

İNDEKSLERLE İLGİLİ BİR ARAŞTIRMA VE SONUÇLARI (*)

Çevirenler :

Yoram BARZEL

Ass. İmdat KARA - Ahmet S. TALU

Temel yıl fiyatını tartı alarak elde edilen Laspeyres miktar indeksinin, gerçek değişimin tahmini değerini, (sistemik bir hata sonucu) kusurlu olarak verdiği bilinmektedir. Bir elektrik enerjisi sanayisinde ki verimlilik değişimi araştırmasında böyle bir indeks toplam girdideki değişimleri ölçmek için kullanılmıştır. Bu indeks 1929 da 100 den başlayıp, 1955 de 169,6 ya yükselmiştir (?). Sonuç sistematik hatalı bir tahmin olduğundan, hatanın yönünü ve büyüklüğünü saptamak gerekmekte ve onu minimuma indirmek için bir yol bulma zorunluğu doğmaktadır. Bu şekildeki bir çalışmanın sonuçları, indekslerden yararlanarak tahminlerde bulunan diğer birçok çalışmaları da etkileyecektir.

İlk durumdan yeni bir duruma geçiş için gerekli olan girdideki değişim miktarının Laspeyres indeksi ile elde edilen tahmin değeri yukarı doğru sistematik hatalıdır. Çıktıdaki değişim miktarını doğuran girdi miktarını fazla gösterir. Öte yandan, çıktıdaki değişim miktarını doğuran girdi miktarı Paasche indeksine göre sap-

(*) BARZEL, Yoram; «Some Observations on the Index Number Problem»; *Econometrica*; Cilt 31, No. 3 (Temmuz, 1963), s. 391 - 400.

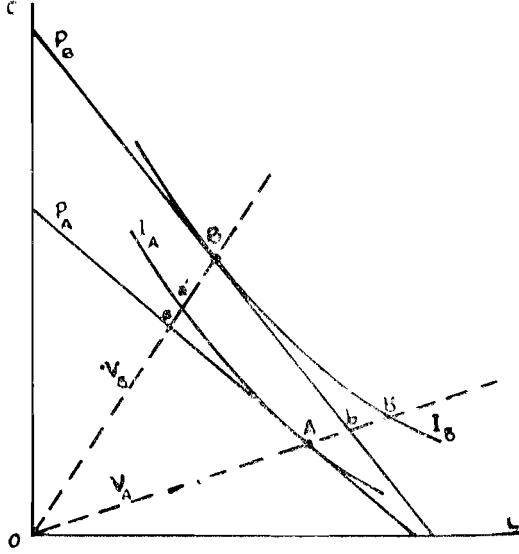
(1) Bu yazının bazı kısımları doktora tezimin belirli kısımlarından aktarılmıştır :

BARZEL, Yoram; *Productivity in the Electric Power Industry 1929-1955*, Yayınlanmamış doktora tezi, Chicago Üniversitesi, Ekonomi Bölümü, 1961.

(2) Bu ve bunu takip eden bütün tahmin değerlerine kaynak olarak bkz.: BARZEL, Yoram, a.g.e.,

tandığında, tahmini değer aşağı doğru sistematik hatalıdır (3). Her iki yolla elde edilen tahmini değerlerdeki sistematik hatalar şekil 1'de grafik üzerinde gösterilmiştir.

Şekil : 1



A ve B birinci ve ikinci devrelerde müşahade edilen emek ve kapital miktarlarını göstermektedir (yatay eksen, L, emek miktarını; dik eksen, C, kapital miktarını), P_A ve P_B devrelere ilişkin fiyat doğruları, I_A ve I_B fiyat doğrularına A ve B noktalarında teğet olan farksızlık eğrileridir (isoguants). V_A ve V_B , A ve B noktalarını orijine birleştiren yarıçap vektörlerdir. V_A , P_B yi b ve I_B yi b'de; V_B , P_A yi a ve I_A yi a' de kesmektedir. Laspeyres indeksinde birinci devre I_A farksızlık eğrisi yerine yaklaşık olarak P_A fiyat doğrusu kullanılmıştır. P_A üzerinde A dan (a) ya kadar hareket, farksızlık eğrisi üzerinde yapılmış gibi sayılmakta ve (aB) uzaklığı A dan B ye hareket etmek için gerekli olan girdideki artış miktarının Laspeyres ölçüsünü vermektedir (daha doğru bir deyişle I_A dan I_B ye hareket

(3) İndeks sayısı probleminin geniş bir incelemesi şu eserde de sunulmuştur :

RUTTAN, Vernon W.; «Technological Progress in the Meat Packing Industry, 1919-47», University of Chicago, 1952.

etmek için gerekli olan girdi artış miktarının ölçüsüdür). Açıklıkla görüleceği gibi bu miktar gerçeğe nisbetle büyüktür; Aslında (a'B) kadar olması gereklidir. (aa') uzaklığı Laspeyres indeksinin sistematik hata miktarıdır. Öte yandan, ikinci devrede I_B farksızlık eğrisi yerine yaklaşık olarak P_B fiyat doğrusu kullanıldığında, I_B üzerinde B den (b) ye kadar hareket farksızlık eğrisi üzerinde sayılmaktadır; (bA) uzaklığı A dan B ye hareket etme için gerekli olan girdideki değişimin ölçüsüdür. Buna Paasche ölçüsü denmektedir. Bu miktar gerçek ölçü olan (b'A) dan daha azdır ve sistematik hata miktarı (bb') kadardır.

Gözönüne alınan eğriler dışbükey değil de içbükey olursa elde edilen bu sonuçlar tam ters olacaktır. Bu durum bir dönüşüm eğrisinden diğerine hareket söz konusu olduğunda ortaya çıkar (4). Dönüşüm eğrileri içbükey olduğundan ilgili fiyat doğrularının altına düşerler. Böyle hallerde Laspeyres ölçüsünün sistematik hatası aşağı, Paasche ölçüsünün sistematik hatası yukarı doğru olur. Karışıklık, devrelerin birinde dönüşüm diğerinde farksızlık eğrisi kullanıldığında ortaya çıkar. Bu durumda Laspeyres ölçüsünün sistematik hatası farksızlık eğrisi üzerindeki gerçek değişimle karşılaştırıldığında aşağı doğru olur. Paasche ölçüsü için ise sonuçlar tersinedir.

Her iki sistematik hatanın büyüklüğü iki faktörün etkisi altındadır : Farksızlık eğrilerinin dönüklüğü ve nisbî fiyat değişmesi. Bunlardan herhangi biri (diğeri sabit tutulduğunda) ne kadar büyürse sistematik hata o kadar büyür. Nisbî fiyat değişmelerinden doğan sistematik hatayı azaltmak için genellikle takip edilen yol tartıları sık sık değiştirmektir. Tartıları sık sık değiştirmekle, geniş zaman aralıklarına göre saptanan fiyatlarla karşılaştırmalardan kaçınılmış, böylece sistematik hata azaltılmış olur (5). Karşılaştırılan

(4) Bkz. BERGSON, Abraham; *The Real National Income of Soviet Russia Since 1928*, Cambridge : Harvard Üniversitesi Yayını, 1961, s. 32-34.

(5) Bu hükmün daha da açıklanması gerekir. Büyük bir fiyat değişmesi, küçük bir fiyat değişmesine nazaran daha fazla sistematik hataya sebep olur (diğer faktörler sabit alınıyor). Bununla birlikte, karşılaştırma, fiyatlardaki bir tek büyük değişimin doğuracağı sistematik hata miktarı ile küçük fiyat değişmeleri dizisinden doğacak olan sistematik hata miktarları toplamı arasında yapılmaktadır. Eğer söz konusu fonksiyon homojen ise, metinde belirtilen hükmün doğru olduğu gösterilebilir. Hükmün bütün «normal» durumlarda doğru olduğu kabul edilmektedir, fakat bu genelleştirilemez.

devreler arasındaki zaman açıklığının daraltılmasıyla üretim fonksiyonunun şeklindeki büyük bir değişiklik tehlikesi azaltılmış olur. Bu hususlar gözönüne alınarak, elektrik enerjisi sanayiinde toplam girdi indeksi zincirleme indeks olarak hesaplanmıştır. 1929 dan 1955 e kadar birbirini takip eden 26 yılın herbiri için bir girdi indeksi hesaplanmış ve devrenin tümünü kapsayan indeks 26 yılın indekslerinin çarpımı olarak hesaplanmıştır. Tablo I deki birinci satır Laspeyres ve Paasche zincirleme indeksleri ile bunların birbirlerine oranını vermektedir. Burada göze çarpan husus iki indeks arasındaki farkın yüzde üçten az oluşudur.

Karşılaştırma yapabilmek için zincirleme indekslerin yanında sabit tartılı indeksler de hesaplanmıştır. Laspeyres indeksinde bütün devre boyunca yalnız birinci yılın fiyatları ve Paasche indeksinde yalnız sonuncu yılın fiyatları tartı olarak kullanılmıştır. Bu indeksler Tablo I in ikinci satırında verilmiştir. Tartıları her yıl değiştirmekle elde edilen her iki indeks arasındaki fark yüzde üçten az iken, bütün devre için bir tartı kullanıldığında bu fark yüzde ondokuzdan da fazla olmuştur.

T A B L O I
1955 YILINA AİT BAZI GİRDİ İNDEKSLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI (1929 - 100)

	Laspeyres	Paasche	Laspeyres Paasche
1. Zincirleme indeks	169,5	165,7	1,024
2. Sabit Tartılı İndeks	182,5	153,1	1,192

Kendrick, çok sayıda sanayi için verimliliği uzun bir zaman devresi itibariyle ölmüştür. Her bir durumda, farklı girdileri, Laspeyres ölçüsünü kullanarak toplam girdi indeksi halinde birleştirmiştir. İndeksleri birkaç yılda bir zincirleme bağlamıştır. Seçilen zincirleme bağlantı yılları istatistik önemi haiz yıllardır. Bunlar aynı zamanda konjonktür devrelerinde tepe noktalarıdır (6). Se-

(6) Belirli bazı istatistik sayımların yapıldığı yıllar.

çilen Elektrik enerjisi sanayiinin yıllık zincirleme indeksleri ile istatistik önemi haiz yıllara göre zincirleme (1929, 1937, 1948, 1953) indekslerinin sonuçlarını karşılaştırmak ilgi çekmektedir. Bu karşılaştırmanın sonuçları Tablo II de verilmiştir.

T A B L O II

BİRBİRİNİ TAKİP EDEN YILLARA GÖRE ZİNCİRLEME GİRDİ İNDEKSLERİ İLE İSTATİSTİK ÖNEMİ HAİZ YILLARA GÖRE ZİNCİRLEME GİRDİ İNDEKSLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI
(1929 = 100)

	Yıllık Zincirleme İndeks		İstatistik Öneme haiz yıllara göre Zincirleme İndeks	
	Laspeyres	Paasche	Laspeyres	Paasche
1937	101,7	99,7	100,4	98,7
1948	123,6	120,9	120,5	121,3
1953	156,0	153,6	153,9	152,4

İki yolla elde edilen sonuçlar birbirine yaklaşık olmasına rağmen, aralarında iki önemli (ve kısmen birbiriyle ilgili) fark vardır. Evvelâ birincisi, 1948 yılına ait ikinci yolla elde edilen Paasche girdi indeksi Laspeyres girdi indeksinden büyüktür. İkinci olarak, ikinci yolla elde edilen Laspeyres ve Paasche indeksleri arasındaki farklar, birinci yolla elde edilen indeksler arasındaki farklardan daha küçüktür.

Laspeyres ve Paasche indeksleri, gerçek indeksin (alt ve üst) sınırlarını belirlemek amacıyla karşılaştırılmışlardır. Bir önceki örnekteki (Tablo II) sonuçlar, gerçek indeksi her zaman iki sınır arasında otomatikman yerleştirmenin mümkün olamayacağını göstermektedir. İlk bakışta (Şekil 1 in terimleriyle) Laspeyres indeksi A dan B ye olan kayma miktarını olduğundan fazla, Paasche indeksi de olduğundan az göstermektedir. Buradan da sınırların saptanmasının gereği anlaşılmaktadır. Halbuki, gerçek karşılaştırma A ve B noktaları arasında değil, I_A ve I_B farksızlık eğrileri arasında yapılmalıdır. Farksızlık eğrileri herhangi bir yarıçap vektör doğrultusunda sabit orantılı bağlılık göstermezler. Bundan dolayı bir

farksızlık eğrisini diğerine yaklaştırmak için gereken toplam girdideki nisbî değişme sabit olmayıp karşılaştırılan noktalara tabidir. Bu da tek bir yarıçap vektör olduğu hallerin dışında, genellikle değişmeyi ölçebilecek bir usul olmadığı anlamına gelir. Şekil I in terimleriyle, Laspeyres indeksi V_B doğrultusunda I_A dan I_B ye girdilerdeki gerekli artışı olduğundan fazla ve Paasche indeksi V_A doğrultusunda gerekli artışı olduğundan az gösterir. İki farksızlık eğrileri üzerindeki gerekli artış her zaman aynı olmayacağından gerçek indekse sınırlar koymak çok kez olanaksızdır. (7).

Bu sonuç, bir toplam indeks yapmaya karşı oluş gibi düşünülmemelidir. Gerçek indeks hiçbir zaman bulunamadığından, eldeki indekslerin değişim aralığı o kadar dar olabilir ki bunlardan birini kullanmak büyük hatalar doğurmaz. Makalemizin kalan kısmı bu değişim aralığının incelenmesine ayrılmıştır.

Hangi koşullar altında Paasche ölçüsü Laspeyres ölçüsünden büyüktür. Yani, Şekil 1'e göre ne zaman $aB/aO < Ab/AO$ dur (8). Bu koşullar çok yalın bir niteliğe bürünmüşlerdir. I_B nin B noktasındaki eğimi I_A nın A daki eğiminden küçük ise eşitsizlik gerçekleşecektir (yani, nisbî miktar, nisbî fiyatla aynı doğrultuda hareket edecektir). Daha genel bir deyişle müşahede edilen iki nokta V_A ve V_B yarıçap vektörleri üzerindedirler. Büyük yarıçap vektör (yatay eksene göre büyük açılı vektör) üzerinde müşahede edilen nokta, küçük eğimli fiyat doğrusu üzerinde olduğunda $aB/aO < Ab/AO$ eşitsizliği gerçekleşecektir.

İspat : İki fiyat doğrusunun eğimlerinin eşit olduğunu varsayalım. Bu durumda $aB/aO = Ab/AO$ olur. (OBb üçgen ve aA, bB ye paralel). B noktasından geçen doğrunun eğimi A dan geçen doğrunun eğiminden büyük ise (Şekil 1 de olduğu gibi) $aB/aO > Ab/AO$ olacaktır. Çünkü, Ab küçüldükçe aB, aO ve AO aynı kalır. B nok-

-
- (7) Bu indekslerin her biri, iki basamaklı bir kombinezon olarak düşünülmektedir. İlk safha, fiyat doğrusu (bir farksızlık eğrisini temsilen) üzerinde, ikincisi bir yarıçap vektörü üzerindeki harekettir. Safhaların sırası değiştirildiğinde, yani evvelâ yarıçap vektör sonra fiyat doğrusu üzerinde olduğunda, indekslerin nümerik değerleri etkilenmeyecektir. Öte yandan, Laspeyres ölçüsü ile V_A üzerindeki değişme miktarını ifade eden (Ab') arasında herhangi belirli bir ilişki yoktur;
- (8) aB/aO nun Laspeyres ölçüsü, Ab/AO nun Paasche ölçüsü olduğunun hatırlayınız.

herhangi bir yarıçap vektörü boyunca sabit oranlara sahiptir. Verilen herhangi bir yarıçap vektör boyunca, farksızlık eğrilerinin eğimleri aynı olduğundan, belirli bir noktanın sol tarafına düşen herhangi bir noktadaki eğim daha büyük olacak ve dolayısıyla Laspeyres ölçüsü her zaman Paasche ölçüsünden büyük olacaktır. Genel olarak Laspeyres ölçüsünün Paasche ölçüsünden büyük olduğu bir müşahade de gerçek indeksin sınırlarını koymak her zaman mümkün olmamakla birlikte, homojenlik halinde herhangi bir muğlaklık yoktur ve böyle durumlarda sınırlama kuralı hep geçerlidir.

Elektrik enerjisi sanayiinde, üretim fonksiyonu homojen bir tip olarak görülmemekte ve bu durumda Laspeyres indeksinin Paasche'den büyük olmasına rağmen sınırlama her zaman doğru olmamaktadır (9). Karşılaştırılacak noktaların farksızlık eğrileri arasındaki uzaklığa ve sistematik hata miktarına bağımlı olarak gerçek indeksin sınırlarını koymak bazen mümkün değildir. Yirmialtı tane yıllık Laspeyres girdi indeksi, ilgili Paasche indeksleri ile karşılaştırıldığında onüçünde Laspeyres'in Paasche'den büyük, altı halde eşit ve yedisinde Laspeyres'in Paasche'den küçük olduğu ortaya çıkmıştır. Bu durumda, devrenin tamamı için Laspeyres ölçüsünün Paasche'den büyük olmasına rağmen, elde edilen sonuçlara ne derece güvenilebileceği sorunu belirmektedir. İlk olarak, Laspeyres'in Paasche'den küçük kaldığı yedi halde aralarındaki farkın çok küçük olduğu gözden kaçmamalıdır. Bu husus sonuçların uygunluğunu destekleyici bir özellik olmasına rağmen sonuçlara tamamen güvenmeye yeterli bir delil sayılmaz.

Bu sorun ile ilgili daha geniş bilgi Samuelson'un tercih analizlerinde bulunabilir (10).

Şekil 3 de, her nokta bir yılı göstermek üzere, emek ve kapital miktarları bir serpmeye diyagram halinde gösterilmiştir (11). Her nok-

(9) Bkz.: Şekil 2.

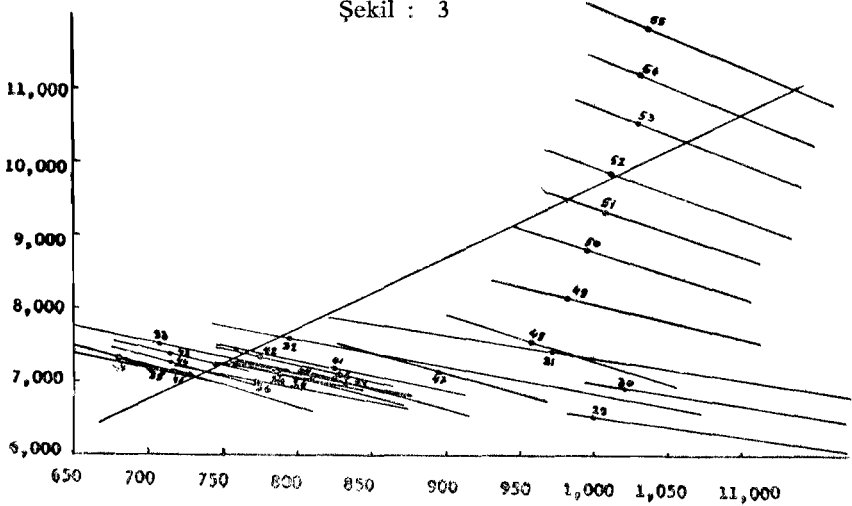
Bkz.: BARZEL, Yoram; s. 49-57.

(10) Bkz.: SAMUELSON, Paul A.; *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard Üniversitesi Yayını, 1948. İndeks sayısı problemi Bölüm VI da incelenmiştir.

(11) Yakıt, burada ele alınmamıştır. Çünkü yakıtın analize konması - yakıtın diğer faktörler yanında nisbi öneminin az olması nedeniyle sonuçlara etkisi az bir şey olurken, analizi büyük ölçüde karışık bir şekle sokacaktı.

tadan ilgili yılın fiyat doğruları çizilmiştir (aynı zamanda yön vermek için bir yarıçap vektör). Şimdi 1934 ve 1935 yıllarını karşılaştıralım (şeklin sol alt kısmı). 1935 yılı miktarları 1934 yılı yığımından elde edilebilir. 1935 yılı miktarları, 1934 yılı miktarlarından geçen fiyat doğrusunun altındadır. Bunun için 1934 miktarları 1935'e nazaran daha yukarıdaki farksızlık eğrisi üzerindedir. 1935 yılı farksızlık eğrisi, 1934 yılı farksızlık eğrisinin altında ve kendi yılına ait fiyat doğrusunun üstündedir (değme noktası hariç) ki, bu da 1934 yılı noktası ile 1935 yılı noktası arasındaki alanda eğrinin yatıklığını gösterir. Bunun gibi, 1932 yılı farksızlık eğrisi (1931 ve 1932 yılı arası) ve 1942 yılı farksızlık eğrisi (1941 ve 1942 arası) da aynı durumdadır. Bu hususlar (diğer yıl çiftleri için de olduğu gibi) bütün farksızlık eğrilerinin iyi düzenlenmesini ve gözlenen bölgelerde yatıklığın belirlenmesi gereğini gösterir. Böyle durumlarda, gerçek indeksin sınırlar arasına alınması uygulanabilir. Ters durumlarda gerçek indeks hesaplanana bir hayli yakın olduğundan hatanın pratik yönde önemi yoktur.

Şekil : 3



Tablo II'de belirtilenler arasında bir husus daha tartışılmalıdır. Yıllık zincirleme indeksler ile istatistik önemi haiz yıllara göre zincirleme indekslerin karşılaştırılmasında, istatistik önemi haiz yıllara göre zincirlemede Laspeyres ve Paasche indeksleri farkının yıllık zincirlemeye göre Laspeyres ve Paasche indeksleri far-

kından daha küçük olduğu belirtilmişti. Bu husus, indekslerin tamamen ters işlemesi demek değildir. Başlangıçta da belirtildiği gibi, zincirlemedeki sıklık daha sıhhatli bir sonuç verecektir. Buna rağmen bu ifade bazı koşullara bağlanmalıdır. 1, 2, 3, yılları için fiyat oranlarının P_1 , P_2 ve P_3 ($P_1 \neq P_2$) olsun. $P_1 = P_3$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, tartıların her yıl değiştirilmesi ve zincirleme indeksin hesaplanması ile aynı sistematik hata oluşacaktır. Yalnız P_1 (veya P_3) tartı olarak kullanılırsa 1 ile 3 yıllarının karşılaştırılmasında bir hata olmayacaktır. Bu örnek, nisbî fiyatlardaki «atlama noktalarını» (P_2 gibi) bertaraf edecek tarzda daha seyrek olarak yapılan bir zincirlemeye oranla yıllık zincirlemede daha büyük sistematik hata oluştuğunu gösterir.

T A B L O III

1955 YILI YILLIK ZİNCİRLEME GİRDİ İNDEKSLERİ (1929 = 100) İLE NİSBİ FİYATLARDAKİ ATLAMALARI ASGARIYE İNDİRMEK İÇİN YAPILAN ZİNCİRLEME İNDEKSLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

	Laspeyres	Paasche	Laspeyres Paasche
Yıllık Zincirleme İndeksleri	169,6	165,7	1,024
N.F.A.A. için Yapılan Zincirleme İndeksler	167,4	166,4	1,006

Böyle bir indeks hesaplanmış ve sonuçlar tablo III'de yıllık zincirleme ile karşılaştırılmıştır ⁽¹²⁾. Yıllık zincirleme indekslerde Laspeyres ve Paasche ölçüleri zaten birbirine yakın durumdadır. Mutlak bir gelişim (ilerleme, daha iyi sonuç alma) olanağı daralmıştır. Öte yandan, nisbî fiyatlardaki atlamaları asgariye indirmek için yapılan zincirlemedeki nisbî gelişim (nisbî ilerleme) çok önem-

(12) Emek sermaye oranının zamana göre aldığı değerler grafik üzerinde işaretlenmiş ve 1929 ile 1955 yıllarını birleştiren eğri çizilmiştir. İndeksin hesaplanmasında, eğri üzerinde veya eğriye yakın olan noktalar alınmıştır. Fiyat dalgalanmalarını asgariye indirecek hiçbir formel genyöntem kullanılmamıştır.

li ve anlamlıdır. Bu genyöntemdeki ana engel (başlıca dezavantaj) karşılaştırmaların birbirinden oldukça uzak olan yıllar arasında yapılabilmesidir. Üretim fonksiyonunun sabit olmadığı hallerde, karşılaştırmalar hiçbir anlam taşımayacaktır. Yeteri kadar kısa sayılabilen zaman biriminin seçimi, üzerinde çalışılan probleme bağlıdır. Bu yazıdaki tartışmaya kaynak olan incelemede esas problem değişimlerdir. Karşılaştırılacak devreler arasını uzun tutmak, bilhassa mutlak para miktarı çok düşük olduğundan, pek uygun düşmemiştir. Paasche ve Laspeyres indeksleri arasındaki farkın, yıllık zincirleme indekslerine nazaran istatistik önemi haiz yıllara göre elde edilen zincirleme indekslerinde daha düşük olması, konjonktür dalgalanmalarının tepe noktaları arasında nisbî fiyatların istikrarını aksettirmektedir, bu da Kendrick'sin karşılaştırılacak noktaları seçişindeki isabeti (sıhhati) ifade etmektedir ⁽¹³⁾.

Yazının başlangıcında da belirtildiği gibi verimlilik araştırmasında kullanılmış olan indeks Laspeyres indeksiydi ve yıllık zincirleme olarak alınmıştı. Paasche indeksi yerine Laspeyres indeksinin seçimi serbestçe yapılabilir. Bergson, Laspeyres indeksi V_B boyunca ölçüldüğünden dolayı onun ikinci devre fiyatlarını daha iyi temsil edeceği üzerinde fikir yürütür ⁽¹⁴⁾. Bu doğru bir hükümdür, fakat problem için asli bir şey değildir. Karşılaştırma iki devrenin miktarları arasında yapılmakta ve indeks sayısı probleminin ortaya çıkış nedeni, değişik miktarların değişik oranlarda değişmesidir. Bir miktarlar kümesinin diğerinden daha fazla temsili olmasının ve netice itibariyle de Laspeyres'in Paasche kadar uygun olması (veya olmaması) gibi bir meselenin anlamı yoktur.

(13) Yukarıdaki tartışmada belirtilmek istenen şey, aylık (veya üç aylık) bir toplam indeks yapılırken ağırlıkları her ay değiştirmek için yeterli bilgi bulunsa bile, ağırlıkları devre başlarında değiştirmenin daha uygun olacağıdır. Böylece, mevsim dalgalanmalarından dolayı ağırlıklarda meydana gelebilecek sistematik hatalar önlenmiş olacaktır.

(14) BERGSON, Abraham; a.g.e., s. 32-34.