Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi • Cilt: 11 • Sayı: 21 • Temmuz 2019 ISSN: 1309-1123, ss. 185-196
DOI: 10.14784/marufacd.623393

ARAŞTIRMA MAKALESİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL MODELLER İLE SİGORTA ŞİRKETLERİNDE HASAR REZERVİNİN TAHMİNİ

ESTIMATION OF CLAIM RESERVE IN INSURANCE COMPANIES USING GENERALIZED LINEAR MODELS

Yusuf ARSLAN*
Dilek ALTAŞ**

Öz

Hayat-dışı sigortalarda, hasar talepleri ile hasar dosyasının kapanması arasında zaman farkı mevcuttur. Ayrıca, yasal düzenlemeler, hasarın gecikmeli raporlanması ya da yapılan itirazlar, hasar talebinde bulunmanın zaman alması veya kapalı dosyaların yeniden açılmasına neden olabilmektedir. Sigorta şirketlerinin yükümlülüklerini yerine getirebilmesi için ayrılacak olan hasar rezervlerini doğrun tespit etmesi, şirketin mali yapısının korunması açısından oldukça önemlidir. Rezerv hesabında kullanılan geçmiş veriler genellikle üçgen merdiven metodu ile gösterilmektedir. Bu veriler iki zaman ekseninde birbirinden ayrılır. Yatay eksen hasar gelişim yılını ve dikey eksen hasar oluşum yılını göstermektedir. Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller hasar rezervlerinin tahmininde etkin bir yoldur.

Anahtar Kelimeler: Hasar Rezervleri, Genelleştirilmiş Doğrusal Modeller, Bootstrap Metodu, Risk Ölçümleri.

Jel Kodları: G22, C13, C15

Abstract

In non-life insurance, there is a time-lag between the occurrence of the claim and the closure of the claim file. In addition to this time-lag, a delay in claims application process or re-opening of the related file may arise due to certain legal regulations, delayed claim reporting or objections arisen during the process. Determination of reserves accurately and sufficiently in order to meet the liabilities plays an important role in protecting the financial status for an insurance company. Historical data used to calculate reserves are generally presented through claims development triangles. These data diverge on two time axes. The horizontal axis indicates the

* Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İstatistik Yüksek Lisans Programı, e posta: yusf.arsln@hotmail.com
** Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, İktisat Fakültesi, Ekonometri Bölümü, e posta: dilekaltas@marmara.edu.tr

Başvuru Tarihi 28.08.2018 **Kabul Tarihi** 15.02.2019

years of development of a claim, where the vertical one indicates the year of the occurrence of the claim. The Generalized Linear Models may be accepted as one of the most efficient ways to estimate claims reserves.

Keywords: Claims Reserves, Generalized Linear Models, Bootstrap Method, Risk Measures.

Jel Codes: G22, C13, C15

GİRİŞ

Hasar rezervleri sigortacılığın en önemli konusudur. Geçmişte bu problemin çözümü için şirketler birçok yöntem denemiştir. Bu yöntemlerin en popüleri gelecek hasarların yalnızca beklenen değerini tahmin etmeye dayalı deterministik modeldir. Deterministik model tahmin belirsizliklerinin hesaba katılması gereken hasar oluşumları benzeri rastgele olaylar için uygun değildir.

Bu gibi durumları ele alan hasar gelişimi modellemesinin stokastik metodu uygulayıcılar arasında popüler olmaya başlamıştır. Bu modellerin kullanılması bize gelecekteki yükümlülüklerin daha yüksek olasılıkla hesaplanmasını ve dolayısıyla rezerve konu olan hasarlar ile ilgili risk ölçümlemesi yapılabilmesine olanak sağlamaktadır.

Hasar miktarının hesaplanması ve tahmini için stokastik bir model seçimi, bu çalışmanın esas amacını oluşturmaktadır. Bu amaçla doğrusal regresyon uzantısı olan Genelleştirilmiş Doğrusal Modelleme üzerinde çalışılmıştır. Bu modeller normal dağılıma uymayan verilerin doğrusal olmayan ilişki ile bağımlı ve bağımsız değişkenlerin modellenmesi için kullanılmaktadır.

Hasar rezervlerinin hesaplanması ile ilgili olarak, tahminin dağılımı, hasar rezervlerinin rastgele değişkenler toplamı olması sebebiyle karmaşık olabilir. Bu çalışmada bu problem bootstrap metodu uygulaması ile aşılmaktadır. Ayrıca hayat-dışı sigortalardaki sınırlı sayıda gözlem sorununu ortadan kaldırmaktadır.

1. YÖNTEM

1.1. Hasar Adetlerinin Modellenmesi

Öncelikle hasar adetleri verilerinin mevcut olması durumunda modellemeyi düşünmekteyiz. Bu bölümde kaza yılı i ve gelişim yılı j için artan ve kümülatif hasar sayılarını belirtmek için $X_{i,j}$ ve $C_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq I = J$, sembollerini kullanmaktayız.

Modelleme yapılırken Poisson ve Negatif binom dağılımları yaygın olarak kullanılır, ancak England ve Verrall (2002) tarafından uygulanmış olan hasar sayılarının modellenmesi yaklaşımı da kullanılmaktadır.

1.1.1. Aşırı-yayılmış Poisson Modeli

Pozitif tamsayıların modellenmesinde (Hasar sayıları) kullanılan Poisson dağılımının yerine, yarı-olabilirlik tahmin modeli kullanılarak oluşturulan aşırı-yayılmış Poisson dağılımı, sürekli verilerin (hasar tutarları) modellenmesinde de kullanılabilmektedir (England and Verrall, 2002).

Sayım verilerinin modellemesi içim Poisson dağılımının kullanımı iyi bilinen bir yöntemdir. Bununla birlikte, uygulamanın ortalama ve varyansın eşitliği konusunda sınırlaması mevcuttur. Varyansın eşit olmadığı, ancak ortalamayla orantılı olduğu aşırı-yayılmış Poisson (ODP) modelini tanımlayarak bu problemin üstesinden gelinebilir. Bu nedenle Mack'in (1991) kanıtladığı CL yöntemiyle aynı tahminleri sağlar. Poisson dağılımının olasılık fonksiyonu burada Genelleştirilmiş Doğrusal Modelleme'nin aşırı dağılmış uzantısını incelemekteyiz.

$$f(y) = \frac{\mu^y}{y!} e^{-\mu}, y = 0,1,2, \dots, \quad \mu > 0.$$

1.1.2. Aşırı-yayılmış Negatif Binom Modeli

Negatif binom dağılımı, μ parametresinin gama dağıtılacağı şekilde Poisson dağılımından elde edilebilir.

$NB(\mu, r)$'nın olasılık fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{\Gamma(y+r)}{y!\,\Gamma(r)} \left(\frac{r}{r+\mu}\right)^r \left(\frac{\mu}{r+\mu}\right)^y, y = 0, 1, 2, \dots, r, \quad \mu > 0$$

şeklinde tanımlanır.

Bu dağılım, sadece r hatalarının sayısı sabitlendiğinde üstel aile tipindedir.

Modelleme için negatif binom dağılımının kanonik bağlantısı olmasa da buradaki logaritmik bağlantı işlevini kullanırız. Bununla birlikte, kullanımı sırasında tahminlerin yorumlanması daha uygundur. $NB(\mu, r)$ için kanonik bağlantı $g(\mu) = log[\mu/(\mu + r)]$ şeklindedir.

1.2. Hasar Tutarlarının Modellenmesi

$X_{i,j}$ artan hasar verisini ve $C_{i,j}$ kümülatif hasar verisini ifade etmektedir. Aşırı-yayılmış Poisson ve aşırı-yayılmış Negatif Binom modelleri sürekli verilerde kullanılabilir. Bununla birlikte, hasar tutarlarını modellerken negatif değerler gözlemlemek mümkündür ve bu bakımdan aşırı-yayılmış Poisson ve aşırı-yayılmış Negatif binom modelleri sınırlı kalmaktadır. Bunun önüne geçebilmek amacıyla yarı-olabilirlik yöntemi kullanılabilir.

Hayat-dışı sigortalarda sürekli veri modellemesi için genellikle kullanılan dağılımlar arasında gamma ve Ters Gauss dağılımları kullanılır. Normal dağılımın simetrik olma kısıtlaması vardır, ancak aşırı-yayılmış Negatif binom modeline yaklaştırmak ve modeli Mack'in (1993) genelleştirilmiş doğrusal modeli olarak tanımlamak için kullanılabilir.

1.2.1. Gamma Modeli

Gamma dağılımının $\Gamma(a,p)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-ay}, y > 0, a, p > 0,$$

$p = 1$ durumunda üstel dağılıma eşittir.

1.2.2. Ters Gauss Modeli

Ters Gauss ve Gamma dağılımına uyan bağımlı değişkenlere sahip modellerde varyans, ortalamanın güç fonksiyonu ile orantılıdır.

Ters Gauss dağılımı $IG(\mu, \lambda)$, veride büyük çarpıklıklar gözlendiğinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ters Gauss dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi y^3}} exp\left\{-\frac{\lambda(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right\}, y > 0, \lambda, \mu > 0,$$

şeklindedir.

1.2.3. Normal Dağılım Modeli

Normal dağılımın simetrisi konusunda bir sınırlaması mevcuttur. Buna rağmen, Aşırı-yayılmış Negatif Binom modelinin bir yaklaşımı olarak, Mack'in Mack Modelinde (1993) kullanılabilir.

İlk olarak ortalaması μ ve varyansı σ^2 olan normal dağılmış rastgele bir değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, y \in \mathbb{R},$$

şeklindedir.

1.3. Aşırı-yayılmış Poisson Modeli

Logaritmik fonksiyonun kullanılması dahilinde

$$\hat{\mu}_{i,j} = exp\{c + \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_j\},$$

modelin fit edilmiş değerleri için geçerlidir. Artan hasar sayıları (tutarları) $X_{i,j}$'nin ortalama ve varyansının tanımlanması göz önüne alındığında ölçeklendirilmiş Pearson artıklarını hesaplarken

$$r_{i,j}^{(PS)} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\mu}_{i,j}}}$$

$0 \leq i + j \leq I$ değerleri için geçerlidir. Görüldüğü gibi dağılım parametresi kovaryantlara bağımlı değildir ve bu nedenle hesaplamadan çıkarılabilir.

1.4. Aşırı-yayılmış Negatif Binom Modeli

Hasar rezervleri için özyenilemeli model, Negatif Binom modelidir. Bu durumda,

$$\hat{\lambda}_j = exp\{c + \gamma_{j-1}\},$$

λ_j parametre tahmincisi ve $j \geq 1$ için geçerlidir.

$\hat{\mu}_{i,j} = \hat{\lambda}_j C_{i,j-1}$ değerine sahip olan ölçekli Pearson artıkları

$$r_{i,j}^{(PS)} = \frac{(C_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j})}{\sqrt{\hat{\varphi}\left(\hat{\mu}_{i,j} + \frac{\hat{\mu}_{i,j}^2}{r}\right)}},$$

$1 \leq i + j \leq I \; ve \; j \geq 1$ değerleri için geçerlidir. Bootstrap kümülatif hasarları,

$$_{(b)}C_{i,j}^{*} = {}_{(b)}r_{i,j}^{(PS)*}\sqrt{\hat{\varphi}\left(\hat{\mu}_{i,j} + \frac{\hat{\mu}_{i,j}^2}{r}\right)} + \hat{\mu}_{i,j},$$

burada $1 \leq b \leq B$, bootstrap döngüsünün sayısıdır.

Gelişim üçgeninde sabit değerler olarak $C_{i,j}$, ($1 \leq i + j \leq I \; ve \; j \geq 1$ değerleri için) gözlemlerini düzeltmek önemlidir ve bu bootstrap prosedüründe yeniden örneklenemez. Modelin uyumunu sağlamak için aynı varsayımın kullanılması gerekmektedir. Aksi takdirde, tutarsızlıklardan dolayı analitik ve bootstrap sonuçları karşılaştırılabilir olamaz.

Süreç varyansını hesaplamak için, dağılımda yer alan değerler simüle edilir

$$_{(b)}C_{i,j}^{*}|C'_{i,j-1} \sim ONB\left[\hat{\mu}'_{i,j}, \hat{\varphi}\left(\hat{\mu}'_{i,j} + \frac{{\hat{\mu}'_{i,j}}^{2}}{r}\right)\right],$$

$\hat{\mu}'_{i,j} = \hat{\lambda}_j C'_{i,j-1}$ için geçerlidir ve

$$C'_{i,j} = \begin{cases} C_{i,j}, & j = I - i + 1; \\ _{(b)}\hat{C}_{i,j}^{*}, & I - i + 2 \leq j \leq I, \end{cases}$$

tüm i değerleri için, b bootstrap döngüsünün sayısını belirtmektedir. England and Verrall (2006)'da belirtildiği gibi, nihai hasarlar aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\hat{C}_i^* = C_{i,I-i}\hat{\lambda}_{I-i+1} \dots \hat{\lambda}_I$$

tüm i değerleri için geçerlidir.

1.5. Gamma Modeli

Gamma modelleri için ölçeklendirilmiş Pearson artıkları

$$r_{i,j}^{(ps)} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\mu}_{i,j}^2}}$$

$0 \leq i + j \leq I$ için geçerlidir. Bu bağlantılar, bootstrap yöntemi ile gelecekteki üçgenin bootstrap değerlerini simüle etmek için kullanılır.

1.6. Ters Gauss Modeli

Gamma dağılımına benzer şekilde, ters Gauss dağılımına uyan hasar tutarları $X_{i,j}$'yi iki model ile belirleyebiliriz. İlki model logaritmik bağlantı fonksiyonu ve diğeri ortalamanın karşılıklı kare fonksiyonu olan ters Gauss dağılımı için kanonik (standart) bağ fonksiyonudur.

İkinci model, fit edilen değerleri

$$\hat{\mu}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{c + \hat{\alpha}_i + \hat{\gamma}_j}}$$

tüm i ve j değerleri için geçerlidir. Bu tahminler daha sonra ölçekli Pearson artıklarını hesaplamak için kullanılır. Ters Gauss dağılımı ve ortalama ve varyansa göre

$$r_{i,j}^{(ps)} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\varphi}\hat{\mu}_{i,j}^3}}$$

$0 \leq i + j \leq I$ değerleri için geçerlidir.

Bootstrap ortalama şartıyla temel alınan modelin dağılımı simüle edebilmek için standart bir yaklaşım olarak kullanılmaktadır.

1.7. Normal Modeli

Normal dağılım modelinde artıklar aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$r_{i,j}^{(PS)} = \frac{X_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\varphi}}}$$

$0 \leq i + j \leq I$ değerleri için geçerlidir ve bunlar sadece dağılım parametresi ile ölçeklenen gözlenen ve tahmini değerler arasındaki farklardır.

Aşırı-yayılmış negatif binom (ONB) modelinin normal yaklaşımı (NONB), yinelemeli olarak tanımlanmıştır ve bu nedenle aşırı-yayılmış negatif binom modeline benzemektedir. Ortalama ve varyans yapısı göz önüne alındığında,

$$r_{i,j}^{(PS)} = \frac{\sqrt{w_{i,j}}(f_{i,j} - \hat{\lambda}_j)}{\sqrt{\hat{\varphi}_j}}$$

$1 \leq i + j \leq I, j \geq 1$ değerleri için geçerlidir.

Dağılım parametreleri φ_j, başlangıç fit modelinde "ortak-modelleme" yöntemi ile hesaplanmaktadır.

Aldatıcı veri, geliştirme faktörlerinin bootstrap değerlerini içermektedir.

$${}_{(b)}\hat{f}^{*}_{i,j} = {}_{(b)}r_{i,j}^{(PS)*} \sqrt{\frac{\hat{\varphi}_j}{w_{i,j}}} + \hat{\lambda}_j$$

$1 \leq b \leq B$ bootstrap döngüsü için geçerlidir.

$w_{i,j}$, $1 \leq i + j \leq I, j \geq 1$ değerleri için, modelin ağırlığı olmak üzere aşırı-yayılmış Negatif Binom modelinde olduğu gibi, geliştirme üçgeninde gözlemlenen sabit değerlerdir.

Kümülatif hasarlar normal dağılıma uyduğunda, simülasyon sırasında negatif değerler elde edilebilir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için, England and Verrall (2006) tarafından hesaplamada kullanılacak dağılımın gamma dağılımı olması önerilmektedir.

2. DEĞİŞKENLER VE VERİ SETLERİ

Genelleştirilmiş Doğrusal modellemelerin gerçek dönem verileri kullanılarak, sonuç ve performanslarını karşılaştırılması yapılmıştır.

Stokastik bir veri modellemesinden doğacak rezerv riskini değerlendirmek amacıyla, 10.000 döngü tekrarının yürütüldüğü bootstrap yöntemi yardımıyla nihai rezervlerin tahmini dağılımlarını oluşturmaktayız. Dağılım tahminleri oluşturulduktan sonra, uygulamada kullanılan en yaygın risk ölçütü olarak rezervlerin riske maruz değerleri (VaR) ve koşullu riske maruz değerleri (CVaR) hesaplanmıştır.

Hesaplama, R Çekirdek Ekibi (2014) tarafından geliştirilen R yazılımı ile gerçekleştirilmiştir.

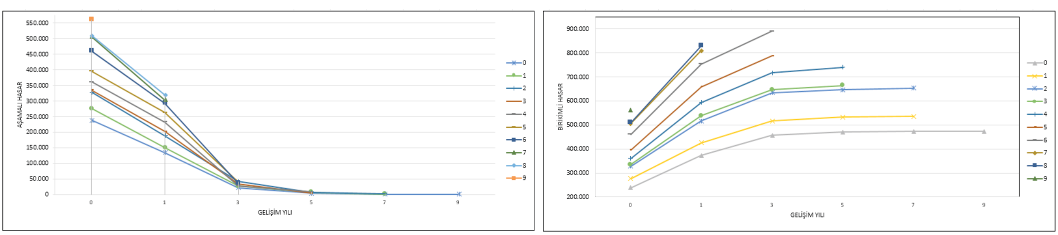
Çalışmada hayat-dışı sigorta şirketinin 10 yıllık (2007-2016) trafik sigortası ödenen hasar verisi yer almaktadır. Veriler, hasar tazminatı talebinde yaygın bir uygulama olan yılsonunda tahsis edilen giderler için düzenlenmiştir, çünkü tazminat bedellerinin hesaplanması, rezerv tutarlarının değerlendirilmesi için gereklidir.

Genelleştirilmiş Doğrusal Modelleme ile rezerv tahminlerinde kurulan modeller, aşamalı hasar ödemelerini baz alan gelişim üçgeni üzerinden hesaplanmaktadır. Buna bağlı olarak, 2007-2016 yılları arasında aşamalı hasar ödemeleri verisi Tablo 1'de yer almaktadır.

Tablo 1. 2007-2016 Yılları Arasında Trafik Sigortası Aşamalı Hasar Ödemeleri

Hasar Yılı i	Gelişim Yılı j									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	238.206,30	134.816,40	61.487,90	21.863,50	9.935,30	4.299,70	1.737,40	569,40	43,80	649,70
1	276.100,60	149.942,00	63.772,80	26.732,60	8.935,20	7.190,50	2.525,80	912,50	613,20	**73,00**
2	327.426,90	188.953,20	76.810,60	41.427,50	6.862,00	5.810,80	2.774,00	3.277,70	**3.949,30**	**1.087,70**
3	335.150,30	203.034,90	75.686,40	33.331,80	13.081,60	4.504,10	2.233,80	**2.270,30**	**569,40**	**43,80**
4	360.795,20	232.490,40	96.046,10	28.302,10	14.629,20	8.066,50	**3.080,60**	**4.109,90**	**1.686,30**	**839,50**
5	395.287,70	263.099,30	88.957,80	39.872,60	20.702,80	**8.504,50**	**3.496,70**	**708,10**	**109,50**	**14,60**
6	460.374,50	293.649,80	99.265,40	36.777,40	**20.746,60**	**9.212,60**	**2.438,20**	**1.445,40**	**620,50**	**605,90**
7	506.014,10	303.329,60	105.784,30	**36.565,70**	**17.877,70**	**5.832,70**	**4.307,00**	**2.087,80**	**- 423,40**	**1.284,80**
8	509.547,30	319.499,10	**102.667,20**	**39.193,70**	**12.957,50**	**9.446,20**	**2.095,10**	**2.686,40**	**4.255,90**	**854,10**
9	561.669,30	**329.470,90**	**117.274,50**	**45.106,70**	**22.213,90**	**9.227,20**	**2.168,10**	**1.087,70**	**649,70**	**1.036,60**

Verilerin hem birikimli hem de aşamalı formlardaki grafiksel gösterimi, Şekil 1'de yer almaktadır.



(a) Aşamalı Hasarlar (b) Birikimli Hasarlar

Şekil 1. Birikimli ve Aşamalı Hasar Tutarlarının Gelişimi

Her iki formdaki gelişimde görebileceğimiz gibi, birikimli hasar ödemeleri değerlerinin kaza yılları ile birlikte arttığı ve ileriki gelişim yıllarında gerçekleşen yükselişlerin başlangıçtaki yükselişten daha az olduğu görülmektedir.

Aşamalı hasar taleplerinin ortaya çıkması, gelişim yıllarının ilerlemesiyle yavaşlar ve hasar tutarları arasındaki farklar ortadan kalkma eğilimindedir.

Üçgen metodu ile alt üçgenden hesapladığımız değerleri dikkate alarak Tablo 2'de nihai rezerv sonuçlarını elde etmekteyiz.

Tablo 2. Hasar Rezervlerinin Nihai Değerleri

Hasar Yılı i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	TOPLAM
Rezerv	73,00	5.037,00	2.883,50	9.716,30	12.833,40	35.069,20	67.532,30	174.156,10	528.235,30	835.536,10

2.1. Model Analizi

Aşırı-yayılmış Poisson, aşırı-yayılmış Negatif Binom, aşırı-yayılmış Negatif Binom'un normal yaklaşımı, Gamma ve Normal dağılımlara uyan değişkenlerin logaritmik link fonksiyonları olan modellerini analiz etmekteyiz.

Ayrıca Ters Gauss ile sabit (kanonik) bağları olan gamma ve normal dağılmış bağımlı değişkenler için model içerisinde kısa bir inceleme sunmaktayız. Bu modeller, öncekilere göre daha iyi performans göstermiştir.

Model testi için yapılacak olabilirlik oranı testinde anlamlılık düzeyini α =% 5 kabul etmekteyiz. Bu test, küçük veriler için en uygun olan test türüdür.

İlk model grubu iyi performans göstermiş ve benzer sonuçlar vemiştir. Aşırı-yayılmış Negatif Binom'a yaklaşan model haricinde, söz konusu diğer modellerin logaritmik bağlantı fonksiyonları benzerlik göstermektedir. Logaritmik bağlantı fonksiyonu, basit yorumlanabilmesi nedeniyle hayat-dışı sigortalar rezerv tahmininde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Aşırı-yayılmış Negatif Binom modelinde, bağımlı değişkenlerinin kümülatif hasar talepleri olduğu ve Aşırı-yayılmış Negatif Binom modelinin Normal yaklaşımı modeli için ise bunların geliştirme faktörleri olduğu unutulmamalıdır. Diğer durumlarda, aşamalı hasarlar modellenmektedir.

Aşırı-yayılmış Negatif Binom modelinde, kümülatif hasarlar olası değer aralıkları boyunca homojen bir şekilde yayılır, dolayısıyla varyansın sabit olduğu görülmektedir.

Aşırı-yayılmış Negatif Binom modeli Normal yaklaşımı modeli özel bir durumdur, çünkü gelişim faktörleri, gelişim yıllarına bağımlı varyans ile ağırlıklı bir Genelleştirilmiş Doğrusal Modelleme ile modellenmiştir. Bununla birlikte, ölçeklendirilmiş artıklar, tahminlenen gelişim faktörlerinin tüm değerleri için eşvaryanslı görünmektedir.

Modellerin karşılaştırılması ile ilgili olarak, modellerin serbestlik derecelerinin sayısına eşit olan asimptotik X^2 dağılımı elde etmek için ölçeklendirilen sapma D ve Pearson X^2 istatistiklerini değerlendirmektedir.

Bu istatistiklerle birlikte, Tablo 3'te modellerin Akaike Bilgi Ölçütü sonuçlarını sunmaktayız.

Tablo 3. Fit Edilen Modellerde Pearson X^2 istatistiği, sapma ve Aaike Ölçütü

Model	Serbestlik Derecesi	X^2	Sapma (D)	Akaike Ölçütü
Aşırı-Yayılmış Poisson	36,00	36,00	36,30	(3.814,30)
Aşırı-Yayılmış Negatif Binom	36,00	36,00	36,06	(769,08)
Gamma	36,00	36,00	44,59	978,71
Normal	36,00	37,95	37,95	921,56
Aşırı-Yayılmış Negatif Binom Normal Yaklaşımı	36,00	44,00	44,00	- 317,72

Ölçeklendirilmiş Pearson X^2 istatistiği ve sapmasınının, tüm modellerde benzer yada serbestlik derecesine (Df) yakın bir sonuç olduğunu gözlemlemekteyiz. Bu nedenle modellerin geçerliliğini reddedemeyiz. Bununla birlikte, Aşırı-yayılmış Poisson ve aşırı-yayılmış Negatif Binom dağılımları için, Pearson X^2 istatistiğinin değerinin φ dağılım parametresinin tahminine göre hesaplandığı unutulmamalıdır. Normal dağılım için her iki istatistik de karelerin toplamına eşittir.

Akaike Bilgi Ölçütü'nün değerlerine bakıldığında, Aşırı-yayılmış Negatif Binom normal yaklaşımı modeli en iyi performansa sahiptir. Aşırı-yayılmış Poisson ve Aşırı-yayılmış Negatif Binom modelleri için Akaike Ölçütü değerlerinin başkalarıyla karşılaştırılması uygun değildir. Bu değerler, aşırı-yayılım için ayarlama olmaksızın başlangıçta hesaplanmıştır.

İncelenen modellerin karşılaştırılmasının ardından, tahmini toplam rezervlerin ve bunların bootstrap eşdeğerinin sonuçlarını Tablo 4'te sunulmaktadır. Ayrıca veri setinin tahminsel dağılımlarından, mevcut risk ölçütleri olan riske maruz değerler (VaR) ve koşullu riske maruz değerler (CVaR) hesabı anlamlılık düzeyini α = 0,95 için hesaplanmıştır.

Tablo 4. Tahmini Rezerv ve risk ölçüleri VaR, CVaR

MODEL	Tahmini Rezerv	Bootstrap Rezerv	$VaR_{0.95}$	$CVaR_{0.95}$
ODP	922.680,58	943.168,03	1.013.948,83	1.035.219,57
ONB	923.458,03	923.426,64	1.196.084,56	1.279.151,99
Gamma	919.218,19	945.538,34	1.356.458,99	1.594.282,77
Normal	932.962,63	933.401,36	1.006.872,21	1.026.823,11
NONB	922.680,58	923.270,42	986.978,98	1.003.190,09

Tablo 4'ten tahmin edilen rezervler arasında farklılıklar olduğu ve bunların herbirinin Tablo 2'de verilen asıl yükümlülüklerden daha yüksek olduğu görülmektedir. Bootstrap rezervleri ile ilgili olarak, modeller için değerleri benzerdir. En yüksek risk dağılımı gamma modelindedir, burada VaR ve CVaR risk ölçümleri en yüksek değerleri almaktadır. Bu durum verilen dağılımın çarpıklığının yüksek oluşu sebebiyle oluşmaktadır.

Analiz edilen modellerin performansı yeterli ve tatmin edicidir. Bu nedenle aktüerlerin, pratik yönden uygulanabilir modeli seçme olasılığı vardır. Seçimi riskten kaçma şeklinde de belirleyebilmekteyiz. Çalışmada model olarak aşırı-yayılmış Negatif Binomun normal yaklaşımı modeli seçilmiştir.

SONUÇ

Çalışmasının amacı, sigortacılıkta önemli bir yeri olan, hasar rezervlerinin hesaplanmasında Genelleştirilmiş Doğrusal Modellerinin uygulanmasını incelemektir. GDM'lerin kullanımı, modellerin klasik doğrusal regresyonun bir uzantısı olarak sunduğu olanaklarla doğrulanmıştır.

Öncelikle, pratikte yaygın olarak kullanılan hasar rezervleri ve ilgili temel tahmin yöntemleri tanıtılmıştır. Ancak Chain-Ladder ve BF yöntemleri sadece ödenmemiş hasarların beklenen değerlerinin tahmini ile ilgilenirken, rezerv riskini hesaplamamaktadır. Bu durum, stokastik modellemenin kullanılmasını önemli kılmaktadır.

Kullanılan stokastik modelleme Genelleştirilmiş Doğrusal Modellemedir. Hesaplama çerçevesinde rezerv hesaplaması sürecini geliştirmek amacıyla, ilişkili parametre tahmin yöntemleri ve model analizi ilkeleri gösterilmiştir. Üstel dağılım ailesinin tanımları da dahil edilmiştir.

Gelişim üçgenlerindeki verilerin dağılımını belirlemek amacıyla bu aileden gelen olasılık dağılımları kullanılmıştır. Hayat-dışı sigortada bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki doğrusal bağ varsayımı çoğu zaman ihlal edildiğinden, GDM'lerin özellikleri nedeniyle avantajı olmuştur ve bu ilişki birkaç tekdüze gerçek değerli fonksiyonların yardımıyla tanımlanmıştır. Dağılımların bağlantı fonksiyonları ile birleştirilmesiyle, kesikli ve sürekli rastgele değişkenlerin modellenmesi arasında ayrıştırılan gelişim üçgeni için dokuz model önerilmiştir.

Çalışmanın ilgi konusunun rezerv risklerinin tahmin edilmesi olması sebebiyle, hasar rezervlerinin hesaplanmasında tahmine dayalı tüm dağılımların kullanılması sağlanmıştır. Karlılık için, Pearson artıklarının yeniden örneklendiği bir bootstrap yöntemi benimsenmiştir. Tahminleyici dağılımlara sahip olmak için, pratikte en çok kullanılan risk ölçümleri olarak VaR ve $CVaR$ hesaplamada dikkate alınmıştır.

Son olarak, önerilen modelleri analiz etmek ve performanslarını karşılaştırmak için gerçek hayattaki veriler üzerinden uygulama yapılmıştır. Elde edilen değerlerde, birbirine benzeyen ve gerçek değerlere karşılık gelen beş modelden oluşan grup için elde edilen sonuçların detaylarını açıkladık. Modellerin analizini ve karşılaştırmasını takiben, aşırı-yayılmış Negatif Binom Normal Yaklaşımı modeli tam olarak açıklanmak üzere seçilmiştir. Uygulama sonuçları tablo ve şekiller ile özetlenmiştir.

Analizlerimiz sonucu elde edilen sonuçlar tatmin edicidir. Soruları cevaplanan iddiaların altta yatan teorisini geliştirmek için çeşitli önerilerimiz mevcuttur. Örneğin; GDM'lerin varsayımlarından biri, hayat-dışı sigorta gerçekliği ile bağlantılı olan gözlemlerin bağımsızlığıdır. Bu nedenle, bu çalışma boyunca kullanılan teorinin uzantısı olarak karşılıklı veri korelasyonunu inceleme ve düşünmeye teşvik etmekteyiz. Hasar tutarlarının bu tür gelişim ve tahminlerini incelemek ve tahmini risk ölçümlerindeki değişimi araştırmak yararlı olacaktır.

KAYNAKÇA

ENGLAND, P., VERRALL, R.J., (1998), Standard errrors of prediction in claims reserving: a comparison of methods, Proceedings of the General Insurance Convention & ASTIN Colloquium in Glasgow, 1, 459-478.

ENGLAND, P. D. and VERRALL, R. J. (1999). Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 25, p. 281-293.

ENGLAND, P., VERRALL, R.J., (2002), Stochastic claims reserving in general insurance, British Actuarial Journal, Faculty of actuaries and Instute of actuaries, 8, 3 443-518.

ENGLAND, P. D. (2002). Addendum to 'Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving'. Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 31, p. 461-466.

ENGLAND, P. D. and VERRALL, R. J. (2006). Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. Annals of Actuarial Science, Vol. 1, No. 2, p. 221-270.

MACK, T., (1991), A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves, ASTIN Bulletin, 22, 1, 93-109.

MACK, T., (1994), Which stochastic models underlying the chain-ladder model Insurance: Mathematics and Economics, 15, 133-138.

MACK, T. (1993). Distribution-free calculation of the standard error of chainladder reserve estimates. ASTIN Bulletin, Vol. 23, No. 2, p. 213-225.

R CORE TEAM (2014). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna. http://www.R-project.org/ (Accessed: 31st October 2014).