

ОБ ИЗГИБЕ ГИБКОЙ БАЛКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ЛИНЕЙНОГО УПРОЧНЕНИЯ

Проф., док. С.А. АБДРАХМАНОВ

Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Н.Р. ДЖАНАЛИЕВ

Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Ж.Ж. ДОТАЛИЕВА

Кыргызский технический университет им. И. Раззакова

Исследуется поперечный изгиб гибкой балки с учетом больших перемещений. Рассчитана неупругая линия изогнутой оси при линейном упрочнении в области фазовых деформаций.

Материалы, обладающие эффектом памяти формы, получают все более широкое применение. Их феномен проявляется при наличии неупругих деформаций, получаемых за счет, так называемого, мартенситного превращения и ряда других процессов /1/. Мартенситные превращения представляют собой разновидность полиморфного фазового перехода. При изменении температуры, нагрузки или их совместного действия во многих металлах и сплавах в определенный момент меняется тип кристаллической решетки. Стимулом к такому превращению является энергетическая выгодность существования такой кристаллической структуры с меньшим значением термодинамического потенциала. Впервые /2/ подвижность кристалла мартенсита в своих исследованиях показали Г.В. Курдюмов и Л.Г. Хандрос. Кристаллы мартенсита при охлаждении росли, а при нагревании сокращались. Такие кристаллы стали называть термоупругими. А сам фазовый переход – термоупругим мартенситным превращением.

В данной работе рассматривается поперечный изгиб в изотермических условиях тонкой балки длиной l горизонтально зашпеленной на одном конце. На свободный конец приложена сосредоточенная нагрузка P , обеспечивающая на некотором участке появление неупругих деформаций, причем напряжения не превышают напряжения, соответствующего концу фазовой текучести. При этом считаем, что балка изготовлена из материала, обладающего эффектом памяти формы, и ее нагружение осуществляется при некоторой температуре T_0 , меньшей температуры начала аустенитного превращения, то есть в мартенситной области.

Считаем диаграмму деформирования материала одинаковой при растяжении и сжатии, аппроксимируя ломанной линией (рис.1) как в мартенситном, так и в аустенитном состоянии. На рис. 1 обозначено: $tg\alpha = E$; $tg\alpha_1 = nE$, где E – модуль упругости и nE – модуль упрочнения на участке фазовой текучести материала ($n < 1$); σ_{fn} , σ_{fk} – напряжения, соответственно начала и конца фазовой текучести материала; σ_T – предел дислокационной текучести материала.

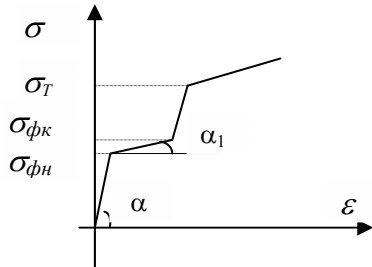


Рис. 1

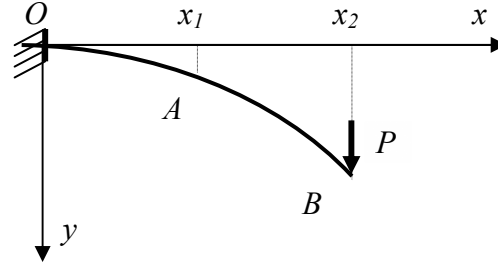


Рис. 2

Пусть y – расстояние от центральной оси z поперечного сечения до произвольного волокна этого сечения. Введем безразмерную величину $\xi = \frac{y_\phi}{y_{max}}$, характеризующую глубину зоны неупругих деформаций в сечении балки, где y_ϕ – ордината, разделяющая упругую область от упруго-фазовой.

Пусть при изгибе балки, с жесткостью EI , участок AB , длиной l_1 кривой оси работает упруго (рис.2).

Как известно, дифференциальное уравнение, описывающее упругую линию имеет вид:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI}, \quad (1)$$

где $M=P(x_2-x)$. Очевидно, в крайнем волокне сечения A , напряжения равны $\sigma_{\phi n}$. Обозначим момент, соответствующий началу фазовой текучести $M_{\phi n}$, тогда в точке A выполняется равенство:

$$M_{\phi n} = \sigma_{\phi n} \cdot W. \quad (2)$$

Из рис. 2 видно, что

$$M_{\phi n} = P \cdot (x_2 - x_1). \quad (3)$$

Обозначим $x_2 - x_1 = a$, тогда величина проекции участка AB определится формулой:

$$a = M_{\phi n} / P. \quad (4)$$

На участке OA длиной $l_2 = l - l_1$, упруго фазовый изгиб описывается дифференциальным уравнением [3/

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M}{EI \cdot D(\xi)}, \quad (5)$$

где $M=P(x_2-x)$, а $D(\xi)$ - сложный оператор, зависящий в основном от формы поперечного сечения и величины y_ϕ . Он связан с изгибающим моментом формулой:

$$\frac{M}{M_{\phi n}} = \frac{D(\xi)}{\xi}. \quad (6)$$

**Об изгибе гибкой балки из материала с памятью формы с учетом
линейного упрочнения**

Для прямоугольного поперечного сечения, в случае линейной аппроксимации участка фазовой текучести материала (рис. 1), известно, что /3/:

$$D(\xi) = \frac{1-n}{2}(3\xi - \xi^3) + n. \quad (7)$$

В левых частях уравнений (1) и (5) произведем замену

$$y' = \operatorname{tg} \theta, \quad (8)$$

где θ - угол наклона касательной в текущем сечении изогнутой балки. Тогда для уравнения (1) и (5) соответственно, получим:

$$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}, \quad (9)$$

$$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI \cdot D(\xi)}. \quad (10)$$

1° Рассмотрим изогнутую линию на участке OA . Граничными условиями для переменной x будут:

$$\theta(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad \xi(0) = \xi_k. \quad (11)$$

На этом участке, с учетом (3) и (6), получим:

$$\frac{M_{\phi n} D(\xi)}{\xi} = M_{\phi n} + P(x_1 - x). \quad (12)$$

Откуда, используя выражение (7), получим:

$$x = x_1 - \frac{M_{\phi n}}{P} \left[\frac{1-n}{2}(3 - \xi^2) + \frac{n}{\xi} - 1 \right]. \quad (13)$$

Продифференцируем уравнение (13). Тогда будем иметь:

$$dx = \frac{M_{\phi n}}{P} \left[(1-n)\xi + \frac{n}{\xi^2} \right] d\xi. \quad (14)$$

Преобразуем теперь правую часть дифференциального уравнения (10) с учетом равенства (6), получим:

$$\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_{\phi n}}{EI \cdot \xi}. \quad (15)$$

С учетом формулы (14), проинтегрируем это дифференциальное уравнение, тогда получим следующее уравнение:

$$\sin \theta = \frac{M_{\phi n}^2}{PEI} \left[(1-n)\xi - \frac{n}{2\xi^2} \right] + c, \quad (16)$$

где

$$c = -\frac{M_{\phi n}^2}{PEI} \left[(1-n)\xi_{\kappa} - \frac{n}{2\xi_{\kappa}^2} \right]. \quad (17)$$

Определим формулу связи длины дуги кривой от параметра ξ , используя выражения (8), (14) и (16). Получаем следующее уравнение:

$$s = \int_{\xi_k}^{\xi} \frac{M_{\phi n} [(1-n) \cdot \xi^3 + n] d\xi}{P \xi^2 \sqrt{1 - \left[\frac{M_{\phi n}^2}{PEI} \left((1-n)\xi - \frac{n}{2\xi^2} \right) + c \right]^2}}. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (8) с учетом формул (14) и (16), имеем:

$$y = \int_{\xi_k}^{\xi} \frac{\left[\frac{M_{\phi n}^2}{PEI} \left((1-n)\xi - \frac{n}{2\xi^2} \right) + c \right] \cdot M_{\phi n} [(1-n) \cdot \xi^3 + n] d\xi}{P \xi^2 \sqrt{1 - \left[\frac{M_{\phi n}^2}{PEI} \left((1-n)\xi - \frac{n}{2\xi^2} \right) + c \right]^2}}. \quad (19)$$

Итак, задавая различные значения параметру ξ из интервала $[\xi_{\kappa}; 1]$ из формул (13) и (19) на участке OA определяются координаты точек оси балки. В частности, при $\xi=1$, из уравнений (18), (13) и (19), (16) получим соответственно длину l_2 участка OA , координаты $(x_1; y_1)$ точки A и угол наклона касательной θ_1 к оси в сечении A .

2° Определим упругую линию AB балки. Интегрируя дифференциальное уравнение (9), с учетом ранее полученных значений в точке A :

$$\theta(x_1) = \theta_1; \quad y(x_1) = y_1, \quad (20)$$

получим формулу для нахождения угла наклона касательной в точке с абсциссой x :

$$\sin \theta = \frac{P}{2EI} (x_2 - x)^2 + c, \quad (21)$$

где, с учетом формулы (3)

$$c = \sin \theta_1 - \frac{M_{\phi n}^2}{2PEI}. \quad (22)$$

Подставив уравнения (8) и (21) в формулу длины дуги кривой, и преобразовав /4/, получим следующее выражение:

$$s = \int_{x_1}^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{2EI}{P} \int_0^{x_2-x_1} \frac{dt}{\sqrt{n^2 + t^2} \sqrt{m^2 - t^2}}. \quad (23)$$

**Об изгибе гибкой балки из материала с памятью формы с учетом
линейного упрочнения**

где,

$$m^2 = \frac{2EI}{P}(1-c); \quad n^2 = \frac{2EI}{P}(1+c). \quad (24)$$

Используя формулу для эллиптических интегралов из /5/, получим:

$$s = \sqrt{\frac{EI}{P}} \left(F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\varphi, k) \right), \quad (25)$$

где $F(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл 1-го рода,

$$k^2 = \frac{m^2}{m^2 + n^2} = \frac{1-c}{2}, \quad \varphi = \arccos \frac{x_2 - x_1}{m}. \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (8), с учетом формулы (21) и граничного условия (20), преобразуем интеграл с помощью замен (24). Далее, аналогично предыдущему случаю, из /5/, получим формулу для определения вертикальных перемещений оси балки через эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$y = y_1 + \sqrt{\frac{EI}{P}} \left(F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\varphi, k) - 2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + 2E(\varphi, k) \right). \quad (27)$$

Откуда, используя выражение (25), получим:

$$y = y_1 + s - 2\sqrt{\frac{EI}{P}} \left(E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi, k) \right), \quad (28)$$

где $E(\varphi, k)$ - эллиптический интеграл 2-го рода, параметры интеграла φ, k определяются по формулам (26). Причем, при $x=x_1$, используя зависимости (3) и (4), имеем:

$$\varphi = \arccos \frac{M_{\varphi n}}{\sqrt{2PEI(1-c)}}. \quad (29)$$

При этом значении параметра φ определяются длина l_1 участка AB и координата (x_2, y_2) точки B .

3° При определении длины участка OA и координат точки A для неупруго изогнутой оси балки, нами произвольно было выбрано значение ξ_k . В силу этого, полученная длина l_1+l_2 всей балки при стыковке упругой и неупругой частей /6/ может не совпадать с величиной l . Однако, по полученным формулам, можно определить ξ_k , соответствующее заданному значению l , варьируя это значение в пределах от ξ_k^0 до 1, где ξ_k^0 соответствует случаю, когда максимальное напряжение в заделке равно $\sigma_{\varphi k}$, а в случае, когда это напряжение $\sigma \leq \sigma_{\varphi n}$, тогда ξ_k равно 1.

Таким образом, найдя значение ξ_k , соответствующее равенству

$$l_1 + l_2 = l, \quad (30)$$

по формулам (19) и (28) вычисляются координаты точек изогнутой оси для $\xi_k \in [\xi_k^0; l]$, и $x \in [0; x_2]$.

По вышеописанному методу произведены расчеты и построен на рис. 3 график оси изогнутой линии балки под действием силы $P=2\text{кг}$ для следующих параметров: модуль упругости материала $E=0,5 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; коэффициент упрочнения $n=0,1$; предел фазовой текучести $\sigma_{fn}=1600 \text{ кг/см}^2$, а также для балки: длина $l=30 \text{ см}$; ширина $b=3 \text{ см}$; высота $h=0,2 \text{ см}$. При этом крестик на этой линии соответствует точке А на рис. 2. Для данного случая расчеты дают: $l_1=9,338\text{см}$; $l_2=20,662\text{см}$.

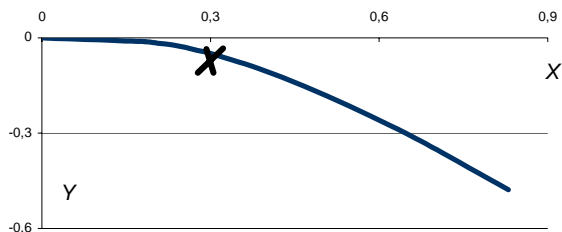


Рис. 3

4° В начале работы на нагрузку ставилось условие, чтобы наибольшая величина напряжений не превышала напряжения, соответствующего концу фазовой текучести материала. Для определения максимальной нагрузки P_ϕ , при котором напряжения в заделке достигают такого значения, то есть $\sigma = \sigma_{fk}$, воспользуемся условием:

$$P_\phi \cdot x_2 = \sigma_{fk} \cdot W. \quad (31)$$

При этом значение ξ_k в заделке, очевидно будет равно ξ_k^0 .

Расчет величины P_ϕ можно проводить с помощью следующей итерации. Пусть $P_\phi^1 = \sigma_{fk} \cdot W / l$. Тогда, вычислим величину x_2^1 по вышеописанной схеме, где $a^1 = \sigma_{fn} \cdot W / P_\phi^1$. Следующие значения нагрузки можно брать по формуле:

$$P_\phi^{i+1} = \frac{1}{2} \left(P_\phi^i + \frac{\sigma_{fn} W}{x_2^i} \right). \quad (32)$$

Таким образом, на некотором шаге можно получить с любой заданной точностью значение максимальной нагрузки, удовлетворяющей условию рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. АБДРАХМАНОВ С.А. Деформация материалов с памятью формы при термосиловом воздействии. – Б.: Илим, 1991. – 115 с.
2. ХАЧИН В.Н. Память формы. – М.: Знание, 1984. – 261 с.
3. АБДРАХМАНОВ С.А., ДЮШЕКЕЕВ К.Д. Изгиб и кручение брусьев из материалов с памятью формы. – Б.: Илим, 1992. – 52с.

**Об изгибе гибкой балки из материала с памятью формы с учетом
линейного упрочнения**

4. ДЖАНАЛИЕВ Н.Р. **О предельной нагрузке при упругом продольно-поперечном изгибе** // Вестник КТУ им. И.Раззакова, №5. - Бишкек: Техник, 2002. - С.145-149.
5. ДВАЙТ Г.Б. **Таблицы интегралов и другие математические формулы.** - М.: Наука, 1977. – 224 с.
6. АБДРАХМАНОВ С.А., ДОТАЛИЕВА Ж.Ж. **О задаче определения реактивных усилий в материалах с памятью формы**// – Журнал Наука и новые технологии. №4, 2000. – С. 27-31.