# РАЗВИТИЕ МЕТОДА KG ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

**УРДАЛЕТОВА Анаркуль Бурганаковна**
профессор Кыргызско-Турецкого университета «Манас»,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
*E-mail: aurdaletova@rambler.ru*

**КЫДЫРАЛИЕВ Сыргык Капарович**
профессор Американского университета в Центральной Азии,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
*E-mail: syrgak@mail.auca.kg*

**СКЛЯР Сергей Николаевич**
руководитель направления Математика и естественные науки
Американского университета в Центральной Азии,
доктор физ.-мат. наук, профессор
*E-mail: sklyar_s@mail.auca.kg*

**Аннотация**

Известно, что среди методов, используемых при решении систем линейных алгебраических уравнений, метод Крамера имеет ряд недостатков по сравнению с методом Гаусса, в частности: невозможность выписать решения системы, имеющей множество решений; громоздкость вычислений при большом размере системы. Однако в применении к системам с квадратной матрицей он, в некотором смысле, удобнее, чем метод Гаусса.

Авторами данной работы был разработан и предложен, так называемый, «метод KG», в котором они попытались объединить достоинства методов Крамера и Гаусса.

В данной работе метод KG адаптирован к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов и приведен к виду удобному для компьютерной обработки.

Следует заметить, что некоторым обоснованием актуальности проведенного исследования является то, что приближенное решение большого круга задач, в частности, в теории дифференциальных уравнений, сводится к решению систем линейных разностных уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

**Ключевые слова**: системы линейных алгебраических уравнений, трехдиагональная матрица, решения.

**IMPROVEMENT OF THE KG-METHOD TO SOLVE THE SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS WITH THREE DIAGONALS MATRIX OF COEFFICIENTS**

**Abstract**

The KG- method is the method which contains the advantages of the Cramer and Gauss methods.

In this paper we use KG-method to solve the systems of linear algebraic equations with three diagonals matrix of coefficients. This type of systems is broadly used in the computational mathematics.

**Key words:** linear algebraic equations, three diagonals matrix, computational mathematics.

## Введение

Известно, что среди методов, используемых при решении систем линейных алгебраических уравнений, метод Крамера имеет ряд недостатков по сравнению с методом Гаусса, в частности: невозможность выписать решения системы, имеющей множество решений; громоздкость вычислений при большом размере системы. Однако в применении к системам с квадратной матрицей он, в некотором смысле, удобнее, чем метод Гаусса [1].

В работе [2] разработан и предложен так называемый «метод KG», в котором авторы попытались объединить достоинства методов Крамера и Гаусса.

В данной работе метод KG адаптирован к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов и приведен к виду удобному для компьютерной обработки.

Следует отметить, что приближенное решение большого круга задач, в частности, в теории дифференциальных уравнений, сводится к решению систем линейных разностных уравнений с трехдиоганальной матрицей коэффициентов. При решении последних используются различные компьютерные методы, например, метод прогонки. Однако при использовании компьютерной программы, основанной на методе KG для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, удается убрать требования, которые были необходимы, например, в методе прогонки.

Мы будем говорить о построении формул для решений систем линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1 \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k\,, \quad k = 2,3,...,n-1, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = f_n \end{cases} \tag{1}$$

с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

В параграфе 1. данной работы выводится формула для вычисления определителя трехдиагональной квадратной матрицы. Затем, в параграфе 2., с использованием метода KG, выводится формула для нахождения решения системы (1), при этом изучаются два случая:

а) рассматривается случай решения системы при условии, что все коэффициенты $a_k$ и $c_k$ системы (1) отличны от нуля;

б) изучаются случаи равенства некоторых из этих коэффициентов нулю. Оказывается, что тогда систему (1), можно разложить на подсистемы, которые могут быть решены по отдельности, предлагаемым в случае а) способом.

### Вывод формулы для вычисления определителя трехдиагональной матрицы

Матрица коэффициентов системы (1) является трехдиагональной. Обозначим через $D_1$ определитель матрицы коэффициентов системы (1), а через $D_k$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы путем вычеркивания первых $(k-1)$ строк и $(k-1)$ столбцов.

Тогда, используя разложение определителя по 1-му столбцу, получим

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= b_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix}$$

$$- a_2 \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} = b_1D_2 - a_2c_1D_3.$$

Так как определитель $D_2$ имеет такую же структуру, что и $D_1$ , то, повторив только что изложенную процедуру, получим

$D_2 = b_2D_3 - a_3c_2D_4$ .

Отсюда, легко видеть, что при любом $k = 1, 2, \dots , n-2$

$$D_k = b_k D_{k+1} - c_k a_{k+1} D_{k+2}. \qquad (2)$$

Поэтому, для того чтобы иметь возможность определить все значения определителей $D_k$ при $k = 1, 2, \dots , n - 2$ , достаточно подсчитать значения $D_{n-1}$ и $D_n$ непосредственно и воспользоваться формулой (2). Нетрудно увидеть, что

$$D_n = b_n;\ D_{n-1} = b_{n-1}b_n - a_n c_{n-1} \qquad (3)$$

<u>Пример 1</u>

Вычислим определитель

$$D_1 = \begin{vmatrix} 17 & 21 & 0 & 0 \\ 23 & 11 & 9 & 0 \\ 0 & 13 & 18 & 27 \\ 0 & 0 & 15 & 19 \end{vmatrix}.$$

Из формулы (3) для определения $D_{n-1}$ и $D_n$, следует, что $D_4 = 19$,

а $D_3 = 18 \cdot 19 - 15 \cdot 27 = -63;$

Тогда, по формуле (2),

$D_2 = 11 \cdot D_3 - 9 \cdot 13 \cdot D_4 = 11 \cdot (-63) - 9 \cdot 13 \cdot 19 = -2916;$

$D_1 = 17 \cdot D_2 - 21 \cdot 23 \cdot D_3 = 17 \cdot (-2916) - 21 \cdot 23 \cdot (-63) = -19143.$

Справедливость полученного результата легко проверить, вычислив значение определителя $D_1$ любым другим известным способом.

**Вывод формулы решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов системы методом KG**

Вернемся к системе (1).

**Случай а).** Предполагаем, что все коэффициенты $a_k$ и $c_k$ системы отличны от нуля.

Для того чтобы методом Крамера найти значение неизвестной $y_1$, заменим 1-й столбец определителя $D_1$ правой частью системы (1), и, разложив определитель по 1-му столбцу, вычислим его значение:

$$F_1 = \begin{vmatrix} f_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ f_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ f_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ f_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} =$$

$$= f_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} -$$

$$- f_2 \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-2} f_{n-1} \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n-1} f_n \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \end{vmatrix}.$$

То есть,

$$F_1 = f_1 D_2 - c_1 f_2 D_3 + c_1 c_2 f_3 D_4 - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-2} c_1 c_2 \ldots c_{n-2} f_{n-1} D_n + (-1)^{n-1} c_1 c_2 \ldots c_{n-2} c_{n-1} f_n. \quad (4)$$

Разделив $F_1$ на $D_1$ получим искомое значение неизвестной $y_1$. При этом, конечно надо предположить, что $D_1$ отличен от нуля, т.е.,

$$y_1 = \frac{F_1}{D_1} \cdot$$

Далее, согласно алгоритму метода Крамера, для нахождения $y_2$ надо было бы заменить второй столбец матрицы коэффициентов на правую часть системы, вычислить полученный определитель и разделить на $D_1$ и так далее. Но к счастью, согласно методу KG, процедура нахождения следующих неизвестных намного упрощается. А именно:

из 1-го уравнения системы (1), используя найденное значение $y_1$, вычислим $y_2$:

$$y_2 = \frac{f_1 - b_1 y_1}{c_1}\ .$$

Затем, используя найденные значения $y_1$ и $y_2$, из 2-го уравнения системы (1) найдем $y_3$:

$$y_3 = \frac{f_2 - a_2 y_1 - b_2 y_2}{c_2}\ ,$$

и так далее, пока не получим полное решение системы.

Формулу для вычисления неизвестных $y_k$, где $k = 1, 2, \ldots n\text{-}1$, можно записать в следующем виде:

$$y_{k+1} = \frac{f_k - a_k y_{k-1} - b_k y_k}{c_k}\ , \tag{5}$$

(здесь значения $y_0$ и $a_1$ считаем доопределенными в виде: $y_0 = 0$; $a_1 = 0$).

Пример 2

Решим систему
$$\begin{cases} 17x + 21y = 77, \\ 23x + 11y + 9z = 94, \\ 13y + 18z + 27t = 100, \\ 15z + 19t = 77. \end{cases} \tag{6}$$

Определитель матрицы коэффициентов системы (6) есть определитель, рассмотренный в примере 1. Поэтому, используя определители, вычисленные в примере 1, а также значения коэффициентов системы (6), из формулы (4), получим, что

$F_1 = 77\,D_2 - 21 \cdot 94D_3 + 21 \cdot 9 \cdot 100D_4 - 21\cdot 9 \cdot 27\cdot 77 =$

$$= 77\cdot (-2916) – 21\cdot 94\cdot (-63) + 21 \cdot 9\cdot 100 \cdot 19 – 21\cdot 9 \cdot 27\cdot 77 = -134001.$$

Тогда,

$$x = F_1 / D_1 = -134001/(-19143) = 7.$$

Теперь из 1-го уравнения системы (6) имеем:

$$y = \frac{77 - 17 \cdot 7}{21} = -2 .$$

После этого из второго уравнения системы (6) можно найти $z$ :

$$z = \frac{94 - 23 \cdot 7 - 11 \cdot ( -2)}{9} = -5 .$$

Очевидно, что из третьего уравнения системы легко найти $t$:

$$t = \frac{100 - 13 \cdot ( -2) - 18 \cdot ( -5)}{27} = 8 .$$

Последнее, 4-е уравнение системы (5), можно использовать для проверки:

$$15\cdot(-5) + 19 \cdot 8 = 77.$$

Примечание

Несмотря на относительную громоздкость коэффициентов системы (6), процесс нахождения ее решения оказался достаточно простым. Это может послужить поводом для размышлений тем, кто пытается забыть метод Крамера. Примером существования такой тенденции в последнее время является то, что, в частности, в большинстве американских учебников по высшей математике метод Крамера не приводится (смотри [3],[4]).

**Случай б)**

Доопределив коэффициенты системы (1) следующим образом:

$a_1 = 0; c_n = 0,$

можно говорить, что она является системой $n$ уравнений вида

$$a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k , \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Будем предполагать, что некоторые из коэффициентов $c_k$ могут быть равны нулю. В таких условиях формула решения (5), вообще говоря, не работает.

Но, к счастью, равенство нулю какого-то коэффициента $c_k$, только упрощает задачу решения системы с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

**Пункт 1**. Итак, пусть в системе (1) только коэффициент $c_m$ равен нулю. Тогда разобьем ее на две подсистемы:

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k\,, \quad k = 2,3,...,m-1' \\ a_m y_{m-1} + b_m y_m = f_m, \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} a_{m+1} y_m + b_{m+1} y_{m+1} + c_{m+1} y_{m+2} = f_{m+1}, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k \quad , \quad k = m+2, m+3,...,n, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = f_n. \end{cases} \tag{8}$$

Система (7) является системой с трехдиагональной матрицей коэффициентов, у которой коэффициенты $c_k$ не равны нулю. Поэтому, она может быть решена методом, изложенным в случае а).

Далее, подставив значение $y_m$ , вычисленное при решении системы (7), в 1-ое уравнение системы (8) получим систему с трехдиагональной матрицей коэффициентов, у которой коэффициенты $c_k$ не равны нулю:

$$\begin{cases} b_{m+1} y_{m+1} + c_{m+1} y_{m+2} = f_{m+1} - a_{m+1} y_m\,, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, \quad . \quad k = m+2, m+3,...,n, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = f_n. \end{cases}$$

Понятно, что если в системе (1) будут равны нулю несколько коэффициентов $c_k$, то ее можно разбить на соответствующее число подсистем.

**Пункт 2.** Развивая идею, использованную в пункте 1, можно заметить, что, разбив систему (1) на подсистемы, использовав равенство нулю некоторых коэффициентов $c_k$ , мы можем продолжить процесс разбиения, используя равенство нулю некоторых коэффициентов $a_k$ .

Пусть в системе (1) коэффициенты $c_k$ не равны нулю, коэффициент $a_m$ равен нулю.

Разобьем ее на две подсистемы:

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, \qquad k = 2,3,...,m-2, \\ a_{m-1} y_{m-2} + b_{m-1} y_{m-1} + c_{m-1} y_m = f_m, \end{cases} \tag{9}$$

и

$$\begin{cases} b_m y_m + c_m y_{m+1} = f_m, \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k, \quad k = m+1, m+2, ..., n, \\ a_n y_{n-1} + b_n y_n = f_n. \end{cases} \tag{10}$$

Система (10) является системой с трехдиагональной матрицей коэффициентов, у которой коэффициенты $c_k$ не равны нулю. Поэтому, она может быть решена методом, изложенным в случае а).

Далее, подставив значение $y_m$ , вычисленное при решении системы (10), в последнее уравнение системы (9), получим систему с трехдиагональной матрицей коэффициентов, которая может быть решена методом, изложенным в случае а), так как:

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = f_1 \\ a_k y_{k-1} + b_k y_k + c_k y_{k+1} = f_k \quad , \quad k = 2,3,...,m-2 \cdot \\ a_{m-1} y_{m-2} + b_{m-1} y_{m-1} = f_m - c_{m-1} y_m. \end{cases}$$

В заключение отметим, что эта работа является продолжением исследований авторов, изложенных в работах [2] и [5].

**References**

[1]. Borevich L.M. Opredeliteli I matritsi, Moskva, Nauka 90 pp. 1988.

[2]. Kydyraliev S.K., Urdaletova A.B., Reshenie system lineinyh uravnenii metodom KG, Manas universiteti, Tabigii ilimder jurnaly, 2, (2002):144-161.

[3]. Margaret L. Lial, Charles D.Miller, Finite Mathematics and Calculus, Scott, Foresman and Company, 1100 p.,1989.

[4]. Cozzens M., Porter R., Mathematics with Calculus, D.C. Heath and Company, 860 p., 1987.

[5]. Kydyraliev S.K., Sklyar S.N., Urdaletova A.B., Ispolzovanie metoda KG dlya resheniya system lineinyh algebraicheskih uravnenii. Vyshee obrazovanie Kyrgyzskoi Respubliki, 2/12, (2008): 12-22.