

ÖZELLİKLERİ YÖNÜNDEN İNPUT FİYATI VE TALEBİ

*Demir ASLAN**

Tam rekabet piyasasında ürünlerin homojenliği varsayımı geçerlidir. Ancak gerçek yaşamda çoğu kez ürünlerin heterojen yapıda oldukları gerçeği ile karşılaşılır. Aynı ürünün farklı tipleri, modelleri arasında inputların özelliklerinden doğan farklılıklar vardır. Input özelliklerindeki farklılıklar ürünü, üreticiyi ve tüketiciyi dolaysız ya da dolaylı olarak etkiler. Bu etkileme ile Neo-Klasik firma ve tüketim kuramları arasında ilişki ya da bağlantı kurmak olası mıdır? Bu soruya yanıt arama çabaları bu çalışmanın özünü oluşturmuştur. Input özelliklerine ilişkin iki ana varsayımdan yola çıkılarak varsayımların tutarlılığını destekleyecek kuramsal modeller geliştirilmeye çalışılmıştır.

GİRİŞ

Kuramsal olarak tam rekabet piyasasında ürünlerin homojenliği ya da standardlaştırılmış olduğu varsayılır. Bazı ekonomik analizler için bu tür bir varsayım oldukça geçerlidir. Ne var ki standard, kalite, ürün farklılaştırması gibi konuların içerildiği bazı endüstriyel problemlerde ürünün heterojenliği söz konusu olmaktadır. Üretici firmalar ya tek bir ürün ya da birden fazla ve farklı ürün üretirler. Tek bir ürün üretimi ile uğraşan firmalarda tek çeşit üretime pek az rastlanır. Genellikle tek bir ürünün farklı tip ya da modelleri üretilir. Örneğin, farklı modellerde buzdolabı, çamaşır makinası ya da farklı vasıflarda demir-çelik dökümü gibi. Gübre,

(*) Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik - Mimarlık Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü'nde Profesör.

hayvan yemi gibi karışım ile üretilen ürünler de örnek verilebilir. Otomotiv yan sanayii alanında çalışan bir firma, örneğin, motorlu araçlar için yakıt besleme pompası üretir. Ancak üretilen pompa tek tip değildir, farklı yapı ve modellerdeki araçlar için farklı model pompalar üretilir. O halde ürünün homojenliği varsayımı pratikte pek geçerli olmamaktadır. Genel olarak denilebilir ki, aynı ürünün farklı tipleri, türünde bulunması gereken özelliklerin farklı nicelik ve niteliklerine sahip olabilir. Öte yandan bir modelde bulunan herhangi bir özellik diğer bir modelde bulunmayabilir. Bu demektir ki ürünün heterojen olması, özellikle üretim sürecinde, bazı problemler doğurabilecektir. Bu tür problemlerin çözümü için ürünün farklı özelliklerini gözönüne alarak yapılacak bir yaklaşım gereklidir. Outputlara, inputlar ve özellikleri koleksiyonu olarak bakılabilir. O halde outputları oluşturan inputlara ürün özellikleri açısından bir yaklaşım yapılabilirse Neo-Klasik firma modeline de değişik açıdan bakmak mümkün olacaktır. Input özelliklerindeki farklılıklar ürünü olduğu kadar üreticiyi ve hatta tüketiciyi de etkiler. Bu özelliklerin ve farklılıkların üretim sürecindeki rolü ve tüketici üzerine etkisi ile firma ve tüketim kuramı arasında bir bağlantı kurmak olasıdır.

1. INPUT ÖZELLİKLERİNİN İKİ ANA VARSAYIMI

Neo - Klasik firma kuramı üretim sürecinde input özelliklerinin rolü üzerinde durur. Nitekim ev - ürün, ya da üretim kayıtsızlık eğrileri üzerindeki her nokta farklı input almasıyla ve dolayısıyla farklı üretim süreçlerini gösterir. Her süreç ayrı bir üretim teknolojisine işaret eder. Süreçlerin ve teknolojilerin farklılığı input miktarları kadar input özelliklerine ve bu özelliklerin inputtaki miktarlarına da bağlıdır. Inputun taşıdığı özellik ve özelliğin miktarı inputun fiyatını ve talebini etkiler. Bu etkilemenin üretici ve tüketiciye yansması da yadsınmaz. Bu nedenle, üretici ve tüketici açısından, input fiyatı ve talebi için iki ana varsayım ortaya konabilir. Varsayımların ekonomik kurama aykırı olmadığı ve bazı ifade değişiklikleriyle ortaya konduğu görülecektir.

Varsayım I —

A) Bir inputun fiyatı satmaların bu inputun özelliklerine ödediği toplam parasal değere eşittir. Input özelliklerinin herbirinin parasal değeri ise, input özelliğinin marjinal hasılası ile bir birim özelliğin marjinal parasal değerinin çarpımına eşittir.

B) Her ürün için tüketicinin ödediği fiyat, ürün özelliklerinin marjinal parasal değerlerinin toplamına eşittir. Ürün özelliğinin marjinal parasal değeri ise, tüketilen ürünün marjinal biriminden elde olunan özellik miktarı ile özelliğin marjinal gölge fiyatı çarpımına eşittir.

Varsayım II —

A) Bir inputa olan talep, inputun özellikleri tarafından etkilenir.

B) Tüketicinin talep fonksiyonu ürünlerin özellikleri tarafından etkilenir.

Görüldüğü üzere varsayımlar üretici ve tüketici yönünden ortaya konulmuştur. Üreticinin input tüketicisi olduğu gerçeği de göz önüne alınırsa ayrıntılı olarak ifade edilen varsayımları input fiyatı ve input talebi açısından iki ana grup olarak düşünmek olası. Varsayımların ekonomik kuram ile tutarlılıkları yanısıra özelliklerin marjinal parasal değerlerinin ölçülebilirlikleri de araştırılmağa değer görülmektedir.

2. MODELLER

Yukarıda belirlenen varsayımların tutarlılığı yönünden ortaya konmaya çalışılan modeller genelde iki kısımda düşünülebilir: Üretici açısından, tüketici açısından. Ayrıca varsayımların alt ayrımları yönünden de modelleri ayırmak olası.

2.1. Üretici Açısından Model

Bu alt ayrımda ele alınacak model ana varsayımların "A" ile belirlenen ikincil varsayımları yönünden düşünülmüştür.

2.1.1. (I-A) Varsayımına Göre

Çok ürünlü ya da tek ürünün farklı tip ve modellerini üreten bir firmada her ürünün üretim fonksiyonu diğerlerinininki ile ilişkisizdir. Kuramsal olarak ilişkisiz kavramı yerine 'bağımsız' kavramı kullanılabilir. Çünkü her ürün için farklı teknolojik (input - output) katsayıları söz konusudur ve dolayısıyla farklı üretim süreçleri uygulanır. Ancak endüstriyel yaşamda tam bir bağımsızlığın söz konusu olmadığını söylemek yanlış olmasa gerek. Bu nedenle üretim fonksiyonlarının ilişkisiz olduğu şeklinde bir deyim uygun bulunmuştur.

Genel olarak bir üretim fonksiyonu

$$(1) \quad Q = F(X_i) \quad \text{veya} \quad Q = F(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Q ürün ya da output, X_i inputlardır. Bir üretim işleminde kullanılan inputun faydalı olduğu varsayılır. Inputun faydalı oluşu ise faydalı özellikler taşıdığı içindir. Inputun üretime olan toplam katkısı bu inputtaki çeşitli özelliklerin miktarına bağlı olacaktır. Öte yandan toplam üretim de tüm inputlardaki tüm özelliklerin toplam miktarına bağlıdır. Şimdi :

m_{ik} : k 'inci outputun üretiminde kullanılan i 'inci input miktarı, $i = 1, 2, \dots, n$)

f_i : i 'inci inputun fiyatı,

p_k : k outputunun fiyatı,

Q_k : k outputundan üretilen miktar,

x_{jik} : k outputunun üretimine katılan bir birim " i " inputunun " j " özelliğinin miktarı (ki input kullanıcısının denetiminde değildir), ($j = 1, 2, \dots, m$)

x_{jk} : k outputunun üretimine katılan " j " özelliğinin toplam miktarı,

olsun. x_{jk} kullanılan inputların miktarlarının ve özelliğinin input - output katsayılarının fonksiyonudur :

$$(2) \quad x_{jk} = X_{jk}(m_{1k}, m_{2k}, \dots, m_{nk}; x_{j1k}, x_{j2k}, \dots, x_{jm k})$$

o halde k outputunun üretim fonksiyonunu kısaca,

$$(3) \quad Q_k = F_k(x_{jk})$$

şeklinde yazmak olası.

Ekonomik kurama göre firmanın, birbirinden ayrılmaz ve tamamlayıcı durumda, iki temel amacı vardır : Kârın (net gelir) en çoklanması, maliyetin enazlanması. Net gelir en çoklamasının amaç olduğu durum ele alınırsa kâr fonksiyonu şöyle yazılabilir :

$$(4) \quad P = \sum_{k=1}^K p_k F_k(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}) - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n f_i m_{ik}$$

Görüldüğü üzere kâr = gelir — maliyet genel kavramı ortaya konmuştur. Gelir ve maliyet fonksiyonları söz konusu olduğuna göre, fonksiyonun fonksiyonu kuralı uygulanarak, (4) eşitliğinin m_{ik} ye göre türevi alınır :

$$(5) \quad \frac{aP}{am_{ik}} = p_k \sum_{j=1}^m \left(\frac{aF_k}{ax_{jk}} \right) \left(\frac{ax_{jk}}{am_{ik}} \right) - f_i = 0$$

ve buradan

$$(6) \quad f_i = p_k \sum_{j=1}^m \left(\frac{aF_k}{ax_{jk}} \right) \left(\frac{ax_{jk}}{am_{ik}} \right)$$

elde olunur. (6) eşitliğinin sağ tarafında parantez içinde bulunan terimlerden birincisi "k" outputunun üretiminde kullanılan "j" özelliğinin bir biriminin marjinal fiziksel ürünüdür. İkinci parantezli terim ise "k" outputunu üretmek için "i" inputundan kullanılan "j" özelliğinin marjinal hasılasıdır. "j" özelliğinin marjinal ürün değerini elde etmek için marjinal fiziksel ürün ile output fiyatını çarpmak gerekir :

$$(7) \quad M_{jk} = p_k \left(\frac{aF_k}{am_{ik}} \right)$$

O halde (6) eşitliği, kısaltılarak, şöyle yazılabilir :

$$(8) \quad f_i = \sum_{j=1}^j M_{jk} \left(\frac{ax_{jk}}{am_{ik}} \right)$$

Toplama işaretinin dışımda, sağ taraf ifadesi (I-A) varsayımının matematiksel şeklini oluşturur.

2.1.2. (II-A) Varsayımına Göre.

Ürünlere olan talep gereksinim, karşıladıkları için ya da fayda sağladıkları içindir. Üretim için kullanılacak inputlar üretici tarafından bu yönleriyle talep edilirler. Üretici bir inputta, kendi ürününde bulunmasını istediği, bir özellik bulursa o inputtan fayda umar ve inputa talep doğar. 2.1.1. deki (5) eşitliği, max. ve min. için, birinci ölçüttür ve nK denklemlerle bir sistem oluşturur ki m_{ik} kadar bilinmeyi vardır. Ençoklama (max.) için ikinci ölçüt koşulunun yerine gelmesi gerekir. Bunun için şöyle bir yaklaşım düşünebilir: Tek bir ürün üreten firma açısından $k = 1$ olacağı için denklemlerde bu endise yazılmayabilir. Ohalde (5) eşitliği, tek ürün için,

$$(9) \quad \frac{aP}{am_i} = p \sum \frac{aF}{am_j} - f_i = 0$$

yazılabilir. Şimdi, "i" inputunun üreticisinin x_{ji} yi dx_{ji} kadar değiştirdiğini düşünelim. Böyle bir değişme ana ürünün, yani bu inputu kullanarak üretim yapan üreticinin outputunun, yapısını değiştirirse inputtaki böyle bir değişimin ana ürünü üreten firmadaki inputlar kullanım düzeyi üzerindeki etkilerini incelemek gerekir. Inputtaki özellik değişmesi inputun fiyatında değişme meydana getirir. Fiyattaki bu değişimin input kullanımına etkisinin belirlenmesi input kullanım düzeyine etkinin irdelenmesine yardımcı olur. Özellik değişmesi sonucu input fiyatı değişmişse, (9) eşitliğinin gösterdiği "n" ifadenin input fiyatına göre türevi alınır ve (dm_i/af_i) için çözülürse, etkisi belirlemek olası. $\Delta = nx_{ji}$ simetrik determinant olarak tanımlanırsa, "h" inci sıra ile "t" inci sütun elemanı da $(a^2 F / am_h am_t)$ ise, bu elemanın kofaktörü Δ_{ht} olur ve

$$(10) \quad \frac{am_t}{af_i} = \frac{\Delta_{ht}}{p\Delta}$$

yazılabilir. Şimdi, x_{ji} deki değişimin etkisi (9) eşitliğinin x_{ji} ye göre türevinin alınması ve (am_t/ax_{ji}) için çözülmesi ile bulunabilir. V_i : "i" inci inputun marjinal fiziksel verimliliği ise $(= aF/am_i)$

$$(11) \quad \frac{am_t}{ax_{ji}} = - \sum_I \left(\frac{aV_I}{ax_{ji}} \right) \left(\frac{\Delta_{nt}}{p\Delta} \right) = - \sum_I \left(\frac{aV_I}{ax_{ji}} \right) \left(\frac{am_t}{af_i} \right)$$

Ohalde x_{ji} deki değişme yalnızca V_I yi etkiler :

$$(12) \quad \frac{am_t}{ax_{ji}} = - \left(\frac{aV_I}{ax_{ji}} \right) \left(\frac{am_t}{af_j} \right)$$

Buna göre de, genel olarak, "i" inputundaki yapısal değişmenin "t" inputu talebi üzerine etkisi (yani, inputlar kullanım düzeyine etkisi) şunlara bağlıdır :

1) Bütün inputların marjinal fiziksel verimliliklerindeki değişmenin etkisine,

2) İntput fiyatındaki değişmenin "t" inputunun talebine olan etkisine.

A priori olarak (11) ve (12) eşitliklerinin sıfıra eşitliği gösterilemez ve varsayım geçerli kılınmış olur.

2.2. Tüketici Açısından Model

Bu alt ayırmadaki model varsayımların B olarak gösterilen ikincil ifadeleri için ortaya konmaya çalışılmıştır.

2.2.1. (I-B) Varsayımına Göre.

Herhangi bir tüketicinin bir ürüne karşı olan talebi ürünün gereksinim giderme özelliği nedeniyledir. Bir başka deyişle ürünler fayda sağladıkları için istenilir. Tüketici bir üründe gereksinim giderecek özellikler bulursa talep eder ve onun satılma isteiğinin kaynağını, üründen umduğu toplam fayda miktarı oluşturur. Ürünün toplam faydası ise ürünlerdeki toplam özelliklerin miktarına bağlıdır.

- x_{oj} : Tüketicinin, ürünlerin tüketimi ile, sağladığı "j" özelliğinin toplam miktarı, ($j = 1, 2, \dots, m$)
 x_{jk} : Bir birim "k" üründen sağlanan "j" özelliği miktarı, ($k = 1, 2, \dots, n$)
 Q_k : Tüketilen "k" ürünü miktarı,

ise "n" kadar ürün ve bu çeşitli ürünlerde "m" kadar özellik olsun. Her üründen, diğerlerinde bulunmayan, farklı bir özellik sağlandığını da düşünelim. Bu durumda her özelliğin toplam tüketimi tüketilen ürünlerin miktarının ve tüketim input - output katsayılarının fonksiyonu olarak düşünülebilir :

$$(13) \quad x_0 = F_1 (Q_1, Q_2, \dots, Q_n; x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})$$

$$x_{0m+k} = F_{m+k} (Q_k, x_{km+k})$$

Bütün ürünler ve bütün ürün özellikleri açısından tüketicinin fayda fonksiyonu :

$$(14) \quad U = U (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}, x_{0m+1}, x_{0m+n})$$

olarak yazılabilir. x_{jk} miktarları üretici tarafından, üretim teknolojisi uyarınca, belirlenmiş olup tüketici için veridirler. Dolayısıyla tüketicinin yalnızca Q_k konusunda değişiklik yapabilmeye olanağı vardır. Ekonomik kurama göre tüketicinin amacı fayda ençoklamasıdır ve bu amaç bütçe kısıtı ile bağlıdır :

$$(15) \quad \sum p_k Q_k = B$$

(14) ve (15) eşitliklerinden oluşan sistemde amacın ençoklanması Lagrange çarpımı aracılığıyla gerçekleştirilebilir :

$$(16) \quad L = U (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m+n}) - \lambda (\sum p_k Q_k - B)$$

Kuramsal olarak tüketici toplam faydasını ençoklayacak ürün almasını seçer. Böyle bir almanın ürün özelliklerinden sağlanacak faydayı da ençoklayan özellikler almasını da sağladığı düşünülebilir. Bu düşünüş biçiminden giderek, tüketicinin ürün seçim kararının temelinde ürünlerin farklı özelliklerinin oluşu gerçeği vardır, denebilir. Tüketicinin sağladığı "j" özelliğinin toplam miktarı tüketilen ürün miktarının fonksiyonudur. Fonksiyonun fonksiyonu kuralına göre fayda fonksiyonunun türevi alınrsa :

$$(17) \quad \frac{aL}{aQ_k} = \sum_k \left(\frac{au}{ax_{oj}} \right) \left(\frac{ax_{oj}}{aQ_k} \right) + \left(\frac{au}{ax_{om+k}} \right) \left(\frac{ax_{om+k}}{aQ_k} \right) - \lambda p_k = 0$$

Tüketicinin bütçesini oluşturan gelirin marjinal faydası :

$$(18) \quad \lambda = \frac{au}{aB}$$

dir ve bu değer (17) de yerine konularak p_k için çözümlerse :

$$(19) \quad p_k = \sum_j \left(\frac{ax_{oj}}{aQ_k} \right) \left[\frac{\left(\frac{au}{ax_{oj}} \right)}{\left(\frac{au}{aB} \right)} \right] + \left(\frac{ax_{om+k}}{aQ_k} \right) \left[\frac{\left(\frac{au}{ax_{om+k}} \right)}{\left(\frac{au}{aB} \right)} \right]$$

Yukarki eşitlikte görülen oranlardan bazılarının anlamları şöyle açıklanabilir :

$$\frac{ax_{oj}}{aQ_k} : k \text{ ürününden sağlanan } j \text{ özelliğinin marjinal hasılası,}$$

$$\frac{ax_{om+k}}{aQ_k} : k \text{ ürününe özgü özelliğinin marjinal hasılası,}$$

$$\frac{au}{ax_{oj}} : j \text{ özelliğinin marjinal faydası.}$$

Gelirin ya da bütçenin marjinal faydası (18) eşitliğinin sağ tarafındaki orandır. Ekonomik kurama göre marjinal faydaların oranı marjinal ikame haddini, (MİH), belirlediğinden (19) eşitliğinde birinci köşeli parantez içindeki ifade bütçe ile "j" özelliği arasındaki MİH'ni gösterir. Analiz kolaylığı açısından (15) de gelir = toplam harcama

olarak düşünüldüğünden, sözü edilen köşeli parantez içindeki ifade, harcama ile özellik arasındaki MİH'ni de verir, ki bu da "j" özelliğinin gölge fiyatı demektir.

Tüketicinin toplam harcamasını T ile gösterirsek,

$$(20) \left(\frac{au}{aB} \right) = \left(\frac{aB}{ax_{oj}} \right) = \left(\frac{aT}{ax_{oj}} \right)$$

yazılabilir. Tüketilen her birim ürün için, ürünün kendine özgü özelliğinden bir birimini sağladığı ya da içerdiği varsayılırsa,

$$(21) \frac{ax_{om} +_k}{aQ_k} = 1$$

olur ve (19) eşitliği de

$$(22) P_k = \sum_j \left(\frac{ax_{oj}}{aQ_k} \right) \left(\frac{aT}{ax_{oj}} \right) + \frac{aT}{ax_{om} +_k}$$

olarak yazılabilir ki, (I-B) varsayımının matematiksel ifadesini oluşturur.

2.2.2. (II-B) Varsayımına Göre

Bir önceki altayırmıda belirlenen (15) ve (17) eşitlikleri (n + 1) bilinmeyenli (n + 1) denklem sistemi oluştururlar ve çözüm sonucunda bütçenin marjinal faydası ile ürün miktarlarının en iyi değerleri (yani λ^* , Q^*_1 , Q^*_2, \dots, Q^*_n) elde olunur. "h" ürününün fiyatındaki değişiminin "g" ürününün eniyi miktarı üzerindeki etkisi, SLUTSKY ikame terimini (S_{hg}) de katarak, şöyle yazılabilir :

$$(23) \frac{aQ_g^*}{ap_h} = - Q_h^* \left(\frac{aQ_g^*}{aB} \right) + S_{hg}$$

ki B = sabit olmak koşuluyla ikame terimi ($\frac{Q_g}{P_g}$) dir. Şimdi "c" ürününün üreticisinin inputun "l" özelliği miktarında (ki x_{lc}

olarak gösterilebilir) ufak bir değişiklik yapmış olduğunu kabul edelim. Fiyatlar, gelir ve diğer x_{jk} ler sabit kaldığından (15) ve (17) eşitliklerinin x_{1c} ye göre türevi alınırsa :

$$(24) \quad \frac{aQ_g^*}{ax_{1c}} = - \left(\frac{1}{\lambda^*} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{au_k}{ax_{1c}} \right) S_{kg} \quad (\text{ki } U_k = \frac{au}{aQ_g} \text{ dir}).$$

Buna göre "g" ürünü için x_{gc} kadarlık talep değişmesi "g" nin diğer ürünlerle ikame edilebilirliğine veya tamamlanabilirliğine bağlıdır. Başka bir deyişle, "c" deki değişme nedeniyle oluşan Q_g^* deki değişme marjinal faydalar ve ikame terimlerindeki değişmelerin etkisine bağlıdır. Yani (fiyatların ve tüketici gelirinin sabit kalması durumunda, "g" den satılman miktar, üreticisinin enaz bir tane tüketim Input - Output katsayısını değiştirmesi ile, değişebilir. Öte yandan "1" özelliğindeki miktar artışı "c" ürününün marjinal faydasını artırır, ancak diğer ürünlerin marjinal faydalarını etkilemez. Bu demektir ki,

$$(25) \quad \frac{au_c}{ax_{1c}} > 0 \quad \text{ve fakat} \quad \frac{au_k}{ax_{1c}} = 0 \quad (k \neq c)$$

Ohalde (24) eşitliği şu şekle dönüşür :

$$(26) \quad \frac{aQ_g^*}{ax_{1c}} = - \left(\frac{1}{\lambda^*} \right) \left(\frac{au_c}{ax_{1c}} \right) S_{gc}$$

Eğer $S_{gc} > 0$ ise "g" ve "c" ürünleri ikame ürünlerdir ve dolayısıyla x_{1c} nin değerindeki artış "g" nin talebini azaltır. $S_{gc} < 0$ ise bu ürünler tamamlayıcı ürünlerdir ve x_{1c} değerindeki artış "g" talebini artırır. $c = g$ olarak alınır ve (26) eşitliğinde yerine kournsa

$$(27) \quad \frac{aQ_c^*}{ax_{1c}} = - \left(\frac{1}{\lambda^*} \right) \left(\frac{au_c}{ax_{1c}} \right) S_{cc} > 0$$

yazılabilir ve (24), (26), (27) eşitlikleri (IIB) varsayımını gösterir.

3. DOĞRUSAL PROGLAMLAMA YAKLAŞIMI

Doğrusal programlama tekniğinin ikililik ilişkisinden yararlanarak gerek Varsayım I'in, gerekse input özelliklerinin parasal değerlerini belirlemek olası. Varsayım I'in yapıma uygun düşen üretim işlemleri metal alaşım elde etmek, hem cevher ayıklamak, petrol endüstrisinde endüstriyel yağ karışımı hazırlamak, ilaç yapmak, diet hazırlamak gibi karışım yoluyla ürün elde etmektir.

karışım süreci ile ürün elde etmede amaç birim output maliyetini enküçüklemedir.

- p_i : Karışımında kullanılan "i" inci inputun fiyatı,
 x_i : Birim output başma kullanılan "i" inputu miktarı,
 a_{ji} : "i" inpütunun bir birimindeki "j" özelliğinin miktarı,
 a_{oj} : Bir birim output için gerekli "j" özelliğinin miktarı ise

Amaç Fonksiyonu :

$$(28) \min \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Kısıt Koşulları :

$$(29) \sum_i a_{ji} x_i \geq a_{oj} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m_0$$

$$(30) \sum_i a_{ji} x_i = a_{oj} \quad ; \quad j = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m$$

$$(31) \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

$$(32) \quad x_i \text{ kısıtsız} \quad ; \quad i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$$

Problemin ikincili,

Amaç Fonksiyonu :

$$(33) \max \sum_{j=1}^m a_{oj} Y_j$$

Kısıt Koşulları :

$$(34) \quad \sum_j a_{ji} Y_j \leq P_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

$$(35) \quad \sum_j a_{ji} Y_j = P_i \quad ; \quad i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$$

$$(36) \quad Y_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m_0$$

$$(37) \quad Y_j \text{ kısıtsız} \quad ; \quad j = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m$$

Problemlerde (32) ve (37) ifadelerindeki “kısıtsız” kavramı “un-restricted in sign” anlamında kullanılmış olup, kısıt koşullarından birinin eşitlik şeklinde olması halinde karşılık gelen ikincil (dual) değişkenin negatif olmama koşulu ile kısıtlanmadığı anlatılmak istenmiştir.

Doğrusal programlamanın ikincilik teoreminden, birincil ve ikincil problemlerin amaç fonksiyonlarının eniyi değerlerinin eşit olduğu yani $\min \sum_i p_i x_i = \max \sum_i a_{oj} Y_j$ yazılabileceği çıkartılabilir.

Eğer bir birim output için gerekli olan “j” inci özellik miktarında Δa_{oj} kadarlık artış olduğu varsayılırsa :

$$(38) \quad \frac{\Delta \min \sum_i p_i x_i}{\Delta a_{oj}} = \frac{\Delta \max \sum_i a_{oj} Y_j}{\Delta a_{oj}} = Y_j$$

yazılabilir ve bu durumda Y_j , “j” inci özelliğin gölge fiyatı olarak anlaşılabilir. Bu gölge fiyat, değişen özellik miktarının toplam karışım maliyetine etkisi ile birlikte, değişme miktarının gerekli özelliğin ençoklanmış parasal değerine etkisini de ölçer. O halde (35) kısıtma göre “i” inputunun bir birimindeki bütün özelliklerin toplam parasal değeri “i” inputunun fiyatına eşittir. Birincil ve ikincil problemlerin eniyi çözüm sonuçlarına göre x^*_i ve Y^*_j eniyilenmiş değerler ise ve $x^*_i > 0$ bulunmuşsa

$$(39) \quad \sum_i a_{ji} Y^*_i = p_i$$

olur ki (6) eşitliğinden farksızdır ve (I-A) varsayımını da gerçekler.

Değinilmesi gereken bir başka nokta da birincil problemin en-coklama olduğu karışım problemleriyle de karşılaşıldığıdır.

Amaç Fonksiyonu :

$$(40) \max \sum_i e_i x_i$$

Kısıt Koşulları :

$$(41) \sum a_{ji} x_i \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases} I_j \quad ; \quad \begin{cases} j = 1, 2, \dots, m \\ j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m \\ j = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m_1 \end{cases}$$

$$(42) \quad x_i \geq 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

$$(43) \quad x_i \text{ kısıtsız} \quad ; \quad i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$$

Amaç Fonksiyonu :

$$(44) \min \sum_j I_j Y_j$$

Kısıt Koşulları :

$$(45) \sum_j a_{ji} Y_j \geq c_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n_0$$

$$(46) \sum_j a_{ji} Y_j = c_i \quad ; \quad i = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n$$

$$(47) \quad Y_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m_0$$

$$(48) \quad Y_j \leq 0 \quad ; \quad j = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots, m_1$$

$$(49) \quad Y_j \text{ kısıtsız} \quad ; \quad j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m$$

Problemlerde,

c_i : net gelir (kâr),

x_i : "i" inci ürünün miktarı,

a_{ji} : "i" inci ürünün bir birimi için gerekli "j" inci özellik miktarı,

I_j : "j" inci özelliğin toplam stoku, anlamındadır.

Karışım probleminin bu tür yaklaşımında da

$$(50) \quad \frac{\Delta \max \sum c_i x_i}{\Delta I_i} = \frac{\Delta \min \sum I_j Y_j}{\Delta I_j} = Y_j$$

olup, "j" inci özelliğin gölge fiyatıdır ve bu özelliğin ilâve bir birimi için firmanın katlanabileceği en çok ödeme miktarıdır. Bu değer, aynı zamanda, firma stokundan bir birim "j" eksildiğinde net gelirden oluşacak azalma demektir de. Ohalde, "p" input fiyatı ise :

$$(51) \quad \sum Y_j \Delta I_j \geq p$$

olduğu sürece firma "j" özelliğine sahip bir birim input alabilir ve bunu üretimde kullanabilir.

Son olarak değinilmesi gereken bir hususta input özelliklerinin birbirinden ayrılamaz oluşu durumudur. Bu gibi durumlarda herhangi bir input özelliği, diğer özelliklerinde belirli bir oranda çekilmesi koşuluyla inputtan çekilebilir. O zaman bazı kaynakların israf edilmiş olacağı açıktır ve gölge fiyat kavramı da anlamını yitirir.

KAYNAKÇA

- MALINVAUD, E. — Lectures on Microeconomic Theory. North Holland Pub. Co. London, 4th printing, 1976.
- LIEBHAFSKY, H.H. — The Nature of Price Theory. The Dorsey Press Inc. Homewood, Ill, 1963.
- ALLEN, R.G.D. — Mathematical Analysis for Economists. Macmillan, London, 1967.
- CHARNES, A. - W.W. COOPER — Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. Vol. I. John Wiley, N.Y. 1961.
- ASLAN, Demir — Üretim Planlama ve Kontrol, I. E.Ü. Makina Fakültesi, Yayın No. 42, İzmir, 1981.