МЕТОД ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА В ПРОБЛЕМЕ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА СО СВЯЗЯМИ В ВИДЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Проф., док. Р. РАФАТОВ

Кыргызско – Турецкий университет «Манас»

Решается проблема управления процессом, который описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка, к котороому присоединены начальное условие при $t=0$ и условия в последовательности n точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Критерием качества управления служит интегральный квадратичный функционал, зависящий от конечного состояния системы и совокупности n управляющих параметров. Для получения условий оптимальности применяется метод приращения функционала [1], а для решения получаемых при этом нелинейных уравнений с частными производными, применяется Метод дополнительного аргумента – МДА [2].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предполагается, что управляемый объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными вида

$$\psi_t(t,x) + \psi(t,x)\psi_x(t,x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) f_i(t,x),\ t \in [0,T],\ x \in R \qquad (1.1)$$

с известными $f_i(t,x), i = 1,2,\ldots,n,$ определенными на $[0,T]xR$ и начальным условием

$$\psi(0,x) = \psi_0(x), x \in R \qquad (1.2)$$

где $\psi_0(x)$ - заданная функция из $L^2(R)$, и условиями

$$\psi(t,x_j) = g_j(t), t \in [0,T], x_1 < x_2 < \ldots < x_n. \qquad (1.3)$$

Здесь $g_i(t)$ - известные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\psi_0(x_j) = g_j(0), j = 1,2,\ldots,n. \qquad (1.4)$$

Допустимыми управлениями будем считать функции $u_i(t), i = 1,2,\ldots,n,$ которые удовлетворяют условиям

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) \in U \subset L^2[0,T]. \qquad (1.5)$$

При указанных условиях каждое допустимое управление из класса (1.5) однозначно определяет функцию $\psi(t,x)$, которая почти всюду в $[0,T]$ удовлетворяет уравнению (1.1) и дополнительным условиям (1.2) и (1.3) при всех $t\in[0,T]$ и $x\in R$.

Исследуемая здесь проблема оптимального управления состоит в том, чтобы найти допустимое управление $u^0(t)=(u_n^0(t),u_n^0(t),...,u_n^0(t))$ и соответствующее ему решение $\psi^0(t,x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3) такие, чтобы следующий интегральный квадратичный функционал

$$J[u]=\int_R[\psi(T,x)-\psi_1(x)]^2dx+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n u_i^2(t)dt \tag{1.6}$$

принимал наименьшее возможное значение при $u=u^0,\psi=\psi^0$. Здесь $T-$ фиксированный момент времени, а $\psi_1(x)-$ аданная функция из $L^2(R)$.

2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ. Возьмем произвольное допустимое управление

$u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ и обозначим через $\psi(t,x)$ соответствующее ему решение задачи $(1.1)-(1.3)$. Управлению $u(t)$ дадим некоторое допустимое приращение $\Delta u=(\Delta u_1,\Delta u_2,...,\Delta u_n)$. Обозначим через $\Delta\psi$ соответствующее ему приращение функции $\psi(t,x)$. Тогда очевидно, что функция $\Delta\psi(t,x)$ является решением задачи

$$\Delta\psi_t+\psi\Delta\psi_x+\Delta\psi\psi_x+\Delta\psi\Delta\psi_x-\sum_{i=1}^n\Delta u_i(t)f_i(t,x)=0\,. \tag{2.1}$$

Непосредственными вычислениями из (1.5) находим, что функционал $J[u]$ получает приращение

$$\Delta J[u]=2\int_R[\psi(T,x)-\psi_1(x)]\Delta\psi(T,x)dx+2\beta\sum_{i=1}^n u_i(t)\Delta u_i(t)dt+$$
$$+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2dt\,. \tag{2.2}$$

Возьмем теперь произвольную функцию $\Phi(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$, удовлетворяющую уловиям

$$\lim_{x\to-\infty}\Phi(t,x)=\lim_{x\to+\infty}\Phi(t,x)=0,\forall t\in[0,T]\,. \tag{2.3}$$

Тогда, очевидно, что справедливо равенство

$$\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\left[\psi_t(t,x)+\psi(t,x)\psi_x(t,x)-\sum_{i=1}^n u_i(t)f_i(t,x)\right]dxdt=0. \quad (2.4)$$

Обозначив левую часть равенства (2.4) через $A[\Phi,\psi,u]$, будем иметь

$$\Delta A[\Phi,\psi,u]=\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\{\Delta\psi_t+\psi\Delta\psi_x+\Delta\psi\psi_x+\Delta\psi\Delta\psi_x-$$

$$-\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)f_i(t,x)\ \}dxdt=0.$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.1), (2.3) , находим, что

$$\Delta A[\Phi,\psi,u]=\int_R \Phi(T,x)\Delta\psi(T,x)dx-\int_0^T\int_R \Delta\psi(t,x)\{\Phi_t(t,x)+$$

$$+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)+\frac{1}{2}\Delta\psi(t,x)\Phi_x(t,x)\ \}dxdt-$$

$$-\int_0^T\int_R \Phi(t,x)\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)f_i(t,x)dxdt=0. \quad (2.5)$$

Объединив равенства (2.2) и (2.5), получим

$$\Delta J[u]=\int_R\{2[\psi(T,x)-\psi_1(x)]+\Phi(T,x)\}\Delta\psi(T,x)dx+$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n \Delta u_i(t)\left\{2\beta u_i(t)-\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx\right\}dt-$$

$$-\int_0^T\int_R \Delta\psi(t,x)[\Phi_t+\psi\Phi_x]dxdt+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T\int_R \Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2dxdt. \quad (2.6)$$

До сих пор $\Phi(t,x)$ была произвольной функцией из $W_2^{0,1}([0,T]xR)$. Определим ее теперь как обобщенное решение задачи

$$\Phi_t(t,x)+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)=0, t\in[0,T], x\in R, \quad (2.7)$$

$$\Phi(T,x)=-2[\psi(T,x)-\psi_1(x)], x\in R, \quad (2.8)$$

где $\psi(t,x)-$ решение задачи $(1.1)-(1.3)$, соотвутствующее управлению $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$, а $\psi_1(x)-$ функция, фигурирующая в определении функционала (1.5). При этом под обобщенным решением задачи (2.7),(2.8) понимается функция $\Phi(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$, удовлетворяющая условиям (2.3) и интегральному тождеству

$$\int_R \{2[\psi(T,x)-\psi_1(x)]+\Phi(T,x)\}\Phi^*(T,x)dx-$$
$$-\int_0^T\int_R \Phi^*(t,x)[\Phi_t(t,x)+\psi(t,x)\Phi_x(t,x)]dxdt=0 \qquad (2.9)$$

для любой функции $\Phi^*(t,x)\in W_2^{0,1}([0,T]xR)$.

Из (2.6) и (2.9), полагая $\Phi^*=\Delta\psi$, получаем

$$\Delta J[u]=\int_0^T\sum_{i=1}^n\left[2\beta u_i(t)-\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx\right]\Delta u_i(t)dt+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+$$
$$\int_0^T\int_R\left\{\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2-\frac{1}{2}\Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2\right\}dxdt. \qquad (2.10)$$

До сих пор $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_n(t))$ было произвольным управлением, а $\psi(t,x)$ - соответствующим ему решением задачи $(1.1)-(1.3)$. Если теперь в формуле (2.10) положить $u=u^0,\psi=\psi^0,\Phi=\Phi^0$, то получим, что

$$-\int_0^T\sum_{i=1}^n\Delta u_i(t)\left[\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx-2\beta u_i^0(t)\right]dt+$$
$$+\int_R[\Delta\psi(T,x)]^2dx+\int_0^T\int_R\left\{\beta\sum_{i=1}^n[\Delta u_i(t)]^2-\frac{1}{2}\Phi_x(t,x)[\Delta\psi(t,x)]^2\right\}dxdt\geq 0 \quad (2.11)$$

для любого допустимого приращения $\Delta u(t)=(\Delta u_1(t),\Delta u_2(t),...,\Delta u_n(t))$ соответствующего ему приращения $\Delta\psi(t,x)$. Так как второе и третье слагаемые в левой части этого неравенства зависят от $\Delta u_i,(i=1,2,...,n)$ и $\Delta\psi$ второй степени, знак в левой части (2.11) определяется знаком первого слагаемого и следовательно справедливо утверждение :

Для того чтобы управление $u^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t), ..., u_n^0(t))$ и соответствующее ему решение $\psi^0(t,x)$ задачи (1.1) – (1.3) были оптимальными, необходимо, чтобы для соответствующей им функции $\Phi^0(t,x)$ и любого допустимого приращения $\Delta u(t) = (\Delta u_1(t), \Delta u_2(t), ..., \Delta u_n(t))$ имело место неравенство

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \Delta u_i(t) \left[\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx - 2\beta u_i^0(t) \right] dt \le 0. \tag{2.12}$$

Поскольку неравенство (2.12) должно выполняться для произвольного приращения $\Delta u(t) = (\Delta u_1(t), \Delta u_2(t), ..., \Delta u_n(t))$, то беря поочередно приращения следующих видов $\Delta u = (\Delta u_1, 0, 0, ..., 0)$, $\Delta u = (0, \Delta u_2, 0, ..., 0)$,..., $\Delta u = (0,0,0,..., \Delta u_n)$, из (2.12) получаем

$$\int_R f_i(t,x)\Phi^0(t,x)dx - 2\beta u_i^0(t) \le 0, \forall i = 1,2,...,n. \tag{2.13}$$

Теперь если ввести функции

$$H_i(\Phi^0, u_i^0) = u_i^0 \int_R \Phi^0 f_i dx - \beta(u_i^0)^2, i = 1,2,...,n, \tag{2.14}$$

то вместо неравенств (2.13) можно рассматривать неравенства

$$\int_0^T \left[H_i(\Phi^0, u_i) - H(\Phi^0, u_i^0) \right] dt \le 0, i = 1,2,...,n \tag{2.15}$$

для всех допустимых управлений. Неравенства (2.15) эквивалентны соотношениям:

$$H_i(\Phi^0, u_i^0) = \max_{u_i} H_i(\Phi^0, u_i), i = 1,2,...,n, \tag{2.16}$$

где равенство для каждого индекса $i (i = 1,2,...,n)$ справедливо почти всюду в интервале $[0,T]$, а максимум берется по всем $u_i, (i = 1,2,...,n)$ из области допустимых значений (1.5).

Теорема (Принцип Максимума). Для того, чтобы допустимое управление $u^0(t) = (u_1^0(t), u_2^0(t), ..., u_n^0(t))$ и соответствующее ему решение $\psi^0(t,x)$ задачи $(1.1) - (1.3)$ были оптимальными, необходимо, чтобы функции $H_i, i = 1,2,...,n,$ удовлетворяли условиям (2.16), в которых $\Phi^0(t,x)$ - решение задачи (2.7), (2.8), при $\psi = \psi^0(t,x)$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ. Переходя к построению оптимального управления, предположим сначала, что на область значений

допустимых управлений не накладывается никаких ограничений. Тогда из условий (2.16) следует, что оптимальные управления u_i^0 должны удовлетворять условиям:

$$u_i(t) = \frac{1}{2\beta}\int_R f_i(t,x)\Phi(t,x)dx, i = 1,2,...,n. \tag{3.1}$$

Таким образом задача сводится к определению $u^0 = (u_1^0, u_2^0, ..., u_n^0)$, ψ^0 и Φ^0 из соотношений $(1.1)-(1.3)$ и

$$\Phi_t(t,x) + \psi(t,x)\Phi_x(t,x) = 0, t \in [0,T], x \in R, \tag{3.2}$$

$$\Phi(T,x) = -2[\psi(T,x) - \psi_1(x)], x \in R \tag{3.3}$$

и условий (3.1).

4. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. Для сведения задачи $(1.1)-(1.3)$, $(3.1)-(3.3)$ к системе интегральных уравнений воспользуемся методом дополнительного аргумента - МДА $[3,4,5]$. С этой целью в (1.1), (1.2) заменим t на ρ и x на $v(t,\rho,x)$ по формуле

$$v(t,\rho,x) = x - \int_\rho^t \psi(\tau, v(t,\tau,x))d\tau \tag{4.1}$$

и проинтегрируем полученное уравнение по ρ от 0 до $s, 0 \le s \le T$. В результате будем иметь

$$\psi(s, v(t,s,x)) = \psi_0(x - \int_0^t \psi(\tau, v(t,\tau,x))d\tau) +$$

$$+\int_0^s \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t \psi(\tau, v(t,\tau,x))d\tau)d\rho. \tag{4.2}$$

Вводя обозначение

$$W(t,s,x) = \psi(s, v(t,s,x)) \tag{4.3}$$

уравнение (4.2) запишем в виде следующего нелинейного интегрального уравнения

$$\psi(s, v(t,s,x)) = \psi_0(x - \int_0^t W(t,\tau,x)d\tau) +$$

$$+\int_0^s \sum_{i=1}^n u_i(\rho) f_i(\rho, x - \int_\rho^t W(t,\tau,x)d\tau)d\rho. \tag{4.4}$$

Учитывая, что $W(t,s,x)\big|_{s=t} = \psi(t,x)$, из (4.4) имеем

$$\psi(t,x)=\psi_0(x-\int_0^t W(t,\tau,x)d\tau)+$$

$$+\int_0^t\sum_{i=1}^n u_i(\rho)f_i(\rho,x-\int_\rho^t W(t,\tau,x)d\tau)d\rho\,. \tag{4.5}$$

Решение задачи (3.2), (3.3) находим аналогичными рассуждениями. А именно, заменим в (3.2), (3.3) t на ρ и x на $v(t,\rho,x)$ по формуле (4.1) и проинтегрируем полученное уравнение по ρ от 0 до $s, 0\le s\le T$. В результате будем иметь

$$\Phi(s,v(t,s,x))=-2[\psi(T,v(t,T,x))-\psi_1(v(t,T,x))].$$

Отсюда, учитывая (4.1) и полагая $s=t$, имеем

$$\Phi(t,x)=-2\left[W(t,T,x)-\psi_1(x+\int_t^T W(t,\tau,x)d\tau\right]. \tag{4.6}$$

Из (3.1) и (4.6) получим

$$u_i(t)=-\frac{1}{\beta}\int_R f_i(t,x)\left[W(t,T,x)-\psi_1(x+\int_t^T W(t,\tau,x)d\tau\right]dx\,. \tag{4.7}$$

Полагая $s=T$, из (4.4) имеем

$$W(t,T,x)=\psi_0(x-\int_0^t W(t,\tau,x)d\tau)+$$

$$+\int_0^T\sum_{i=1}^n u_i(\rho)f_i(\rho,x-\int_\rho^t W(t,\tau,x)d\tau)d\rho\,. \tag{4.8}$$

Из (1.3) и (4.5) получаем еще n соотношений :

$$g_j(t)=\psi_0(x_j-\int_0^t W(t,\tau,x_j)d\tau)+$$

$$+\int_0^t\sum_{i=1}^n u_i(\rho)f_i(\rho,x_i-\int_\rho^t W(t,\tau,x_j)d\tau)d\rho\,,\ j=1,2,...,n. \tag{4.9}$$

Таким образом, для определения $n+2$ неизвестных функций $W(t,s,x),W(t,T,x),u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)$ получена замкнутая система, состоящая из $n+2$ нелинейных интегральных уравнений (4.4), (4.7), (4.8) и (4.9).

Теорема 2. Допустим, что выполняются следующие условия:

1) $\psi_0(x), \psi_1(x) \in L^2(R) \cap \overline{C}^1(R)$;

2) $f_1(t,x), f_2(t,x), ..., f_n(t,x) \in L^2([0,T]xR) \cap \overline{C}^{0,1}([0,T]xR)$;

3) Матрица $F(t) = (f_i(t,x_j))_{i,j=1}^n$ при всех $t \in [0,T]$ имеет обратную $F^{-1}(t)$.

Тогда при достаточно малых $T > 0$ система нелинейных интегральных уравнений (4.4), (4.7), (4.8) и (4.9) имеет единственное решение в пространстве $L^2([0,T]x[0,T]xR)xL^2([0,T]xR)xL^2[0,T]$.

Для доказательства теоремы применяется метод сжатых отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. ЕГОРОВ А.И. **Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами**. Москва: Наука,1978. – 463с.
2. ЕГОРОВ А.И., РАФАТОВ Р.Р. **Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии**. Фрунзе: Илим, 1990. – 337с.
3. ИМАНАЛИЕВ М.И., АЛЕКСЕЕНКО С.Н. // **ДАН СССР**, 1992, т.323, №3,- с.410-415.
4. РАФАТОВ Р.Р., АСАНОВ А. // Вестник КГНУ, 2001. Серия 3. Выпуск 6. **Междунар. научная конф., посвященная 70–летию Академика М.И. Иманалиева**. -с.100-104
5. СУЛАЙМАНОВ Б.Э. // **Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям** .- Бишкек: Илим, 2000. Вып.29,- с.358-363.