_k}{dv} = -\varepsilon \int_{\tau_0}^{0} [\eta_k(\sigma,\mu) - \mu \frac{b_n^{(0)} c_k^{(2)}}{c_n^{(1)}}] sign\, \widetilde{h}_0(\sigma,\mu) d\sigma, \qquad (42)$$

где $\widetilde{h}(\sigma,\mu) = h_0(\sigma\mu + t_1, \widetilde{p}^0, \overline{q}, \mu) = h_0(t_1, \widetilde{p}^0, \overline{q}) + h_0'(t_1, \widetilde{p}, q)\sigma\mu + \ldots \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^{n-1} \left[b_i^{(0)} - \frac{C_i^{(1)}}{C_n^{(1)}} b_n^{(0)} \right] \overline{p}_i^0 + \frac{1}{C_n^{(1)}} b_n^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \left[\eta_k(\sigma,\mu) - \mu \frac{b_n^{(0)} C_k^{(2)}}{C_k^{(1)}} \right] \overline{q}_k, \quad (43)$$

где $\overline{p}^0 = (\overline{p}^0, \overline{p}_2^{\ 0}, \ldots, \overline{p}_{n-1}^{\ 0})$, $b_i^0 (i = \overline{1,n})$ --компоненты вектора $B_0 = B_0(t_1)$.

Теперь пользуясь снова соотношениями (38) можно интегрировать уравнения (42).

После необходимых вычислений будет известны $\overline{q}_k^{\ 0} (k = \overline{1,m})$. Число $\rho_0^{\ 0}$ вычисляется по формуле (34). Число $\varpi_0^{\ 0} = \dfrac{1}{\rho_0^{\ 0}}$ характеризует амплитуду управляющего воздействия.

Предположим, теперь, что при достаточно малых μ $(0 < \mu < \mu_0)$ и для граничных точек (x^0, z^0), (x^1, z^1) выполняются следующие условия:

а) углы пересечения графика функции (25)

$$h_0^{\ 0}(t,\mu) = h_0^{\ 0}(t, \widetilde{p}^0, \overline{q}^0, \mu) = B_0'(t)\overline{\Phi}_0'(t,t_1)\overline{p}^0 + B_2'(t_1) e^{-A_4^1(t_1)(t-t_1)/\mu} \overline{q}^0 \quad (44)$$

с осью t ненулевые;

б) якобиан $\dfrac{\partial(\frac{\partial\rho_0}{\partial\overline{p}}, \frac{\partial\rho_0}{\partial\overline{q}})}{\partial(\widetilde{p}, \overline{q})}$ при $p = \widetilde{p}^0$, $\overline{q} = \overline{q}^0$ отличен от нуля.

При выполнении выше указанных условий, функция $h_0(t,\mu) = h_0(t, \widetilde{p}, \overline{q}, \mu)$ обращается в нуль лишь при конечном числе изолированных моментов времени $t = t_j(\overline{p}, \overline{q}, \mu)$ $(j = \overline{1,s})$, которые определяются как обозначенные функции от величины $\overline{p}_i$, $\overline{q}_k$ $(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m})$ и существуют частные производные $\dfrac{\partial t_j}{\partial \overline{p}_i}$, $\dfrac{\partial t_j}{\partial \overline{q}_k}$ при $\overline{p}_i = \overline{p}_i^{\ 0}$, $\overline{q}_k = \overline{q}_k^{\ 0}$ $(i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m})$ как это следует из теорем о неявных функциях.

Еще при данном условии из той же теоремы о неявных функциях следует, что $\bar{p}_i^{\,0}(i=\overline{1,n})$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями по $C_i^{(1)}(i=\overline{1,n})$, а $\bar{q}_k^{\,0}(k=\overline{1,m})$ будут непрерывно дифференцируемыми функциями по $C_i^{(1)}\quad(i=\overline{1,n})$, $C_k^{(2)}\quad(k=\overline{1,m})$. Тогда при малых изменениях $\Delta C_i^{(1)}, \Delta C_k^{(2)}$ будут происходить малые изменения величин $\bar{p}_i^{\,0},\quad \bar{q}_k^{\,o}$, причем будут справедливы оценки [1]:

$$\left|\Delta\bar{p}_i^{\,0}\right| \le r_1\|\Delta c_1\| \tag{45}$$

$$\left|\Delta\bar{q}_k^{\,0}\right| \le r_2(\|\Delta c_1\| + \|\Delta c_2\| \tag{46}$$

$$\left|\Delta\omega_0^{\,0}\right| \le r_3(\|\Delta c_1\| + \|\Delta c_2\|) \tag{47}$$

где r_i -положительные числа.

Изменение минимальной функции $h_0^{\,0}(t,\mu)$ зависит не только от изменения величин $\bar{p}_i^{\,0},\quad \bar{q}_k^{\,0}$, а от неучтенных членов разложения матриц $\Phi(t,t_1\mu)$ и $\psi(t,t_1,\mu)$. Представим матрицы $\Phi(t,s,\mu)$, $\psi(t,s,\mu)$ в форме:

$$\Phi(t,s,\mu) = \overline{\Phi}(t,s) + \mu\varphi(t,s,\mu), \tag{48}$$

$$\psi(t,s,\mu) = e^{A(t)(t-s)/\mu} + \xi(t,s,\mu) \tag{49}$$

Не трудно показать, что при достаточно малых значений $\mu < \mu^0$ функции φ и ξ подчиняются неравенствам [4]

$$\|\varphi(t,s,\mu)\| \le d_2 C^2(e^{t-s}-1)e^{-m(t-s)} \tag{50}$$

$$\|\xi(t,s,\mu)\| \le C(e^{d_1 C(t-s)}-1)e^{-\frac{\gamma(t-s)}{\mu}} \tag{51}$$

где m>1 , $d_1, d_2, C -$ const, 0< $\mu \le \mu^0$, $\mu^0 = \min\{\frac{1}{d_2 C}, \frac{\gamma}{d_1 C}\}$.

Тогда для любых векторов p и q из гиперплоскости (27), в частности при $p = \bar{p}^0$, $q = \bar{q}^0$ функция $h_\beta(t,p,q,\mu)\quad(t_0 \le t \le t_1)$ может быть представлена в виде:

$$h_\beta(t,\bar{p}^0,\bar{q}^0,\mu) = h_0(t,\bar{p}^0,\bar{q}^0,\mu) + O(\mu + e^{\gamma\tau}), \tag{52}$$

где $\tau = \dfrac{t-t_1}{\mu} < 0,\quad \gamma > 0 -$ const.

Это означает, что функция $h_\mu(t, \overline{p}^0 \overline{q}^0, \mu)$ имеет столько же нулей, сколько имела $h_0(t, \overline{p}^0, \overline{q}^0, \mu)$. Все эти нули располагаются с точностью $O(\mu + e^{\gamma\tau})$ (при удалении от граничной точки $t = t_1$ с точностью $0(\mu)$), вблизи соответствующих нулей функции $h_0(t, \overline{p}^0, \overline{q}^0, \mu)$. С учетом (48) и (49) из (15а), (27а) получим:

$$\Delta C_1 = \mu(N(t_1, \mu)\tilde{z}' - \varphi(t_1, t_0, \mu)x^0 - \Phi_0(t_1, t_0)N(t_0, \mu)\tilde{z}^0 - \mu\varphi(t_1, t_0, \mu)N(t_0, \mu)z^0, \quad (53)$$

$$\Delta C_2 = \mu(\varepsilon^{-A_4(t_1)\tau_0} \cdot H_1(t_0, \mu)x^0 - H_1(t_1, \mu)x') - \xi(t_1, t_0, \mu)\tilde{z}^0 \approx -\mu H_1(t_1, \mu)x', \quad (54)$$

где $H_1(t,\mu)$ – ограниченная функция, которая появится из соотношения:

$$H(t, \mu) = -A_4(t)A_3(t) + \mu H_1(t, \mu), \qquad \tau_0 = \frac{t_0 - h}{\mu} \le 0.$$

С учетом того, что матрицы N, H ограничены и функции φ, ξ удовлетворяют неравенствам (50), (51), из (45)-(47) получим:

$$\left|\Delta\overline{p}_i^0\right| \le m_1\mu, \qquad \left|\Delta\overline{q}_k^0\right| \le m_2\mu, \qquad \left|\Delta\omega_0^0\right| \le m_3\mu, \qquad m_1, m_2, m_3, \gamma > 0 - const. \quad (55)$$

Из этих оценок следует, что при всех t, за исключением множества Q значений t, мера которого удовлетворяют неравенству

$$\sigma(Q) \le m_4\mu \quad (56)$$

управление $u_0^0(t, \mu)$ отличается от оптимального управления $u_\beta^0(t, \mu)$ исходной задачи с точностью $O(\mu)$, т.е. будет выполняться следующее неравенство:

$$\left|u_\beta^0 - u_0^0\right| = \left|\Delta u_0^0\right| \le m_5\mu \qquad m_4, m_5 - const, \quad (57)$$

Отсюда имеем следующий вывод:

Теорема:

Если выполняются условия а), б), тогда при достаточно малых значений $\mu<\mu_0$

$$\left(\mu_0 = \min\left\{\frac{1}{d_2C}, \frac{\gamma}{d_1C}\right\}\right)$$

1) оптимальное управление $u_\beta(t, \mu)$ (20) может быть аппроксимировано управлением $u_0^0(t, \mu)$ (28) с точностью $O(\mu)$;

2) при $\mu \to 0$ оба управления - u_β, u_0^0 стремится к одному же пределу, т.е.

$$\lim_{\mu\to 0} u_\beta(t, \mu) = \lim_{\mu\to 0} u_0^0(t, \mu) = u^*(t)$$

Этот предел является решением оптимальной задачи для порождающей системы (21), порядок которой ниже чем (1). Все эти утверждения справедливы для всех t, за исключением множества Q значений, мера которого имеет порядок малости $O(\mu)$.

В заключении следует отметить, что изложенный способ легко обобщается на случай векторного управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. КРАСОВСКИЙ Н.Н. **Теория управления движением** – М.: Наука, 1968.-476с.
2. САДАБАЕВ А., ИМАНАЛИЕВ З.К.. **Вестник КГНУ**. Сер. естеств.-техн. наук. – Бишкек, 1998. вып.1. – с.153-158.
3. ЕГОРОВ А.И.. **Оптимальное управление линейными системами**, Киев: «Выща школа», 1988.- 278с.
4. ВАСИЛЬЕВА А.Б., БУТУЗОВ В.Ф. **Асимптотические разложения решений синтулярно возмущенных уравнений**. – М.: Наука, 1973.-272с.