DEVERAN KATSAYISINA GÖRE *n* ÇEŞİT POPULASYON VOLTERRA SİSTEMİNİN DENGELİĞİ

Mehmet KARAKAŞ
Sakarya Üniversitesi SMYO, Adapazarı

GİRİŞ

Bu araştırmadan önce, deveran katsayısının Volterra sistemi üzerinde yapılan araştırmalarda, May R. M., ve Leonard W. J.(1975), deveran katsayısının fakat 3 çeşit populasyon Volterra sisteminin durumunu araştırmıştır. Roy A. B. ve Solimano F. J. (1987), deveran katsayısının 3 boyutlu global Volterra sistemini araştırmıştır. Bu araştırmada, deveran katsayısının *n* çeşit populasyon Volterra sisteminin genel durumu ele alınmış olup, matrisler kuralı ve Liapunov fonksiyon yöntemlerinden ayrı ayrı yararlanarak, pozitif denge noktasının lokal ve global asimptotik dengeliği araştırılmıştır. Böylece, işte bu sistemin global asimptotik dengeliğinin mevcutluğu, pozitif denge noktasının yeterlilik şartı verilmiştir. Başka bir deyişle, Teorem 1'in şartlarını sağlayan deveran katsayısının Volterra sistemi gösterilmiş olup, bu pozitif denge noktasının lokal asimptotik dengeliğin global asimptotik dengeliğe yakınsaklık dönüşümünün işlem yapısı göstermiştir.

Aşağıda verilmiş olan deveran sisteminin Volterra modelini araştırmış olalım;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(a_0 - a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n), \\ \dot{x}_2 = x_2(a_0 + a_nx_1 - a_1x_2 + a_2x_3 + \cdots + a_{n-1}x_n), \\ \dot{x}_3 = x_3(a_0 + a_{n-1}x_1 + a_nx_2 - a_1x_3 + \cdots + a_{n-2}x_n), \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dot{x}_n = x_n(a_0 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + \cdots - a_1x_n), \end{cases} \tag{1}$$

Burada a_0, a_1 □0□$a_j(2 \le j \le n)$'lerin tümü sıfır olmayan real sayılardır.

Şimdi $R^n_+ =$□$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$□$x_m \ge 0,\ 1 \le m \le n$□de sistem (1)'in doğru denge noktasının dengeliğini araştıralım.

Sistem(1)'in çeşitli populasyonları arasındaki ilişkiler parametrelerinden aşağıdaki deveran matrisini elde edebiliriz.

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & -a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & -a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

A deveran matrisi olduğundan,

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k) = \prod_{k=1}^{n}\left[-a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j\left(\cos\frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} + i\sin\frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n}\right)\right], \quad (3)$$

Burada

$$f(x) = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j x^{j-1}, \quad (4)$$

$i^2=-1$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2$□...□$\varepsilon_n$ ise $x^n=1$ in tüm birim kökleridir.

Genel olarak aşağıdaki durumun sağlanmasını varsayalım;

det $A\neq 0$ olsun, bu halde X□$=(x^*,x$ *□x^*□...□$x^*)^T$ ise

$$\begin{cases} a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - \cdots - a_nx_n = a_0, \\ -a_nx_1 + a_1x_2 - a_2x_3 - \cdots - a_{n-1}x_n = a_0, \\ -a_{n-1}x_1 - a_nx_2 + a_1x_3 - \cdots - a_{n-2}x_n = a_0, \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ -a_2x_1 - a_3x_2 - a_4x_3 - \cdots + a_1x_n = a_0 \end{cases} \quad (5)$$

in tek pozitif çözümüdür. Burada

$$x^* = a_0/(a_1 - \sum_{j=2}^{n} a_j). \quad (6)$$

olup, $a_1 > \sum_{j=2}^{n} a_j$ 时, X^* olduğunda, X^* ise sistem (1)in tek pozitif denge noktasi olur.

YÖNTEM VE METOTLAR

Teorem 1 : $A\neq 0$ ve $a_1 > \sum_{j=2}^{n} a_j\cos[2\pi(k-1)(j-1)/n]\ (1\leq k\leq n),$ ise, o halde sistem (1)in lokal asimptotik dengesinin pozitif denge noktası X^* mevcuttur.

İspat: Öncelikle verilen şarttan biliniyor ki, k=1 olduğunda, $a_1 > \sum_{j=2}^{n} a_j,$ olup, buradan kolayca sistem(1)'in pozitif denge noktası X^*in mevcutluğunu gösterebiliriz.

Şimdi $y_m=x_m-x^*(1\leq m\leq n)$olduğunu varsayalım ve $Y=(x_1-x^*,x_2-x^*,\ldots,x_n-x^*)^T= (y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$ leri yazalım. Bu durumda denklem (1) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\dot{Y} = x^* AY + Y^T AY, \quad (7)$$

Burada x^* ve A'ler ayrı ayrı (6) ve (2)'lerde verilmiştir, ve de (7)in doğrusal kısminin katsayılar matrisi, gerçekten sistem (1)'in X^* ya göre değişim matrisi J dir. Yani

$$J_{n\times n} = x^* A = x^* \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & \cdots & a_m & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\ a_n & -a_1 & \cdots & a_{m-1} & \cdots & a_{j-1} & \cdots & a_{n-1} \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n-m+2} & a_{n-m+3} & \cdots & -a_1 & \cdots & a_{j-m+1} & \cdots & a_{n-m+1} \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n-j+2} & a_{n-j+3} & \cdots & a_{n-j+m+1} & \cdots & -a_1 & \cdots & a_{n-j+1} \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{m+1} & \cdots & a_{j+1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad (8)$$

dir. (7)'in sağ tarafındaki ikinci ifade $Y^T AY$ ise karesel bir ifade olduğundan, $\lim_{\|Y\|\to 0} (\| Y^T AY \| / \| Y \|) = 0,$ olup, (8)'den $J_{n\times n}$ in deveran bir matris olduğu elde edilir. Diyelim $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ler $J_{n\times n}$ in karakteristik kökleri olsun, bu halde deveran matrisinin özelliğinden,

$$\lambda_k = g(\varepsilon_k) = x^* f(\varepsilon_k) = x^* \left\{ -a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \left[\cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n}\right]\right\} \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \qquad (9)$$

elde edilir. Burada

$g(x) = x^* f(x) = x^* \left(-a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j x^{j-1} \right), \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ ler yukarıda gösterilen $i^2=-1$'in kökleridir.

$$\mathrm{Re}\lambda_k = x^* \left(-a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} \right) < 0, \text{ 即 } a_1 > \sum_{j=2}^{n} a_j \cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n}$$

olduğunda, denklem sistemi (7)'in sıfır çözümü $Y=\theta$ ise asimptotik dengelik olur. Yani sistem (1)'in pozitif denge noktası X^* ise lokal asimptotik dengelik olur. Dolayısıyla Teorem 1 ispatlanmıştır.

Aşağıda Liapunov fonksiyon yönteminden yararlanarak, Teorem 2'yi ispatlayalım.

Teorem 2 : Teorem 1'in şartları altında, sistem (1)'in pozitif denge noktası X^* ise global asimptotik denge olur.

İspat: Önce (5)'in pozitif çözümü X^* olduğuna dikkat edelim. (1)'i aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{x}_1}{x_1} = -a_1(x_1 - x^*) + a_2(x_2 - x^*) + a_3(x_3 - x^*) + \cdots + a_n(x_n - x^*), \\ \dfrac{\dot{x}_2}{x_2} = a_n(x_1 - x^*) - a_1(x_2 - x^*) + a_2(x_3 - x^*) + \cdots + a_{n-1}(x_n - x^*), \\ \dfrac{\dot{x}_3}{x_3} = a_{n-1}(x_1 - x^*) + a_n(x_2 - x^*) - a_1(x_3 - x^*) + \cdots + a_{n-2}(x_n - x^*), \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \dfrac{\dot{x}_n}{x_n} = a_2(x_1 - x^*) + a_3(x_2 - x^*) + a_4(x_3 - x^*) + \cdots - a_1(x_n - x^*), \end{cases} \qquad (1)'$$

Burada x_m□0 $(1 \le m \le n)$ dir.

Bu durumda Liapunov fonksiyonunu

$$V(X) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x^* - x^* \ln \frac{x_j}{x^*}\right), \qquad (10)$$

olarak seçelim. Böylece, $V(X^*)=0$ dir. Yine $X \neq X^*$ olduğunda, $V(X)$□0 olur. □X□ → +∞ ya da □X□→0 olduğunda, $V(X)\to$□∞ olur. Burada $X=(x_1,x_2,x_3,\ldots$□$x_n)$□R^n dir.

Diğer taraftan $V(X)$, sistem (1)'in çözümüne ilişkin *t*'in tüm türevine bağlıdır;

$$M(b_{mj})_{n\times n} = \begin{bmatrix} -a_1 & \cdots & \frac{a_m + a_{n-m+2}}{2} & \cdots & \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} & \cdots & \frac{a_n + a_2}{2} \\ \frac{a_n + a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{m-1} + a_{n-m+3}}{2} & \cdots & \frac{a_{j-1} + a_{n-j+3}}{2} & \cdots & \frac{a_{n-1} + a_3}{2} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ \frac{a_{n-m+2} + a_m}{2} & \cdots & -a_1 & \cdots & \frac{a_{j-m+1} + a_{n-j+m+1}}{2} & \cdots & \frac{a_{n-m+1} + a_{m+1}}{2} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ \frac{a_{n-j+2} + a_j}{2} & \cdots & \frac{a_{j-m-1} + a_{n-j+m+1}}{2} & \cdots & -a_1 & \cdots & \frac{a_{j+1} + a_{n-j+1}}{2} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ \frac{a_n + a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{m+1} + a_{n-m+1}}{2} & \cdots & \frac{a_{j+1} + a_{n-j+1}}{2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

Tabii ki $M(b_{mj})_{n\times n}$ ise deveran ve real simetrik matristir. Aşağıda Teorem 1'in şartları altında $M(b_{mj})_{n\times n}$in negatif tanımlı bir matris olduğu ispatlanabilir. $M(b_{mj})_{n\times n}$ deveran matris olduğu için, $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \cdots, \bar{\lambda}_n$ler $M(b_{mj})_{n\times n}$in *n* tane karakteristik kökleri olsun. Deveran matrisin karakteristik köklerinin özelliğine göre,

$$\bar{\lambda}_k = w(\varepsilon_k) = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} \varepsilon_k^{j-1} = -a_1 +$$

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} \left[\cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n}\right] \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{13}$$

olur.

Özellikle, $k=1$ olduğunda,

$$\bar{\lambda}_1 = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j = \frac{\lambda_1}{x^*} < 0.$$

olur. Burada

$$w(x) = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} x^{j-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$$

ler ise yukarıda gösterilen $i^z = -1$'in kökleridir.

Diğer bir taraftan, $M(b_{mj})_{n\times n}$ real simetrik matris olduğu için,

$$\bar{\lambda}_k = \mathrm{Re}\bar{\lambda}_k = -a_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j + a_{n-j+2}}{2} \cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} =$$

$$-a_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j \cos \frac{2\pi(k-1)(j-1)}{n} = \frac{\mathrm{Re}\lambda_k}{x^*} < 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

olur. Buradan $M(b_{mj})_{n\times n}$in negatif tanımlı olduğu, böylece $\dot{V}(X)=Y^T M(b_{mj})_{n\times n} Y \leq 0$ olduğu elde edilir. Fakat ve fakat $X=X^*$ olduğunda, $\dot{V}(X)=0$ olur. Yani $E=□X□\dot{V}(X)=0, X□R^n_+□=□X^*□$olup, LaSalle değişmezlik teoremine (Liao Xiaoxi, 1988) göre, Teorem 2 ispatlanmıştır.

SONUÇ VE TARTIŞMA

(1) Çevre her bir çeşit populasyona a_0 kaynağını temin eder;

(2) Her bir çeşit populasyonun yoğunluğu a_1 den etkilenir;

(3) Her bir çeşit populasyonun bu çevredeki alabildiği miktar hep $K=a_0□a_1$ dir;

(4)$a_j□0$ $(2\leq j\leq n)$ olduğunda, sistem (1)'in deveran katsayısı tam *n* çeşit populasyonun Volterra sistemi olur; $a_j□0$ $(2\leq j\leq n)$ olduğunda, sistem (1), deveran katsayısının tamamlayıcı *n* çeşit sayısının Volterra sistemi olur; bu Hallam ve Levin (1986)'in özel bir durumudur. Bu durumda, fakat pozitif denge nokta için, sistem noktası mutlaka global asimptotik denge olur; a_2 $□0, a_n□0, a_3=a_4=...=a_{n-1}=0$ olduğunda, sistem (1) deveran katsayısının dönüşüm tipindeki *n* çeşit populasyonunun Volterra sistemi olup, bu da Krikorian (1979)'da ortaya konulan 34.uncu durumun *n* çeşit populasyona genelleştirilmiş durumudur; a_j $(2\leq j\leq n)$ pozitif veya negatif olduğunda, sistem (1), deveran katsayısı ve karmaşık durumdaki *n* çeşit populasyonun Volterra sistemi olur.

Dolayısıyla bu araştırmada ortaya konulan sonuçlar, daha önce bu konuda yapılan araştırmaların genel bir yaklaşımıdır.

KAYNAKLAR

1 MAY R.M, LEONARD W.J., “Nonlinear Aspect of Competition between Three Species”, SIAM J Appl Math, No: 29, pp.243□253, 1975.

2 ROY A.B, SOLİMANO F.J., “Global Stability and Oscillations in Classicl Lotra-Volterra Loops”, Math Biol, No: 24, pp.603□617, 1987.

3 XU Songqing., *Genel Diferansiyel Denklemlerin Dengeliliği* (Çince), Shang Hai Fen Teknoloji Yayınevi, pp.87 □88, Shang Hai, 1980.

4 LİAO Xiaoxi., *Dengeli Matematiksel Teoremler ve Uygulanması* (Çince), Huazhong Pedagoji Yayınevi, pp.180□188, Wu Han, 1988.

5 HALLAM T.G., LEVİN S.A., *Mathematical Ecology,* Springer-Verlag, pp.274□276, New York, 1986.

6 N. KRİKORİAN., “The volterra Model for Three Species Predator-Prey System s: Boundedness and Stability”, Journal of Mathimatical Biology, No: 7, pp.117□ 132, 1979.