АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АДДИТИВНОЙ БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Asymptotics of solutions of parabolic equations with additive rapidly oscillating right frequently

Омуралиев А.С.

Шейшенова Ш.К.

asan.omuraliev@mail.ru

Abstract

In this article constructs regularized asymptotic expansion of the solution to a singularly perturbed two-dimension parabolic problem, here is absent spectr – predation of operator and the right part is additive quick- oscillate function.

Keywords: singularly perturbed parabolic problems, regularized asymptotics

Введение

В предыдущих работах были изучены сингулярно возмущенные параболические задачи в случае, когда правая часть содержала только одну быстроосциллирующую функцию. В частности в работе [1] рассматривалась скалярная, а в [2] многомерная задача. Присутствие в правой части быстроосциллирующей функции приводит к появлению в решении дополнительной погранслойной функции, имеющей быстроосциллирующий характер изменения.

В статье строится регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной двумерной параболической задачи, когда отсутствует спектр предельного оператора, а правая часть является аддитивной быстроосциллирующей функцией.

П.1.Постановка задачи. Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv \partial_t u - \varepsilon^2 \Delta u - b(x,t)u = \sum_{k=1}^{m} f_k(x,t) \exp\left(\frac{i\theta_k(t)}{\varepsilon}\right), (x,t) \in \Omega_1,$$

$u(x,t,\varepsilon)|_{t=0} = h(x),\ u(x,t,\varepsilon)|_{\partial\Omega} = 0,$**(1)**

где $\Omega_1 = \Omega \times (0,T],\ \Omega = \{x = (x_1,x_2): x_1, x_2 \in (0,1)\}$.Здесь $\varepsilon > 0$ - малый параметр, i=$\sqrt{-1},\ \Delta \equiv \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$.

Задача (1), когда правая часть не являлся быстроосциллирующей функций изучена в [3], там построена асимптотика решения содержащая параболические и угловые параболические погранслойные функции.

Предположим выполненными следующие условия:

1. функции $b(x,t), f_k(x,t) \in C^\infty(\overline{\Omega_1}), h(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \theta_k(t) \in C^\infty[0,T]$;
2. $\forall\ t \in [0,T]$ функция $\theta_k{}'(t) \neq 0$;
3. выполнены условия согласования начальных и граничных условий $h(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

П.2. Регуляризация задачи

Произведем расширение исходной задачи. Для чего введем регуляризующие переменные

$$\xi_l = \frac{x_l}{\varepsilon},\quad \eta_l = \frac{1-x_l}{\varepsilon},\ \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \gamma_k = \frac{\theta_k(t) - \theta_k(0)}{\varepsilon},\qquad \zeta_l = \frac{x_l}{\varepsilon^2},$$

$$q_l = \frac{1-x_l}{\varepsilon^2},\qquad l = 1,2,\ \ k = 1,2,\dots,m$$

и объявим их, наряду с переменными (x_1,x_2,t), независимыми переменными расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, $M=(x,t,\xi,\eta,\zeta,q,\gamma)$ такой, что

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \qquad \textbf{(2)}$$

$$\mu=(\xi,\eta,\zeta,q,\gamma), \quad \xi=(\xi_1,\xi_2), \quad \eta=(\eta_1,\eta_2), \quad \zeta=(\zeta_1,\zeta_2), \quad q=(q_1,q_2),$$

$$\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m), \;\; \psi(x,t,\varepsilon)=\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{1-x}{\varepsilon},\frac{x}{\varepsilon^2},\frac{1-x}{\varepsilon^2},\frac{t}{\varepsilon^2},\frac{\theta(t)-\theta(0)}{\varepsilon}\right)$$

Найдем производные $\partial_t\tilde{u}\equiv\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}$, $\partial_{x_l}\tilde{u}\equiv\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_l}$, $\partial_{x_l}^2\tilde{u}\equiv\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_l^2}$, с учетом регуляризующих переменных, получим

$$\partial_t u(x,t,\varepsilon)\equiv\left(\partial_t\tilde{u}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\partial_\tau\tilde{u}(M,\varepsilon)\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\varepsilon}\theta_k'(t)\partial_{\gamma_k}\tilde{u}(M,\varepsilon)\right)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial_{x_l}u(x,t,\varepsilon)\equiv\left(\partial_{x_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon}\left[\partial_{\xi_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)-\partial_{\eta_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)\right]\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\partial_{\zeta_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)-\partial_{q_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)\right]\right)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)},$$

$$\partial_{x_l}^2u(x,t,\varepsilon)\equiv(\partial_{x_l}^2\tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\partial_{\xi_l}^2\tilde{u}(M,\varepsilon)+\partial_{\eta_l}^2\tilde{u}(M,\varepsilon)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon}\left[L_{\xi,l}-L_{\eta,l}\right]\tilde{u}(M,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon^4}\left[\partial_{\zeta_l}^2+\partial_{q_l}^2\right]\tilde{u}(M,\varepsilon)+$$

$$+\textstyle\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{\varepsilon^2}\left[L_{\zeta,l}-L_{q,l}\right]\tilde{u}(M,\varepsilon))|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)},\ L_{\zeta,l}\equiv 2\partial_{x_l,\zeta_l}^2, \qquad \textbf{(3)}$$

$$L_{q,l}\equiv 2\partial_{x_l,q_l}^2,\qquad L_{\eta,l}\equiv 2\partial_{x_l,\eta_l}^2,\qquad L_{\xi,l}\equiv 2\partial_{x_l,\xi_l}^2,$$

На основании (1),(2),(3), для расширенной функции $\tilde{u}(M,\varepsilon)$, поставим задачу

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{u}(M,\varepsilon)\equiv\frac{1}{\varepsilon^2}\,T_1\tilde{u}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m}\theta_k'(t)\partial_{\gamma_k}\tilde{u}(M,\varepsilon)+T_2\tilde{u}(M,\varepsilon)-[L_\zeta - L_q]\tilde{u}(M,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\left[L_\xi-L_\eta\right]\tilde{u}(M,\varepsilon)-\epsilon^2\Delta\tilde{u}(M,\varepsilon))=\sum_{k=1}^{m}f_k(x,t)\exp\left(i\gamma_k+\frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right),$$

$$M\in Q,$$

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)|_{t=\tau=\nu=0}=h(x),\ \tilde{u}(M,\varepsilon)|_{\partial Q_1}=0, \qquad \textbf{(4)}$$

здесь введены обозначения

$$Q=\Omega_1\times D\times\{\tau\geq 0\}\times\{\nu\in R\},\qquad D=\{\xi,\eta,\zeta,q\geq 0\},$$

$$Q_1=\Omega\times D,$$

$$T_1\equiv\partial_\tau-\Delta_\zeta-\Delta_q,\qquad T_2\equiv\partial_t-\Delta_\xi-\Delta_\eta-b(x,t),\qquad \Delta_\zeta\equiv\partial_{\zeta_1}^2+\partial_{\zeta_2}^2,$$

$$\Delta_q\equiv\partial_{q_1}^2+\partial_{q_2}^2,\ \Delta_\xi\equiv\partial_{\xi_1}^2+\partial_{\xi_2}^2,\ \Delta_\eta\equiv\partial_{\eta_1}^2+\partial_{\eta_2}^2,\ L_\zeta\equiv\textstyle\sum_{l=1}^{2}L_{\zeta,l},$$

$$L_q \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{q,l}\,,\ \ L_\xi \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{\xi,l}\,,\ \ L_\eta \equiv \sum_{l=1}^{2} L_{\eta,l}.$$

Расширенная задача (4) регулярна по ε при $\varepsilon \to 0$, ибо имеет место тождество:

$$\left(\tilde{L}_\varepsilon \tilde{u}(M,\varepsilon)\right)|_{\mu=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon). \qquad (\mathbf{5})$$

Поэтому вправе искать решение расширенной задачи (4) в виде ряда обычной теории возмущения

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(M) \qquad (\mathbf{6})$$

Подставим ряд (6) в задачу (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, тогда получим следующие итерационные задачи:

$$T_1 u_0(M) = 0, \quad T_1 u_1(M) = -\sum_{k=1}^{m} \theta_k'(t)\partial_{\gamma_k} u_0(M), \quad T_1 u_2(M) = -\sum_{k=1}^{m} \theta_k'(t)\partial_{\gamma_k} u_1(M) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} f_k(x,t)\exp\left(i\gamma_k + \frac{i\theta(0)}{\varepsilon}\right) - T_2 u_0(M) + L_\zeta u_0(M) - L_q u_0(M), \qquad (\mathbf{7})$$

$$T_1 u_k(M) = -\sum_{k=1}^{m} \theta_k'(t)\partial_{\gamma_k} u_{k-1}(M) - T_2 u_{k-2}(M) + L_\zeta u_{k-2}(M) -$$

$$-L_q u_{k-2}(M) + L_\xi u_{k-3}(M) - L_\eta u_{k-3}(M) + \Delta u_{k-4}(M),$$

$$u_0(M)|_{t=\tau=\nu=0} = h(x), \quad u_k(M)|_{t=\tau=\nu=0} = 0, \quad u_k(M)|_{\partial Q_1} = 0, k \geq 1.$$

П.3. Решение итерационных задач

Итерационные задачи (7) будем решать в специальном классе функций. Малый параметр при лапласиане приводит к возникновению параболических пограничных слоев вдоль $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1$ и угловых пограничных слоев вдоль ребер. Быстроосциллирующая функция присутствующая в правой части также приводит к возникновению пограничного слоя вдоль *t=0*, имеющий такой же характер изменения. Исходя из сказанного вытекает, что этим классом решения является класс функций:

$$U = \left\{ u(M) : u(M) = v(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \exp(i\gamma_k) \left[c_k(x,t) + \sum_{l=1}^{2} \left(Y_{l,k}(N_l) + Z_{l,k}(P_l) \right) \right] + \right.$$

$$+ \textstyle\sum_{l=1}^{2} [\, y_l(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) + d_l(x,t) erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)], |Y_l(N_l)| < c\ exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right),$$

$$|Z_l(P_l)| < c\exp\left(-\frac{q_l^2}{8\tau}\right),$$

$$erfc\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp(-s^2)\,ds,\ \ P_l = (x, t, \tau, q_l),$$

$$v(x,t), c(x,t), y_l(x,t), d_l(x,t), \omega_{l,j}(x,t) \in C^{\infty}(\overline{\Omega_1}), N_l = (x, t, \tau, \zeta_l)\}\ .$$

Вычислим действие операторов участвующих в уравнении (7) на функцию *u(M)*, имеем:

$$T_1 u(M) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_\tau Y_{l,k} - \Delta_\zeta Y_{l,k} + \partial_q Z_{l,k} - \Delta_q Z_{l,k}\right]$$

$T_2 u =$
$[\partial_t v - b(x,t)v(x,t)] + \sum_{k=1}^{m}\exp(i\gamma_k)\,\{[\partial_t c_k(x,t) - b(x,t)c_k(x,t)]+$
$+\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_t Y_{l,k} - b(x,t)Y_{l,k} + \partial_t Z_{l,k} - b(x,t)Z_{l,k}\right]\} + \sum_{l=1}^{2}[\partial_t y_l -$
$b(x,t)y_l]erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) +$
$+\sum_{l=1}^{2}[\partial_t d_l - b(x,t)d_l]erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right), L_\xi u(M) =$
$\sum_{l=1}^{2}\left[2\partial_{x_l} y_l(x,t)\ \right]\partial_{\xi_l}(erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{\tau}}\right)),$

$$L_\eta u(M) = \sum_{l=1}^{2}\left[2\partial_{x_l} d_l(x,t)\right]\partial_{\eta_l}\left(erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right),\quad L_q u(M)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2}\exp(i\gamma_k)\,2\,\partial^2_{x_l\zeta_l} Z_{l,k}(P_l)\ ,$$

$$L_\zeta u(M) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{2} 2\exp(i\gamma_k)\,\partial^2_{x_l q_l} Y_{l,k}(N_l) \qquad (8)$$

Кроме того, асимптотика решения содержит дополнительно еще угловой параболический пограничный слой, который описывается произведением быстроосциллирующей и параболической погранслойных функций.

Удовлетворим функцию *u(M)* из класса *U* краевым условиям из (7):

$$v(x,0)+\sum_{k=1}^{m}\left(c_k(x,0)+\sum_{l=1}^{2}\left[Y_{l,k}(N_l)|_{t=\tau=0}+Z_{l,k}(P_l)|_{t=\tau=0}\right]\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}[y_l(x,0)\cdot 0+d_l(x,0)\cdot 0]=h(x),$$

$$v(x,t)|_{x_l=0}+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}}\exp(i\gamma_k)\,[c_k(x,t)|_{x_{l=0}}$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left(Y_{l,k}(N_l)|_{\zeta_l=0}+Z_{l,k}(P_l)|_{q_l=\frac{1}{\varepsilon}}\right)]+$$

$$\sum_{l=1}^{2}[y_l(x,t)|_{x_l=0}+d_l(x,t)|_{x_l=0}erfc\left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)]=0$$

$$v(x,t)|_{x_l=1}+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\exp(i\gamma_k)\,[c_k(x,t)|_{x_{l=1}}$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left(Y_{l,k}(N_l)|_{\zeta_l=1/\varepsilon}+Z_{l,k}(P_l)|_{q_l=0}\right)]+$$

$$+\sum_{l=1}^{2}[y_l(x,t)|_{x_l=1}erfc\left(\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{t}}\right)+d_l(x,t)|_{x_l=1}]=0.$$

Из этих соотношений определим начальные условия для произвольных функций входящих входящих в *u(M):*

$$v(x,t)|_{t=0} = h(x) - \sum_{k=1}^{m} c_k(x,0), \quad Y_{l,k}(N_l)|_{\tau=0} = 0, \qquad Z_{l,k}(P_l)|_{\tau=0} = 0,$$

$$y_l(x,t)|_{t=0} = n_l(x), \qquad d_l(x,t)|_{t=0} = m_l(x),$$

$$\begin{aligned} &Y_{l,k}(N_l)|_{\zeta_l=0,x_l=0} = -c_k(x,t)|_{x_l=0}, \;\; y_l(x,t)|_{x_l=0} \\ &= -v(x,t)|_{x_l=0}, \;\; Z_{l,k}(P_l)|_{x_l=1,q_l=0} \\ &= -c_k(x,t)|_{x_l=1}, \quad d_l(x,t)|_{x_l=1} \\ &= -v \quad (x,t)|_{x_l=1}, \qquad\qquad \mathbf{(9)} \end{aligned}$$

где $n_l(x)$, $m_l(x)$– произвольные функции.

Подставим в уравнение (7) при $k=0$ функцию

$$u_0(M)=v_0(x,t)+\sum_{k=1}^{m} exp(i\gamma_k)\left[c_{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}(Y_{l,k}^0(N_l) + Z_{l,k}^0(P_l)\right] +$$

$$+\sum_{l=1}^{2}\left[y_{l,0}(x,t) erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) + d_{l,0}(x,t) erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \quad \mathbf{(10)}$$

Она будет удовлетворять уравнению (7), если $Y_{l,k}^0(N_l)$, $Z_{l,k}^0(P_l)$ будут решениями уравнений

$$T_{1,l}^1 Y_{l,k}^0(N_l) = 0, \;\; T_{1,l}^2 Z_{l,k}^0(P_l) = 0, \qquad T_{1,l}^1 \equiv \partial_\tau - \partial_{\zeta_l}^2, \qquad T_{1,l}^2 \equiv \partial_\tau - \partial_{q_l}^2$$

Решение этих уравнений, на основании вышеприведенных вычислений, при соответствующих условиях из (9) запишутся

$$Y_{l,k}^0(N_l) = k_{l,k}^0(x,t) erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right), \;\; k_{l,k}^0(x,t)|_{x_l=0} = -c_{k,0}(x,t)_{x_l=0}$$

$Z^0_{l,k}(P_l) = m^0_{l,k}(x,t) erfc(\frac{q_l}{2\sqrt{\tau}}),\ \ k^0_{l,k}(x,t)|_{x_l=1} =$

$- c_{k,0}(x,t)|_{x_l=1}$ (**11**)

В следующе шаге правая часть примет вид

$$F_1(M) = -\sum_{k=1}^{m} i\theta'_k(t)\left[c_{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}(Y^0_{l,k}(N_l) + Z^0_{l,k}(N_l)\right],$$

чтобы уравнение (7) при k=1, с такой правой частью, имело решение в U мы должны положить $c_{k,0}(x,t) = 0$. Тогда оно имеет решение представимое в виде (10) с индексом 1 вместо 0, если $Y^1_{l,k}(N_l)$ и $Z^1_{l,k}(\mathrm{P}_l)$ – решения уравнений

$$T^1_{1,l}Y^1_{l,k}(N_l) = -i,\theta'_k(t)Y^0_{l,k}(N_l),\ \ T^2_{1,l}Z^1_{l,k}(P_l) = -i\theta'_k(t)Z^0_{l,k}(P_l)$$

при соответствующих краевых условиях из (9). Решения этих задач запишутся в виде

$$Y^1_{l,k}(N_l) = k^1_{l,k}(x,t) erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) -$$

$$-\frac{i\theta'_k(t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\frac{Y^0_{l,k}(t)}{\sqrt{\tau-\mu}}\left(exp\left(-\frac{(\zeta_l - s)^2}{4(\tau-\mu)}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta_l + s)^2}{4(\tau-\mu)}\right)\right)d\mu ds \equiv$$

$$\equiv k^1_{l,k}(x,t) erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right) - \theta'_k(t)k^0_{l,k}(x,t)I(\tau_l,\zeta_l) \quad (\mathbf{12})$$

$$Z^1_{l,k}(P_l) = m^1_{l,k}(x,t) erfc\left(\frac{q_l}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$-\frac{i\theta'_k(t)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\int_0^{\infty}\frac{Z^0_{l,k}(t)}{\sqrt{\tau-\mu}}\left(exp\left(-\frac{(q_l - s)^2}{4(\tau-\mu)}\right.\right.$$

$$\left.\left.- \exp\left(-\frac{(q_l + s)^2}{4(\tau-\mu)}\right)\right)\right)ds d\mu \equiv$$

$$\equiv m^1_{l,k}(x,t) erfc\left(\frac{q_l}{2\sqrt{\tau}}\right) - \theta'_k(t)m^0_{l,k}(x,t)I(\tau_l,q_l)$$

На основании лемм 100 и 101 из [3], справедливы оценки

$$\left|Z_{l,k}^{\nu}(P_{l)}\right| < cexp\left(-\frac{q_l^2}{8\tau}\right), \quad \left|Y_{l,k}^{\nu}(N_{l)}\right| < cexp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right), \nu = 0{,}1.$$

Вычислим правую часть уравнения (7) при k=2, согласно вычислениям (8) и того, что $c_{k,0}(x,t) = 0$, имеем

$$F_2(M) = -\sum_{k=1}^{m} i\theta_k'(t)\left[c_{k,1}(x,t) + \sum_{l=1}^{2}(Y_{l,k}^1(N_l) + Z_{l,k}^1\,(P_l)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} f_k(x,t)\exp(i\gamma_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}) - [\partial_t v_0 - b(x,t)v_0] -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\exp(i\gamma_k)\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_t Y_{l,k}^0 - b(x,t)Y_{l,k}^0 + \partial_t Z_{l,k}^0 - b(x,t)Z_{l,k}^0\right] -$$

$$-\sum_{l=1}^{2}\left[(\partial_t y_{l,0}(x,t) - b(x,t)y_{l,0}(x,t))\, erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) + (\partial_t d_{l,0}(x,t)\right.$$

$$\left. - b(x,t)d_{l,0}(x,t))erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

$$-2\sum_{k=1}^{m}\exp\left(i\gamma_k\right)\sum_{l=1}^{2}\left[\partial_{x_l,\zeta_l}^2 Y_{l,k}^0 - \partial_{x_l,q_l}^2 Z_{l,k}^0\right]$$

Обеспечивая разрешимость в классе U уравнения (7) при k=2, положим

$$i\theta_k'(t)c_{k,1}(x,t) = f_k(x,t)\exp\left(\frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right), \partial_t Y_{l,k}^0 - b(x,t)Y_{l,k}^0$$

$$= 0, \partial_t Z_{l,k}^0 - b(x,t)Z_{l,k}^0 = 0$$

$$\partial_t v_0\ (x,t) - b(x,t)v_0\ (x,t) = 0, \partial_t y_{l,0} - b(x,t)y_{l,0}$$

$$= 0, \partial_t d_{l,0} - b(x,t)d_{l,0} = 0$$

$$\partial_{x,\sigma_l}^2 Y_{l,k}^0 = 0, \quad \partial_{x,q_l}^2 Z_{l,k}^0 = 0. \qquad \mathbf{(13)}$$

Из вида функций $Y_{l,k}^0(N_l)$ и $Z_{l,k}^0(N_l)$, определенные по формулам (11), следует, что при t = $\tau = 0$ они удовлетворяют нулевым начальным условиям. Это обеспечивается за счет сомножителей $erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right)$ и $erfc\left(\frac{q_l}{2\sqrt{\tau}}\right)$, каковы бы ни были функции $k_{l,k}^0(x,t)$, $m_{l,k}^0(x,t)$. Поэтому мы выберем произвольным образом значения этих функций при t=0:

$$k_{l,k}^0(x,t)|_{t=0} = k_{l,k}^0(x), \quad m_{l,k}^0(x,t)_{t=0} = m_{l,k}^0(x) \qquad \mathbf{(14)}$$

Соотношения относительно $Y_{l,k}^0(N_l)$ и $Z_{l,k}^0(\mathrm{P}_l)$ будет удовлетворены выбором функций $k_{l,k}^0(x,t)$, $m_{l,k}^0(x,t)$, как решения уравнений

$$\partial_t k_{l,k}^0(x,t) - b(x,t)k_{l,k}^0(\mathrm{x,t}) = 0, \quad \partial_t m_{l,k}^0(x,t) - b(x,t)m_{l,j}^0(x,t) = 0$$

При начальном условии (14), т.е. в виде

$$k_{l,k}^0(x,t) = k_{l,k}^0(x)\exp\big(B(x,t)\big), \quad m_{l,k}^0(x,t) = m_{l,k}^0(x)\exp\big(B(x,t)\big), \qquad \mathbf{(15)}$$

$$B(x,t) = \int_0^t b(x,s)ds.$$

С учетом последнего, функций $Y_{l,k}^0(N_l)$ и $Z_{l,k}^0(\mathrm{P}_l)$ из (11) подставим в последние уравнения в (13):

$$\partial_{x_j} k_{l,k}^0(x)\exp\big(B(x,t)\big)\,\partial_{\zeta_l}\left(erfc\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right)\right) = 0,$$

$$2\partial_{x_j} m_{l,k}^0(x)\exp\big(B(x,t)\big)\,\partial_{q_l}\left(erfc\left(\frac{q_l}{2\sqrt{\tau}}\right)\right) = 0,$$

или

$$\partial_{x_j}(k_{l,k}^0(x)) + \partial_{x_l}B(x,t)k_{l,k}^0(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{l} = 1,2$$

$$\partial_{x_j} m_{l,k}^0(x) + \partial_{x_l}B(x,t)m_{l,k}^0(x) = 0. \qquad \mathbf{(16)}$$

Удовлетворим найденные функции $k^0_{l,k}(x,t)$ и $m^0_{l,k}(x,t)$ из формулы (15), начальным условиям из (11), имеем

$$k^0_{l,k}(x)|_{x_l=0}\exp\big(B(x,t)\big)|_{x_l=0} = -c_{k,0}(x,t)|_{x_l=0}$$

$$m^0_{l,k}(x)|_{x_l=1}\exp\big(B(x,t)\big)|_{x_l=1} = -c_{k,0}(x,t)|_{x_l=1}$$

Решив уравнения (16), при этих начальных условиях, определим $k^0_{l,k}(x)$ и $m^0_{l,k}(x)$, а, следовательно, $k^0_{l,k}(x,t)$ и $m^0_{l,k}(x,t)$.

Таким же образом поступим при определении функций $y_{l,0}(x,t)$, $d_{l,0}(x,t)$, $\omega_{l,j}(x,t)$. Они выражаются через функцию $v_0(x,t)$ которая имеет вид $v_0(x,t)=\exp\big(B(x,t)\big)\,h(x)$.

Функции $Y^0_{l,k}(N_l)$ и $Z^0_{l,k}(\mathrm{P}_l)$ выражаются через $c_{k,0}(x,t)=0$, поэтому $Y^0_{l,k}(N_l)=0$ и $Z^0_{l,k}(\mathrm{P}_l)=0$.

Этим полностью определен главный член асимптотики:

$$u_0(M)=v_0\ (x,t)+\sum_{l=1}^{2}[y_{l,0}(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)+d_{l,0}(x,t)erfc\left(\frac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\right)]$$

Соотношения (13) удовлетворяется, при этом

$$c_{k,1}(x,t)=\frac{1}{i\theta'_k(t)}f_k(x,t)\exp\left(\frac{i\theta'_k(t)}{\varepsilon}\right),$$

тогда правая часть примет вид

$$F_2(M)=-i\sum_{k=1}^{m}\theta'_k(t)\sum_{l=1}^{2}\big[Y^1_{l,k}(N_l)+Z^1_{l,k}(P_l)\big]\exp(i\gamma_k).$$

Уравнение (7) при k=2 с такой правой частью разрешимо в U и его решения представимо в виде (10) с индексом 2 вместо 0, если функции $Y^2_{l,k}(N_l)$ и $Z^2_{l,k}(\mathrm{N_l})$- решения уравнений

$$T^1_{1,l}Y^2_{l,k}(N_l)=i\theta'_k(t)Y^1_{l,k}(N_l),$$

$$T_{1,l}^{2} Z_{l,k}^{2}(P_l) = i\theta_k'(t) Z_{l,k}^{1}(P_l).$$

Аналогично [3], используя тождество (5), легко устанавливается, что построенное решение при $\mu = \psi(x, t, \varepsilon)$ является асимптотическим решением задачи (1). Справелива теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда частичная сумма (9) при $\mu = \psi(x, t, \varepsilon)$и достаточно малых ε>0является асимптотическим решением задачи (1), т.е. справедлива оценка

$$|u(x, t, \varepsilon) - u_{n,\varepsilon}(x, t, \psi(x, t, \varepsilon)| < c\ \varepsilon^{n+1}$$

для n=0,1,2,…

REFERENCES

1.Omuraliev A.S., Sheishenova Sh.K. Asimptotika reshenia parabolicheskoi zadachi pri otsutstvii spectra predelnogo operatora I s bystrooscilliruyushei pravoi chastiu//Issled.po integro-differ,uravn.Vyp.41.-2010.
2.Omuraliev A.S., Sheishenova Sh.K. Asimptotika reshenia zadachi s uglovym parabolicheskim pogranichnym sloem i osciliruyushei pravoi chastiu// Materialy Mejdunarod.nauchno-prakt.konfer.2-chast. Taldykorgan 2010-S.-192-195.
3.Omuraliev A.S.Regularizacia singularno vozmushonnyh parabolicheskih zadach.-Bishkek: IC “Tehnik”KTU.-2005.-152 s.