ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Проф., др. Авыт АСАНОВ
Кыргызско-Турецкий университет «Манас»
К.Б. МАТАНОВА
ОшГУ

Современные результаты по обратным задачам для дифференциальных уравнений в частных производных весьма широко изложены в [1-10]. В работах [1-5] рассматривались обратные задачи для линейных и операторных интегродифференциальных уравнений. Обратные задачи для нелинейных дифференциальных уравнений исследовались, например в [6, 9].

В настоящей статье рассматривается обратная задача для нелинейного интегродифференциального уравнения. Применением резольвенты ядра, функции Грина и дополнительных условий обратная задача сводится к системе нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Доказана теорема существования и единственности и получена оценка устойчивости решения.

Постановка задачи. Рассмотрим в области $D=\{(t,x)\colon t\in[0,T],\ x\in[0,1]\}$ уравнение

$$\begin{gathered} u'_t(t,x) = a_0(Au)'_t + a_1(Au) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)(P_j u)(t,x) + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_i(t-s)(Q_i u)(s,x)ds + \\ + f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + F(t,x), \quad (t,x)\in D, \end{gathered} \tag{1}$$

с начальным и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x),\ x\in[0,1], \tag{2}$$

$$\alpha_{i0}u''_x(t,0) + \alpha_{i1}u''_x(t,1) + \alpha_{i2}u'_x(t,0) + \alpha_{i3}u'_x(t,1) + \alpha_{i4}u(t,0) + \alpha_{i5}u(t,1) = 0,\ i=1,2,3, \tag{3}$$

где a_0, a_1, α_{ij} – заданные числа, $a_0\neq 0$, $F(t,x)$, $u_0(x)$, f – известные функции. Требуется найти функции $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, …, $\lambda_m(t)$, $K_1(t)$, …, $K_n(t)$ по дополнительной информации

$$u(t,x_i) = g_i(t),\quad i=1,2,\ \dots,\ m+n. \tag{4}$$

Здесь Au, P_j ($j=1,2,\dots,m$), Q_i ($i=1,2,\dots,n$) – заданные дифференциальные операторы, которые имеют вид $Au = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_3 u$,

$(P_j u)(t,x)=\sum_{k=0}^{3} b_{jk}(t,x)\frac{\partial^{3-k}u}{\partial x^{3-k}}(t,x)$, $(Q_i u)(t,x)=\sum_{k=0}^{3} d_{ik}(t,x)\frac{\partial^{3-k}u}{\partial x^{3-k}}(t,x)$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ - заданные постоянные.

Всюду ниже требуется выполнение следующих условий:

I. $F(t,x)\in C(D)$, $u_0(x)\in C^3[0,1]$, $b_{jk}(t,x)\in C(D)$ $(j=1,2,\dots,m,$ $k=0,1,2,3)$, $d_{ik}(t,x)\in C^1[0,T]\times C[0,1]$ $(i=1,2,\dots,n,$ $k=0,1,2,3)$, $g_i(t)\in C^1[0,T]$, $(i=1,2,\ \dots,\ m+n)$ и имеют место условия согласования $u(0,x_i)=g_i(0)$.

II. Для уравнения $Au-\frac{1}{a_0}u=0$ с краевыми условиями (3) существует функция Грина $G(x,\xi)$ [11].

III. Для $(4+m+n)\times(4+m+n)$ – мерной непрерывной матрицы

$$A(t,x)=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & m_1(t,x) & \dots & m_m(t,x) & n_1(x) & \dots & n_n(x)\\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial m_1}{\partial x}(t,x) & \dots & \frac{\partial m_m}{\partial x}(t,x) & \frac{\partial n_1}{\partial x}(x) & \dots & \frac{\partial n_n}{\partial x}(x)\\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2}(t,x) & \dots & \frac{\partial^2 m_m}{\partial x^2}(t,x) & \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 n_n}{\partial x^2}(x)\\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial^3 m_1}{\partial x^3}(t,x) & \dots & \frac{\partial^3 m_m}{\partial x^3}(t,x) & \frac{\partial^3 n_1}{\partial x^3}(x) & \dots & \frac{\partial^3 n_n}{\partial x^3}(x)\\
0 & 0 & 0 & 0 & m_1(t,x_1) & \dots & m_m(t,x_1) & n_1(x_1) & \dots & n_n(x_1)\\
0 & 0 & 0 & 0 & m_1(t,x_2) & \dots & m_m(t,x_2) & n_1(x_2) & \dots & n_n(x_2)\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & m_1(t,x_{m+n}) & \dots & m_m(t,x_{m+n}) & n_1(x_{m+n}) & \dots & n_n(x_{m+n})
\end{pmatrix},$$

(где функции $m_j(t,x)$ и $n_i(x)$ будут определены ниже) $det\ A(t,x)\neq 0$ для всех $(t,x)\in D$.

IV. Функция $f\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$ в области $D\times R^4$ непрерывна и по аргументам $u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом L, то есть

$$\left|f\left(t,x,u^1,\frac{\partial u^1}{\partial x},\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}\right)-f\left(t,x,u^2,\frac{\partial u^2}{\partial x},\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u^2}{\partial x^3}\right)\right|\le$$
$$L\left(\left|u^1-u^2\right|+\left|\frac{\partial u^1}{\partial x}-\frac{\partial u^2}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}\right|+\left|\frac{\partial^2 u^1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}\right|+\left|\frac{\partial^3 u^1}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 u^2}{\partial x^3}\right|\right).$$

Введем новые неизвестные функции

$$v(t,x) = u'_t(t,x)\,, \tag{5}$$

$$\varphi_i(t) = \int_0^t K_i(s)ds\,,\ i = \overline{1,n}\,. \tag{6}$$

Подставляя (5) в уравнение (1) и учитывая начальное условие (2), получим эквивалентное уравнение

$$Av = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds + \frac{1}{a_0}v(t,x) - \frac{a_1}{a_0}Au_0(x) - \frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^m \lambda_j(t)P_j\left(\int_0^t v(s,x)ds + u_0(x)\right) -$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t K_i(t-s)Q_i\left(\int_0^s v(\tau,x)d\tau + u_0(x)\right)ds - \frac{1}{a_0}F(t,x) -$$
$$-\frac{1}{a_0}f\left(t,x,\int_0^t v(s,x)ds + u_0(x),\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(s,x)ds + u'_0(x),\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(s,x)ds + u''_0(x),\int_0^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(s,x)ds + u'''_0(x)\right).$$

Применим к членам, содержащим сумму, дифференциальные операторы P_j и Q_i, формулу Дирихле и интегрирование по частям. Далее, используя (6) и вводя обозначения

$$(M_j v)(s,t,x) = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^3 b_{jk}(t,x)\frac{\partial^{3-k}v}{\partial x^{3-k}}(s,x)\,,$$
$$(N_i v)(\tau,s,t,x) = -\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^3 d'_{ik_t}(t-\tau,x)\frac{\partial^{3-k}v}{\partial x^{3-k}}(s,x)\,,$$

получим

$$Av = -\frac{a_1}{a_0}\int_0^t Av(s,x)ds + \frac{1}{a_0}v(t,x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t)\int_0^t (M_j v)(s,t,x)ds - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t \varphi_i(s)\left(\sum_{k=0}^3 d'_{ik_t}(t-s,x)\times\right.$$
$$\left.\times u_0^{(3-k)}(x)\right)ds - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t \varphi_i(t-s)(Q_i v)(s,x)ds + \sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^{t-s}\varphi_i(\tau)(N_i v)(\tau,s,t,x)d\tau ds -$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^m \lambda_j(t)(P_j u_0)(t,x) - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)(Q_i u_0)(0,x) - \frac{1}{a_0}f\left(t,x,\int_0^t v(s,x)ds + u_0(x),\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(s,x)ds +\right.$$
$$\left. + u'_0(x),\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(s,x)ds + u''_0(x),\int_0^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(s,x)ds + u'''_0(x)\right) - \frac{a_1}{a_0}Au_0(x) - \frac{1}{a_0}F(t,x).$$

(7)

Если рассматривать правую часть как известную функцию, то (7) является интегральным уравнением типа Вольтерра относительно неизвестной Av.

Используя резольвенту $R(t,s) = -\frac{a_1}{a_0}\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}(t-s)\right)$ ядра $-\frac{a_1}{a_0}$ и затем применяя формулу Дирихле, находим

$$
\begin{aligned}
&Av - \frac{1}{a_0}v(t,x) = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)(P_j u_0)(t,x) - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)(Q_i u_0)(0,x) + \sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\int_0^t (M_j v)\\
&(s,t,x)ds + \frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)v(s,x)ds - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \varphi_i(s)\left(\sum_{k=0}^{3} d'_{ik_t}(t-s,x)u_0^{(3-k)}(x) + \right.\\
&\left. + R(t,s)(Q_i u_0)(0,x) + \int_s^t R(t,\tau)\sum_{k=0}^{3} d'_{ik_t}(\tau-s,x)u_0^{(3-k)}(x)d\tau\right)ds - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \varphi_i(t-s)\times\\
&\times(Q_i v)(s,x)ds - \frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{m}\int_0^t R(t,s)\lambda_j(s)(P_j u_0)(s,x)ds + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^{t-s}\varphi_i(\tau)(N_i v)(\tau,s,t,x)d\tau ds +\\
&+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\int_0^s R(t,s)\lambda_j(s)(M_j v)(\tau,s,x)d\tau ds - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s R(t,s)\varphi_i(s-\tau)(Q_i v)(\tau,x)d\tau ds +\\
&+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^{s-\tau} R(t,s)\varphi_i(\nu)(N_i v)(\nu,\tau,s,x)d\nu d\tau ds - \frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)f\left(s,x,\int_0^s v(\tau,x)d\tau + u_0,\right.\\
&\left.\int_0^s \frac{\partial v}{\partial x}(\tau,x)d\tau + u'_0, \int_0^s \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau,x)d\tau + u''_0, \int_0^s \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\tau,x)d\tau + u'''_0\right)ds - \frac{1}{a_0}f\left(t,x,\int_0^t v(s,x)ds + \right.\\
&\left. + u_0, \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(s,x)ds + u'_0, \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(s,x)ds + u''_0, \int_0^t \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(s,x)ds + u'''_0\right) +\\
&+\frac{a_1}{a_0}Au_0(x)\exp(-\frac{a_1}{a_0}t) - \frac{1}{a_0}\left(F(t,x) + \int_0^t R(t,s)F(s,x)ds\right).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

При каждых фиксированных значениях t уравнение (8) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Его решение, в силу условия II, выписывается через функцию Грина в виде

$$
\begin{aligned}
&v(t,x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)m_j(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)n_i(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\int_0^t\int_0^1 G(x,\xi)(M_jv)(s,t,\xi)d\xi ds+\\
&+\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)G(x,\xi)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{i-1}^{n}\int_0^t\varphi_i(s)k_i(s,t,x)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^1\varphi_i(t-s)G(x,\xi)\times\\
&\times(Q_iv)(s,\xi)d\xi ds+\int_0^t\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(s)a_j(s,t,x)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^1 G(x,\xi)\varphi_i(\tau)(N_iv)(\tau,s,t,\xi)d\xi d\tau ds+\\
&+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 R(t,s)G(x,\xi)\lambda_j(s)(M_jv)(\tau,s,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 R(t,s)G(x,\xi)\times\\
&\times\varphi_i(s-\tau)(Q_iv)(\tau,\xi)d\xi d\tau ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^{s-\tau}\int_0^1 R(t,s)G(x,\xi)\varphi_i(\nu)(N_iv)(\nu,\tau,s\xi)d\xi d\nu d\tau ds-\\
&-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)G(x,\xi)f(s,\xi,\int_0^s v(\tau,\xi)d\tau+u_0(\xi),\int_0^s v_1(\tau,\xi)d\tau+u_0'(\xi),\int_0^s v_2(\tau,\xi)d\tau+u_0''(\xi),\\
&\left.\int_0^s v_3(\tau,\xi)d\tau+u_0'''(\xi)\right)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)f\left(t,\xi,\int_0^t v(s,\xi)ds+u_0(\xi),\int_0^t v_1(s,\xi)ds+u_0'(\xi),\right.\\
&\left.\int_0^t v_2(t,\xi)ds+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(s,\xi)ds+u_0'''(\xi)\right)d\xi+F_1(t,x)=P_1y.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $m_j(t,x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)(P_ju_0)(t,\xi)d\xi$, $n_i(x)=\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)(Q_iu_0)(0,\xi)d\xi$,

$$
\begin{aligned}
&k_i(s,t,x)=-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left(\sum_{k=0}^{3}d'_{ik_t}(t-s,\xi)u_0^{(3-k)}(\xi)+R(t,s)(Q_iu_0)(0,\xi)+\right.\\
&\left.+\int_s^t R(t,\tau)\sum_{k=0}^{3}d'_{ik_t}(s-\tau,\xi)u_0^{(3-k)}(\xi)d\tau\right)d\xi,
\end{aligned}
$$

$$a_j(s,t,x)=-\frac{1}{a_0}R(t,s)\int_0^1 G(x,\xi)(P_ju_0)(s,\xi)d\xi,\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n},$$

$$v_1(t,x)=\frac{\partial v}{\partial x},\ v_2(t,x)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\ v_3(t,x)=\frac{\partial^3 v}{\partial x^3},$$

$$F_1(t,x)=\frac{a_1}{a_0}\exp(-\frac{a_1}{a_0}t)\int_0^1 G(x,\xi)Au_0(\xi)d\xi-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x,\xi)\left(F(t,\xi)+\int_0^t R(t,s)F(s,\xi)ds\right)d\xi \qquad (10)$$

Функции $m_j(t,x)$ и $n_i(x)$, как видно из условия III, определяют матрицу $A(t,x)$. Продифференцируем (9) по x три раза:

$$v_k(t,x)+\sum_{j=1}^m\lambda_j(t)\frac{\partial^k m_j}{\partial x^k}(t,x)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\frac{\partial^k n_i}{\partial x^k}(x)=\sum_{j=1}^m\lambda_j(t)\int_0^t\int_0^1\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)\times$$
$$\times(M_jv)(s,t,\xi)d\xi ds+\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{i-1}^n\int_0^t\varphi_i(s)\frac{\partial^k k_i}{\partial x^k}(s,t,x)ds-$$
$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^1\varphi_i(t-s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)(Q_iv)(s,\xi)d\xi ds+\sum_{j=1}^m\int_0^t\lambda_j(s)\frac{\partial^k a_j}{\partial x^k}(s,t,x)ds+$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^1\varphi_i(\tau)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)(N_iv)(\tau,s,t,\xi)d\xi d\tau ds+\sum_{j=1}^m\int_0^t\int_0^s\int_0^1\lambda_j(s)R(t,s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)\times$$
$$\times(M_jv)(\tau,s,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^s\int_0^1\varphi_i(s-\tau)R(t,s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)(Q_iv)(\tau,\xi)d\xi d\tau ds+$$
$$+\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_0^s\int_0^{s-\tau}\int_0^1\varphi_i(\nu)R(t,s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)(N_iv)(\nu,\tau,s\xi)d\xi d\nu d\tau ds-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)\times$$
$$\times f\Bigg(s,\xi,\int_0^s v(\tau,\xi)d\tau+u_0(\xi),\int_0^s v_1(\tau,\xi)d\tau+u_0'(\xi),\int_0^s v_2(\tau,\xi)d\tau+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(\tau,\xi)d\tau+$$
$$+u_0'''(\xi)\Bigg)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\int_0^1\frac{\partial^k G}{\partial x^k}(x,\xi)f\Bigg(t,\xi,\int_0^t v(s,\xi)ds+u_0(\xi),\int_0^t v_1(s,\xi)ds+u_0'(\xi),$$
$$\int_0^t v_2(t,\xi)ds+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(s,\xi)ds+u_0'''(\xi)\Bigg)d\xi+\frac{\partial^k F_1}{\partial x^k}(t,x)=P_{1+k}y,\quad k=1,2.$$
$$(11)$$

При третьем дифференцировании учтем, что вторая производная функции Грина для $x=\xi$, $0<\xi<1$ претерпевает скачок на величину 1.

$$v_3(t,x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\frac{\partial^3 m_j}{\partial x^3}(t,x)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)\frac{\partial^3 n_i}{\partial x^3}(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\int_0^t[(M_jv)(s,t,x)+$$

$$+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(M_jv)(s,t,\xi)d\xi]ds+\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)[v(s,x)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)v(s,\xi)d\xi]ds+$$

$$+\int_0^t\sum_{i-1}^{n}\varphi_i(s)\frac{\partial^k k_i}{\partial x^k}(s,t,x)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\varphi_i(t-s)[(Q_iv)(s,x)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(Q_iv)(s,\xi)d\xi]ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\lambda_j(s)\frac{\partial^3 a_j}{\partial x^3}(s,t,x)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^{t-s}\varphi_i(\tau)[(N_iv)(\tau,s,t,x)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(N_iv)(\tau,s,t,\xi)d\xi]$$

$$d\tau ds+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\int_0^s\lambda_j(s)R(t,s)[(M_jv)(\tau,s,x)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(M_jv)(\tau,s,\xi)d\xi]d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\varphi_i(s-\tau)R(t,s)[(Q_iv)(\tau,x)+\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(Q_iv)(\tau,\xi)d\xi]d\tau ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^{s-\tau}\varphi_i(\nu)R(t,s)[(N_iv)(\nu,\tau,s,x)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)(N_iv)(\nu,\tau,s\xi)d\xi]d\nu d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t R(t,s)\Bigg[f\Bigg(s,x,\int_0^s v(\tau,x)d\tau+u_0(x),\int_0^s v_1(\tau,x)d\tau+u_0'(x),\int_0^s v_2(\tau,x)d\tau+u_0''(x),$$

$$\int_0^s v_3(\tau,x)d\tau+u_0'''(x)\Bigg)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)f\Bigg(s,\xi,\int_0^s v(\tau,\xi)d\tau+u_0(\xi),\int_0^s v_1(\tau,\xi)d\tau+u_0'(\xi),$$

$$\int_0^s v_2(\tau,\xi)d\tau+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(\tau,\xi)d\tau+u_0'''(\xi)\Bigg)\Bigg]ds-\frac{1}{a_0}\Bigg[f\Bigg(t,x,\int_0^t v(s,x)ds+u_0(x),\int_0^t v_1(s,x)ds+$$

$$+u_0'(x),\int_0^t v_2(t,x)ds+u_0''(x),\int_0^s v_3(s,x)ds+u_0'''(x)\Bigg)+\int_0^1\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(x,\xi)f\Bigg(t,\xi,\int_0^t v(s,\xi)ds+u_0(\xi),$$

$$\int_0^t v_1(s,\xi)ds+u_0'(\xi),\int_0^t v_2(s,\xi)ds+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(s,\xi)ds+u_0'''(\xi)\Bigg)d\xi+\frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3}(t,x)=P_4y.$$

(12)

В уравнении (9) полагая $x=x_k$, k=1, 2,…, $m+n$ получим еще $m+n$ уравнений:

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)m_j(t,x_k)+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(t)n_i(x_k)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(t)\int_0^t\int_0^1 G(x_k,\xi)(M_jv)(s,t,\xi)d\xi ds+$$

$$+\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)G(x_k,\xi)v(s,\xi)d\xi ds+\sum_{i-1}^{n}\int_0^t\varphi_i(s)k_i(s,t,x_k)ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^1\varphi_i(t-s)G(x_k,\xi)\times$$

$$\times(Q_iv)(s,\xi)d\xi ds+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\lambda_j(s)a_j(s,t,x_k)ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^1\varphi_i(\tau)G(x_k,\xi)(N_iv)(\tau,s,t,\xi)d\xi d\tau ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 R(t,s)G(x_k,\xi)\lambda_j(s)(M_jv)(\tau,s,\xi)d\xi d\tau ds-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^1 R(t,s)G(x_k,\xi)\times$$

$$\times\varphi_i(s-\tau)(Q_iv)(\tau,\xi)d\xi d\tau ds+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_0^s\int_0^{s-\tau}\int_0^1 R(t,s)G(x_k,\xi)\varphi_i(\nu)(N_iv)(\nu,\tau,s\xi)d\xi d\nu d\tau ds-$$

$$-\frac{1}{a_0}\int_0^t\int_0^1 R(t,s)G(x_k,\xi)f\Big(s,\xi,\int_0^s v(\tau,\xi)d\tau+u_0(\xi),\int_0^s v_1(\tau,\xi)d\tau+u_0'(\xi),\int_0^s v_2(\tau,\xi)d\tau+u_0''(\xi),$$

$$\int_0^s v_3(\tau,\xi)d\tau+u_0'''(\xi)\Big)d\xi ds-\frac{1}{a_0}\int_0^1 G(x_k,\xi)f\Big(t,\xi,\int_0^t v(s,\xi)ds+u_0(\xi),\int_0^t v_1(s,\xi)ds+u_0'(\xi),$$

$$\int_0^t v_2(t,\xi)ds+u_0''(\xi),\int_0^s v_3(s,\xi)ds+u_0'''(\xi)\Big)d\xi+F_1(t,x_k)-g_k'(t)=P_{4+k}y. \tag{13}$$

Таким образом, получили систему

$$A(t,x)y(t,x)=Qy=\begin{Bmatrix}P_1y\\ P_2y\\ \dots\dots\\ P_{4+m+n}y\end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где $y(t,x)$=($v(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t,x)$, $\lambda(t)$, $\varphi(t)$), $\lambda(t)$=($\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_m(t)$),

$\varphi(t)$= ($\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$), P_ky (k=1, 2,…, 4+m+n) – правые части уравнений (9′), (11)-(13). В силу условия III существует матрица

$$A^{-1}(t,x)=\begin{pmatrix}\gamma_{11}(t,x) & \dots & \gamma_{1,4+m+n}(t,x)\\ \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{4+m+n,1}(t,x) & \dots & \gamma_{4+m+n,4+m+n}(t,x)\end{pmatrix},$$

обратная матрице $A(t,x)$. Пусть норма этой матрицы удовлетворяет условию

$$\left\|A^{-1}(t,x)\right\|_{C(D)} = \sum_{i=1}^{4+m+n} \max_{j=1,\dots,4+m+n} \left\{ \sup_{(t,x)\in D} \left|\gamma_{ij}(t,x)\right| \right\} \le c_0, \tag{15}$$

где c_0 – известная положительная постоянная. Умножая обе части системы (14) на $A^{-1}(t,x)$, находим

$$y(t,x) = Sy = A^{-1}(t,x)Qy = A^{-1}(t,x)\begin{pmatrix} P_1 y \\ \dots\dots \\ P_{4+m+n} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Таким образом, обратную задачу (1)-(4) свели к системе (16), которая является замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $v(t,x)$, $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_m(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_n(t)$.

Введем банахово пространство $X=(C_4(D)\times C_{m+n}[0,T]\ )$, где $C_4(D)=C(D)\times C(D)\times C(D)\times C(D)$, $C_{m+n}[0,T]$ – пространство $m+n$ - мерных векторных функций с элементами из $C[0,T]$. Для каждого элемента $y(t,x)\in X$ определяем норму

$$\|y\|_X = \|v\|_{C(D)} + \|v_1\|_{C(D)} + \|v_2\|_{C(D)} + \|v_3\|_{C(D)} + \sum_{j=1}^{m} \|\lambda_j\|_{C[0,T]} + \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|_{C[0,T]},$$

где $\|v\|_{C(D)} = \sup\limits_{(t,x)\in D} |v(t,x)|$, $\|\lambda_j\|_{C[0,T]} = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\lambda_j|$, $\|\varphi_i\|_{C[0,T]} = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\varphi_i|$.

Покажем существование единственной фиксированной точки отображения

$$S: X\to X,\ S: y\to Sy.$$

Так как заданные функции предполагаются непрерывными, то они ограничены. Из формулы (10) вытекает, что можно выбрать положительное число R такое, что

$$\|y_0\|_X \le R/c_0, \tag{17}$$

где $y^0=(v^0(t,x),\ v_1^0(t,x),\ v_2^0(t,x),\ v_3^0(t,x),\ \lambda^0,\ \varphi^0(t)$, т.е. $y^0 = S\bar{0}$, $\bar{0}$ - $(4+m+n)$-мерный нулевой вектор.

Рассмотрим шар $B_{2R} = \{y \in X : \|y\|_x \le 2R\}$ и покажем, что для достаточно малых T отображение S переводит шар B_{2R} в себя и является сжимающим.

Пусть все известные функции, входящие в систему (16), меньше некоторого положительного числа d. Тогда для любого $y(t,x)\in X$ из (9′), (11)-(13) с учетом условия IV, имеем

$$\|P_k y\|_X \le \frac{2d}{|a_0|}\left\{\left[2dT + (d+d^2)T^2 + \frac{1}{3}d^2T^3\right]R^2 + \left[\left(|a_0| + d + L\right)T + dLT^2\right]R\right\} + \tag{18}$$
$$+\delta_1\|v_k^0\| + \delta_2\|\lambda_k^0\| + \delta_3\|\varphi_k^0\|, \qquad k = 1,2,3,5,6,...,4+m+n,$$

где $\delta_1 = \begin{cases}1, при\, k \le 3\\ 0, при\, k > 3\end{cases}$, $\delta_2 = \begin{cases}1, при\, 3 < k \le m\\ 0, при\, k < 3 \;и\; k > m\end{cases}$, $\delta_3 = \begin{cases}1, при\, k > m\\ 0, при\, k \le m\end{cases}$,

$$\|P_4 y\|_X \le \frac{2(1+d)}{|a_0|}\left\{\left[2dT + (d+d^2)T^2 + \frac{1}{3}d^2T^3\right]R^2 + \left[\left(|a_0| + d + L\right)T + dLT^2\right]R\right\} + \|v_4^0\|. \tag{19}$$

Учитывая (15), (18), (19) из (16) для достаточно малых $T' \in (0,T]$, получим

$$\|Sy\|_X \le c_0 \sum_{k=1}^{4+m+n}\|P_k y\|_X \le \left\{(k_1T' + k_2T'^2 + k_3T'^3)R + k_4T' + k_5T'^2\right\}R + \|y^0\|_X, \tag{20}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – известные положительные постоянные, зависящие от a_0, c_0, m, n, L и не зависящие от T' и R.

Пусть теперь $y^1, y^2 \in B_{2R}$. Тогда при $k = 1, 2, 3, 5, 6, \ldots, 4+m+n$:

$$\|P_k y^1 - P_k y^2\|_X \le \frac{d}{|a_0|}\left\{\left[2dT + (d+d^2)T + \frac{1}{3}d^2T^3\right]R + \left(|a_0| + d + L\right)T + dLT^2\right\}\|y^1 - y^2\|_X, \tag{21}$$

$$\|P_4 y^1 - P_4 y^2\|_X \le \frac{1+d}{|a_0|}\left\{\left[2dT + (d+d^2)T + \frac{1}{3}d^2T^3\right]R + \left(|a_0| + d + L\right)T + dLT^2\right\}\|y^1 - y^2\|_X. \tag{22}$$

В силу оценок (15), (21), (22) из (16) имеем

$$\begin{aligned}\|Sy^1 - Sy^2\|_X &= \|A^{-1}(t,x)\|_{C(D)} \sum_{k=1}^{4+m+n}\|P_k y^1 - P_k y^2\|_X \le \\ &\le 2\left\{(k_1T' + k_2T'^2 + k_3T'^3)R + k_4T' + k_5T'^2\right\}\|y^1 - y^2\|_X.\end{aligned} \tag{23}$$

Из оценок (20), (23) следует, что для достаточно малых $T' \in (0, T]$ оператор S отображает шар B_{2R} в себя и является сжимающим, если T' удовлетворяет неравентсву $(k_1T' + k_2T'^2 + k_3T'^3)R + k_4T' + k_5T'^2 < \frac{1}{2}$. Таким образом доказана

Теорема 1. Пусть выполняются условия I-IV. Тогда существует $T' \in (0, T]$ такое, что обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение из пространства $C^{1,3}(D) \times C_{m+n}[0,T]$.

Оценка устойчивости. Пусть $\{u^i(t,x), \lambda^i(t), K^i(t)\}$, i=1,2 – два решения обратной задачи (1)-(4) с данными $u_0^i(x)$, $g^i(t)$, $F^i(t,x)$, где $\lambda^i(t)=(\lambda_1^i(t),\ldots,\lambda_m^i(t))$, $K^i(t)=(K_1^i(t),\ldots,K_n^i(t))$, $g^i(t)=(g_1^i(t),\ldots,g_{m+n}(t))$. Тогда

$$u_t^i(t,x) = a_0(Au^i)_t' + a_1(Au^i) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^i(t)(P_j u^i)(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t K_j^i(t-s)(Q_j u^i)(s,x)ds + \\ + f\left(t, x, u^i, \frac{\partial u^i}{\partial x}, \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u^i}{\partial x^3}\right) + F^i(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{24}$$

$$u^i(0,x) = u_{0i}(x),\ x\in[0,1], \tag{25}$$

$$\alpha_{j0}u_{xx}^i(t,0)+\alpha_{j1}u_{xx}^i(t,1)+\alpha_{j2}u_x^i(t,0)+\alpha_{j3}u_x^i(t,1)+\alpha_{j4}u^i(t,0)+\alpha_{j5}u^i(t,1)=0,\ j=1,2,3, \tag{26}$$

$$u^i(t,x_j) = g_j^i(t),\ g_i(t)\in C^1[0,T],\ \ j=1,2,\ \ldots,\ m+n \tag{27}$$

Предположим, что для решений обратной задачи справедлива оценка

$$\left\|u_t^i\right\|_{C(D)} + \left\|u_{tx}^i\right\|_{C(D)} + \left\|u_{txx}^i\right\|_{C(D)} + \left\|u_{txxx}^i\right\|_{C(D)} + \left\|\lambda^i\right\|_{C[0,T]} + \left\|K^i\right\|_{C[0,T]} \le R_0,\ i=1,2, \tag{28}$$

где $0<R_0$ – некоторое положительное число.

Проведя исследование, аналогичное вышеизложенному, из (24)-(27) получим системы

$$A_i(t,x)y^i(t,x) = Q(u_{0i},F_i,g_j^i)y^i = \left\{\begin{array}{c} P_1(u_{0i},F_i)y^i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_4(u_{0i},F_i)y^i \\ P_5(u_{0i},F_i,g_1^i)y^i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{4+m+n}(u_{0i},F_i,g_{m+n}^i)y^i \end{array}\right\},\ i=1,2, \tag{29}$$

где $A_i(t,x)$, $P_k y^i$ определены из условия III, (9′), (11)-(13) при $u_0 = u_{0i}$, $F=F^i$, $g_j=g_j^i$.

Для оценки разности матриц получаем

$$\left\|A_1 - A_2\right\|_{C(D)} \le B_0\left(\left\|u_{01}-u_{02}\right\|_{C[0,1]} + \left\|u_{01}'-u_{02}'\right\|_{C[0,1]} + \left\|u_{01}''-u_{02}''\right\|_{C[0,1]} + \left\|u_{01}'''-u_{02}'''\right\|_{C[0,1]}\right), \tag{30}$$

где $0<B_0$ – некоторая постоянная. Найдем разность систем (29)

$$A_1y^1 - A_2y^2 = Q(u_{01},F^1,g_j^1)y^1 - Q(u_{02},F^2,g_j^2)y^2,$$

используя при этом следующее преобразование

$$A_1(y^1-y^2) = -(A_1-A_2)y^2 + Q(u_{01},F^1,g_j^1)y^1 - Q(u_{02},F^2,g_j^2)y^2. \tag{31}$$

Так как по условию III $det\ A_i(t,x)\neq 0$, то, умножая обе части равенства (31) на A_1^{-1}, получим

$$y^1 - y^2 = A_1^{-1}[-(A_1 - A_2)y^2 + Q(u_{01}, F^1, g_j^1)y^1 - Q(u_{02}, F^2, g_j^2)y^2]. \tag{32}$$

Пусть $\left\|A_1^{-1}(t,x)\right\| \le B_1$, (33)

где B_1 – известная положительная постоянная. Из (29) для разности систем в силу (28), условия IV имеем

$$\begin{aligned} &\|Qy_1 - Qy_2\|_{X_1} \le l_1\|y_1 - y_2\|_{X_1} + l_2\int_0^t \left\|y^1(s,x) - y^2(s,x)\right\|_{X_1} ds + \\ &+ l_3\left(\|u_{01} - u_{02}\|_{C[0,1]} + \|u'_{01} - u'_{02}\|_{C[0,1]} + \|u''_{01} - u''_{02}\|_{C[0,1]} + \|u'''_{01} - u'''_{02}\|_{C[0,1]}\right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{3}\left\|\frac{\partial^k F_1^1}{\partial x^k} - \frac{\partial^k F_1^2}{\partial x^k}\right\|_{C(D)} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|F_1^1(t,x_k) - F_1^2(t,x_k)\right\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|g_{kt}^1(t) - g_{kt}^2(t)\right\|_{C[0,T]}, \end{aligned} \tag{34}$$

где l_1, l_2, l_3 – положительные постоянные, зависящие от R_0, T, L, m, n, X_1 – пространство функций $z(x,t)$, $x\in[0,1]$, $t\in[0,\mathrm{T}]$ и норма в этом пространстве определяется следующим образом: $\|z\|_{X_1} = \sup\limits_{x\in[0,1]}|z(x,t)|$. Учитывая (30), (33), (34) для оценки соотношения (32) получаем

$$\begin{aligned} &\|y_1 - y_2\|_{X_1} \le B_1\Big\{R_0B_0\left(\|u_{01} - u_{02}\| + \|u'_{01} - u'_{02}\| + \|u''_{01} - u''_{02}\| + \|u'''_{01} - u'''_{02}\|\right) + l_1\|y_1 - y_2\|_{X_1} + \\ &+ l_2\int_0^t \left\|y^1(s,x) - y^2(s,x)\right\|_{X_1} ds + l_3\left(\|u_{01} - u_{02}\| + \|u'_{01} - u'_{02}\| + \|u''_{01} - u''_{02}\| + \|u'''_{01} - u'''_{02}\|\right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{3}\left\|\frac{\partial^k F_1^1}{\partial x^k} - \frac{\partial^k F_1^2}{\partial x^k}\right\|_{C(D)} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|F_1^1(t,x_k) - F_1^2(t,x_k)\right\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|g_{kt}^1(t) - g_{kt}^2(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\} \end{aligned}$$

или $\|y_1 - y_2\|_{X_1} \le M_1\int_0^t \left\|y^1(s,x) - y^2(s,x)\right\|_{X_1} ds + M_2$, (35)

где $M_1 = l_2B_1 / |1 - l_1B_1|$

$$\begin{aligned} &M_2 = \frac{l_3 + R_0B_0}{|1 - l_1B_1|}\left(\|u_{01} - u_{02}\| + \|u'_{01} - u'_{02}\| + \|u''_{01} - u''_{02}\| + \|u'''_{01} - u'''_{02}\|\right) + \frac{B_1}{|1 - l_1B_1|} \times \\ &\times \left\{\sum_{k=0}^{3}\left\|\frac{\partial^k F_1^1}{\partial x^k} - \frac{\partial^k F_1^2}{\partial x^k}\right\|_{C(D)} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|F_1^1(t,x_k) - F_1^2(t,x_k)\right\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{m+n}\left\|g_{kt}^1(t) - g_{kt}^2(t)\right\|_{C[0,T]}\right\} \end{aligned} \tag{36}$$

В силу обозначения (10) для разности функций F_1 и F_2 имеем следующую оценку

$$\sum_{k=0}^{3}\sup\left|\frac{\partial^k F_1^1}{\partial x^k}-\frac{\partial^k F_1^2}{\partial x^k}\right|+\sum_{k=1}^{m+n}\sup\left|F_1^1(t,x_k)-F_1^2(t,x_k)\right|\le l_4\Big(\left\|F^1-F^2\right\|_{C(D)}+ \tag{37}$$
$$\left\|u_{01}-u_{02}\right\|+\left\|u'_{01}-u'_{02}\right\|+\left\|u''_{01}-u''_{02}\right\|+\left\|u'''_{01}-u'''_{02}\right\|\Big),$$

где $0<l_4$ – некоторая постоянная. В силу неравенства Гроноулла-Беллмана из (35) находим

$$\left\|y_1-y_2\right\|_X\le M_2\exp(M_1T),\quad \forall t\in[0,T]. \tag{38}$$

Учитывая формулы (5), (6) и оценку (34) из (35) приходим к следующей оценке устойчивости в целом:

$$\left\|u^1-u^2\right\|_{C(D)}+\left\|u_t^1-u_t^2\right\|_{C(D)}+\left\|u_{tx}^1-u_{tx}^2\right\|_{C(D)}+\left\|u_{txx}^1-u_{txx}^2\right\|_{C(D)}+\left\|u_{txxx}^1-u_{txxx}^2\right\|_{C(D)}+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left\|\lambda_j^1-\lambda_j^2\right\|_{C[0,T]}+\sum_{i=1}^{n}\left\|K_i^1-K_i^2\right\|_{C[0,T]}\le q\Big\{\left\|u_{01}-u_{02}\right\|+\left\|u'_{01}-u'_{02}\right\|+\left\|u''_{01}-u''_{02}\right\|+ \tag{39}$$
$$+\left\|u'''_{01}-u'''_{02}\right\|+\left\|F^1(t,x)-F^2(t,x)\right\|_{C(D)}+\sum_{k=1}^{m+n}\left\|g_{kt}^1(t)-g_{kt}^2(t)\right\|_{C[0,T]}\Big\},$$

где q – положительная постоянная, зависящая от R_0, T, L, B_0, B_1, m, n.

Таким образом, получили теорему об оценке устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 2. Пусть выполняются условия I-IV и пусть $\{u^i(t,x), \lambda^i(t), K^i(t)\}$, $i=1,2$ - два произвольных решения обратной задачи (1)-(4) из пространства $C^{1,3}(D)\times C_{m+n}[0,T]$ с данными $u_0^i(x)$, $g^i(t)$, $F^i(t,x)$, удовлетворяющие условию (25). Тогда справедлива оценка устойчивости (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г. РОМАНОВ, Обратные задачи математической физики, М.: Наука, 1984.
2. A.ASANOV, E.R. ATAMANOV, Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations, VSP, 1997.
3. А.АСАНОВ, Э.Р. АТАМАНОВ, Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения// Сиб.мат. журн., 1995. Т.36, №4. С.752-762.
4. М. ГРАССЕЛИ, С.И. КАБАНИХИН, А.ЛОРЕНЦИ, Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения // Сиб.мат. журн. 1992. Т.33, №3. С.58-68.
5. А.АСАНОВ, К. МАТАНОВА, Восстановление ядер для интегродифференциального уравнения 4 порядка с частными производными // Конференция посв. Иманалиеву
6. А. АСАНОВ, Б. СУЛАЙМАНОВ, Нелинейная обратная задача для дифференциальных уравнений типа Уизема. // Вестник КГНУ. 2001. Вып.5.

7. М.А.КУЛИЕВ, Многомерная обратная задача для линейного гиперболического уравнения в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 1. С.98-101.
8. А.М. ДЕНИСОВ, Существование решения обратной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С.1155-1164.
9. М.И. ИМАНАЛИЕВ, Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение, Фрунзе: Илим, 1977
10. ISAKOV V. Inverse problems for partial differential equation. New York etc.: Springer, 1998.
11. М.Л. КРАСНОВ, Интегральные уравнения, М.: Наука, 1975.