KISA DEVRE MASRAF EĞRİLERİNİN MATEMATİKSEL ANALİZİ

Ass. Ali Fuat YÜZER
Ass. İmdat KARA

Kısa devrede masrafların üretimin hacmine bağlı olarak nasıl değiştiği araştırılırken, yapılacak bazı varsayımlar analizi kolaylaştıracaktır. Sözü edilen varsayımlar şöylece sıralanabilir :

i. Kısa devrede faktör fiyatları ve teknoloji düzeyi değişmez,

ii. Değişen faktörlerin çok küçük ünitelere ayrılması olanaksızdır,

iii. Üretim faktörleri homojendir,

iv. Üretim faktörlerinin bir kısmının miktarı değişmez,

v. Değişen üretim faktörlerinin etken bir biçimde kullanılabilmesi için adı geçen faktörlere, üretim fonksiyonunda belirlenen teknik katsayılar ölçüsünde ihtiyaç vardır.

Çalışmamızda, yukarıdaki varsayımlar göz önünde bulundurularak önce tanımlar verilmiş ve bu tanımların yardımıyla ilgili fonksiyonlar belirlenmiştir; daha sonra bu fonksiyonlar matematik yönden analiz edilmiştir.

I. TANIMLAR VE İLGİLİ FONKSİYONLARIN BELİRLENMESİ

A. Sabit masraflar

Üretimin hacmine bağlı olmaksızın yapılan masraflara sabit masraflar denir. (a) sabit bir değer olmak üzere sabit masraflar;

$$S.\ M. = a \qquad (1)$$

olarak gösterilebilir.

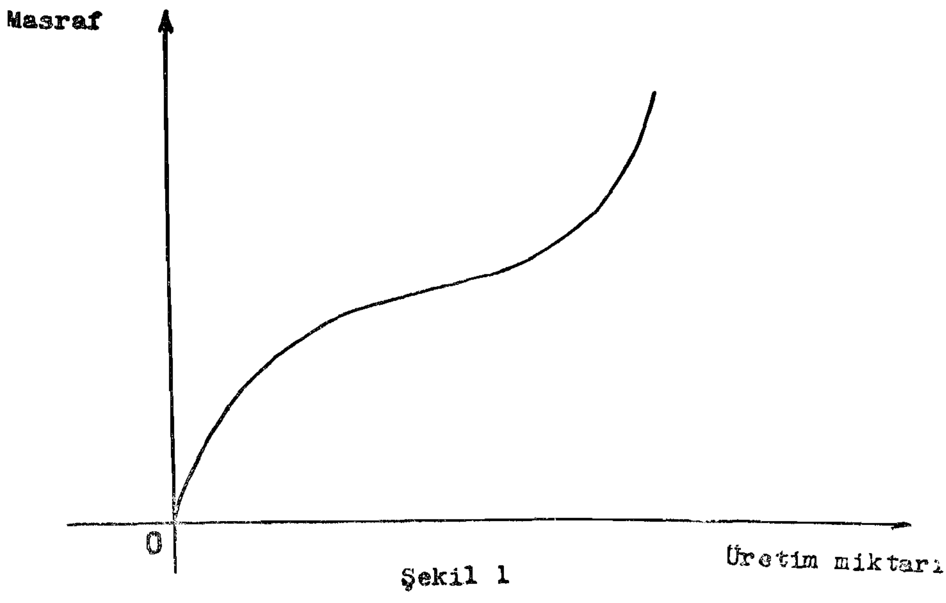
B. Değişen masraflar

İşletme ile ilgili masrafların büyük bir kısmı üretimin hacmine bağlı olarak değişir. Üretimin hacmiyle değer alan bu tür masraflara değişen masraflar denir. Hammadde, enerji ve işçilik için yapılan masraflar buna örnek olarak gösterilebilir. Kısa devrede kapasite değişmeyeceğinden, üretimin arttırılması ancak değişen üretim faktörlerine yapılan harcamaların arttırılmasıyla mümkün olacaktır. Açıkça görüleceği gibi değişen masraflar, üretim miktarının bir fonksiyonudur. Değişen masrafları y ve üretim miktarını da x ile gösterirsek,

$$y = f(x) \qquad (2)$$

fonksiyonu, üretim miktarıyla değişen masraflar arasındaki ilişkiyi verir.

Değişen masraflar eğrisi, üretimin başladığı noktadan belirli bir üretim düzeyine kadar her birim için hızlı bir artış gösterir. Belirli bir üretim düzeyine gelindiğinde, «yığın üretiminin iktisadiliği» prensibine göre, fonksiyonun artış hızı yavaşlar. Daha sonra «azalan verimler» kanunu gereğince fonksiyon hızla artar. Anlaşılacağı gibi ve şekil 1'de görüldüğü üzere değişen masraflar eğrisi devamlı artan minimum veya maksimum yapmayan bir fonksiyondur.



Şekil 1

C. Toplam masraflar

Belli miktarda mal ve hizmet üretmek için, üretim faktörlerine yapılan ödemelerin tümüne toplam masraf adı verilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi, toplam masraf fonksiyonu (1) ve (2) numaralı ifadelerle belirlenen sabit ve değişen masraflar toplamına eşit olacaktır. Buna göre,

$$F(x) = f(x) + a \tag{3}$$

yazılabilir.

D. Ortalama ve marjinal masraf

Yukarıda tanımları verilen ve bu tanımların ışığında fonksiyonları belirlenen değişen ve toplam masrafları, ortalama ve marjinal birim yönünden inceliyelim.

1. Ortalama değişen masraflar

Değişen masrafların üretim miktarına bölümü, birim başına düşen değişen masrafları, yani ortalama değişen masrafları verir. Üretim miktarı x'e bağlı olarak, ortalama değişen masraf fonksiyonu,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \tag{4}$$

olarak ifade edilebilir.

2. Ortalama toplam masraflar

Toplam masrafların üretim miktarına bölümü, birim başına düşen toplam masrafları, yani ortalama toplam masrafları verir. Üretim miktarı x'e bağlı olarak ortalama toplam masraf fonksiyonu,

$$H(x) = \frac{f(x) + a}{x} \tag{5}$$

olur.

3. Marjinal masraf

Üretimin bir birim arttırılması için yapılması gerekli olan masrafa marjinal masraf denir. Üretim miktarı x ve buna bağlı olarak değer alan masraf fonksiyonu da y olsun. Üretim miktarı (Δ x) kadar arttırılıdığında, (Δ y) kadar bir masraf artışı oluşacaktır. Bu durumda bir birimin oluşturduğu masraf artışı, yani x üretim miktarından (x + 1) üretim miktarına geçişin meydana getirdiği artış (Δ y)/(Δ x) olur. (Δ x) sıfıra yaklaşırken bu oranın alacağı değer ise, fonksiyonun artışa başladığı noktadaki türevini verir. Demek oluyor ki marjinal masraf, masraf fonksiyonunun verilen noktadaki türevine eşittir. *

Üretim miktarı x'e bağıl olarak marjinal masraf fonksiyonunu h (x) ile gösterelim. Yapılan açıklama gereğince,

$$h(x) = \frac{d}{dx}[f(x) + a] = \frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$$

olur.

II. FONKSİYONLARIN ANALİZİ

A. Uç noktaların varlığı

Fonksiyonları belirlenen masraf eğrilerinin uç noktalarını araştıralım; ortalama toplam masraf fonksiyonu,

$$H(x) = \frac{f(x) + a}{x}$$

idi. Buradan H' (x) 'i bularak sıfıra eşitleyelim.

$$H'(x) = \frac{x \,.\, f'(x) - f(x) - a}{x^2}$$

$$H'(x) = 0 \Rightarrow x \,.\, f'(x) = f(x) + a$$

olur. Bu denklemin kökü ise, ortalama değişen masraf fonksiyonunun apsisini verecektir. Diğer taraftan,

(*) Matematik yönden marjinal masrafın tanımında, toplam masraf ve değişen masraf ayırımına gitmiyoruz; bu iki fonksiyon arasında sadece sabit bir fark bulunduğundan ve sabitin türevi de sıfır olduğundan, bu iki fonksiyonun türevleri biribirine eşittir.

$$\lim_{x \to 0} H(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + a}{x} \to + \infty$$

olduğundan, (x) üretim miktarı sıfırdan itibaren arttırıldığında, ortalama toplam masraf fonksiyonu $+\infty$'dan itibaren azalarak gelecektir. (x) üretim miktarı sonsuza yaklaştığında ise,

$$\lim_{x \to \infty} H(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) + a}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1}$$

olur. H (x) bir uç değere eriştiğinden, f (x) fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan, [$f'(x) > 0$ dır, ancak $\lim f'(x) \to +\infty$ olabilir] x, $0 < x < +\infty$ aralığında değerler alırken, H (x) $+\infty$'dan azalarak gelecek ve belirli bir noktadan sonra artmaya başlayarak tekrar $+\infty$'a gidecektir. Bu durum, ortalama toplam masraf fonksiyonunun bir minumumu olduğunu ortaya koyar.

Şimdi de aynı şekilde ortalama değişen masraflar fonksiyonunu inceliyelim.

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

ve

$$g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}$$

olur.

$$g'(x) = 0$$

için,

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü, ortalama değişen masraflar fonksiyonunu bir uç değere eriştiren üretim miktarını verecektir. Öte yandan,

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) \to \infty$$

olması gerektiği önceden belirtilmişti. Bu durumda,

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{1} \to + \infty$$

olmaktadır. Aynı şekilde,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} f'(x)$$

olur. Madem ki g (x)'in bir uç değeri vardır ve f (x) artan bir fonksiyon olduğundan $f'(x) > 0$ dır, o halde,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} f'(x) \to +\infty$$

olacaktır. Bu durumda x, $(0, \infty)$ aralığında değerler alırken, g (x), $+\infty$'dan azalarak gelmekte ve bir noktadan sonra tekrar artmaya başlayarak $+\infty$'a gitmektedir. Görüldüğü gibi, ortalama değişen masraf fonksiyonunun bir minumumu vardır.

B. Ortalama toplam masraf ve marjinal masraf eğrileri arasındaki ilişki

(5) numaralı eşitlik ile belirlenen ortalama toplam masraf fonksiyonunun birinci türevini alalım;

$$H'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - f(x) - a}{x^2} \qquad (6)$$

H (x)'in minimum olduğu üretim miktarı (x_1) olsun. (x_1) üretim miktarında ortalama toplam masraf eğrisinin minimum değere ulaşabilmesi için, $H'(x_1) = 0$ olmalıdır. Yani;

$$x_1 \cdot f'(x_1) - f(x_1) - a = 0 \qquad (7)$$

(7) numaralı eşitlik $f'(x_1)$ için çözülürse;

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) + a}{x_1} \qquad (8)$$

elde edilir. (8) numaralı eşitlikte $f'(x_1) = h(x_1)$ alınır ve

$$\frac{f(x_1) + a}{x_1} = H(x_1)$$

değerleri yerlerine konursa,

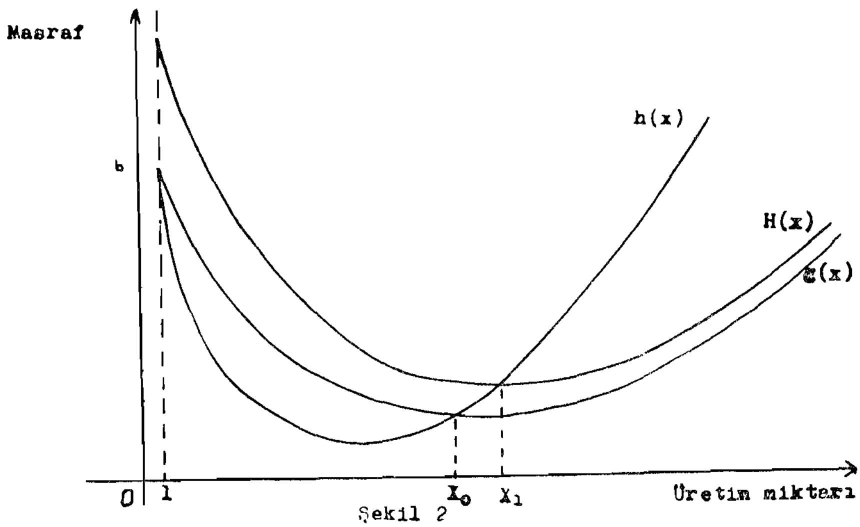
$$h(x_1) = H(x_1) \tag{9}$$

elde edilir.

(9) numaralı eşitlik, ortalama toplam masrafların minumum olduğu (x_1) üretim düzeyinde, marjinal masraf ile ortalama toplam masrafların biribirine eşit olduğunu göstermektedir. Yani, marjinal masraf eğrisi, ortalama toplam masraf eğrisinin minimum olduğu noktadan geçmektedir.

C. Ortalama değişen masraf eğrisiyle, marjinal masraf eğrisi arasındaki ilişki

Üretim sürecinin başladığını ve ilk birimin üretildiğini düşünelim. Sözü edilen ilk birim için yapılan masraf b kadar olsun. Bu durumda, birinci birim için ortalama değişen masraf da b kadar olacaktır. Öte yandan, bu ilk birimin üretimi için değişen masraflardaki artış b kadar olacağından (ilk masraf), ilk birim için marjinal masraf da b kadar olur. Anlaşılacağı gibi, ortalama değişen masraf fonksiyonu ile marjinal masraf fonksiyonu birinci kez (1, b) noktasında kesişirler.



Şekil 2

Şimdi de, (4) numaralı eşitlikle belirlenen ortalama değişen masraflar fonksiyonunu yazarak birinci türevini alalım:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

ve

$$g'(x) = \frac{x \, . \, f'(x) - f(x)}{x^2} \qquad (10)$$

bulunur.

g (x)'in minimum olduğu üretim miktarı (x_o) olsun. Apsisi (x_o) olan noktada $g'(x_o)$ sıfır olacağından;

$$x_o \, . \, f'(x_o) - f(x_0) = 0 \qquad (11)$$

elde edilir. $f'(x_o)$ için yukarıdaki eşitliği çözersek,

$$f'(x_o) = \frac{f(x_o)}{x_o} \qquad (12)$$

bulunur.

$$f'(x_o) = h(x_o)$$

ve

$$g(x_o) = \frac{f(x_o)}{x_o}$$

yazılırsa,

$$h(x_o) = g(x_o) \qquad (13)$$

elde edilir. Son yazılan eşitlik, ortalama değişen masraflar fonksiyonunu minimum kılan (x_o) üretim miktarında marjinal masrafın ortalama değişen masraflara eşit olduğunu göstermektedir. Başka bir deyişle, marjinal masraf eğrisi, ortalama değişen masraflar eğrisini minimum olduğu noktada kesmektedir.

Şimdi de (10) numaralı eşitliği başka bir yönüyle inceliyelim. (x) üretim miktarı pozitif bir değer olduğundan, g' (x) ile x. f' (x)'in işaretleri aynıdır. $g'(x) > 0$ olduğu aralıkta, ortalama değişen masraflar fonksiyonu olan g (x) artan bir seyir takibedecektir. Diğer taraftan, $g'(x) > 0$ iken, $x . f'(x) - f(x) > 0$ olacağından,

$$f(x) < x \, . \, f'(x) \qquad (14)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı (x) ile bölünürse,

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x} \qquad (15)$$

elde edilir. $f'(x)$ ve $\frac{f(x)}{x}$ 'in yerine eşitlerini yazalım :

$$h(x) > g(x) \qquad (16)$$

(16) numaralı eşitsizlik, ortalama değişen masraflar fonksiyonu $g(x)$'in artan olduğu aralıkta $[g'(x) > 0]$ marjinal masrafın ortalama masraftan büyük olduğunu gösterir.

$g'(x) < 0$ olduğu aralıkta ise, (16) numaralı eşitsizlik tersine olacağından, ortalama değişen masraflar fonksiyonunun azalan olduğu aralıkta marjinal masraf, ortalama değişen masraftan küçük olduğu sonucu ortaya çıkacaktır.

III. ÖRNEK BİR MASRAF FONKSİYONU

Masraf fonksiyonu ile ilgili olarak yapılan açıklamalara, iktisatçıların da benimsedikleri üçüncü dereceden bir fonksiyon uymaktadır; şimdi, genel bir üçüncü dereceden fonksiyon üzerinde analizlerle oluşan özelliklerin sağlandığını gösterelim. d yi, sabit masraflar olarak kabul edersek, toplam masraf fonksiyonu;

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (17)$$

olacaktır. $F(x)$ hep artan bir fonksiyon olacağından x'in bütün değerleri için $F'(x) > 0$ olacaktır. Öte yandan,

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

elde edilir. $F'(x) > 0$ olması için;

i. $F'(x)$'in kökü olmamalıdır; yani,

$$\Delta = b^2 - 3ac < 0$$

ve

ii. $a > 0$

olmalıdır.

(17) numaralı eşitliğin sabitleri arasındaki bağlantıları bul-

duktan sonra, ortalama ve marjinal birim yönünden fonksiyonu inceliyelim. Ortalama toplam masraf fonksiyonu,

$$H(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x},$$

veya

$$H(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$$

olur. Şimdi bu fonksiyonun uç noktalarını (minimum-maksimum) araştıralım.

$$H'(x) = 2ax + b - \frac{d}{x^2}$$

ve

$$H''(x) = 2a + \frac{2d}{x^3}$$

olur. Hemen işaret edelim ki, ortalama masraf fonksiyonunun uç noktası bir minimum noktasıdır. Çünkü, $a > 0$, $d > 0$ (sabit masraflar) ve $x > 0$ (üretim miktarı) olduğundan, x'in bütün değerleri için, $H''(x) > 0$ dır.

Diğer taraftan H (x)'i minimum değere indirgeyen üretim miktarı (x_1) olsun. (x_1) üretim miktarında $H'(x_1) = 0$ olacağından,

$$2ax_1 + b - \frac{d}{x^2} = 0 \tag{18}$$

olur. Öte yandan (x_1) üretim miktarındaki marjinal masraf,

$$h(x_1) = \frac{d}{dx} F(x) \Big]_{x=x_1}$$

olacağından,

$$h(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c \tag{19}$$

yazılabilir.

(18) numaralı eşitliği

$$2ax_1^3 + bx_1^2 - d = 0 \tag{20}$$

olarak yazalım.

(x_1) üretim miktarında ortalama toplam masraflar,

$$H(x_1) = \frac{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d}{x_1}$$

dir. (20) numaralı eşitlikten

$$d = 2ax_1^3 + bx_1^2$$

bulunur; (x_1) üretim miktarındaki ortalama toplam masrafları veren denklemde bunu yerine koyarsak,

$$H(x_1) = \frac{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + 2ax_1^3 + bx_1^2}{x_1}$$

ve

$$H(x_1) = \frac{3ax_1^3 + 2bx_1^2 + cx_1}{x_1}$$

yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$H(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$$

elde edilir. (19) numaralı eşitlikten,

$$h(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$$

yazılır. Görüldüğü gibi, ortalama toplam masrafların minimum olduğu (x_1) üretim miktarında,

$$H(x_1) = h(x_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$$

olmaktadır.

Şimdi de aynı şekilde ortalama değişen masraflar fonksiyonunu inceliyelim.

Toplam masraf fonksiyonu,

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

olduğunda, değişen masraflar fonksiyonu

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

şeklindedir. Ortalama değişen masraflar fonksiyonu ise,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

eşitliğine dayanılarak

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

şeklinde yazılabilir. Açıklıkla görülebileceği gibi, $a > 0$ olduğundan, $g(x)$ fonksiyonunun bir minumumu vardır.

$g(x)$'i minimuma indirgeyen üretim miktarı (x_o) olsun. Bu üretim miktarında $g'(x_o) = 0$ olacağından,

$$g'(x) = 2ax + b$$

ve

$$g'(x_o) = 2ax_o + b = 0 \qquad (21)$$

yazılır. (21) numaralı denklemi sağlayan üretim miktarı,

$$x_o = -\frac{b}{2a}$$

olacaktır.

(x_o) üretim miktarında marjinal masraf,

$$h(x_o) = 3ax_o^2 + 2bx_o + c$$

veya

$$h(x_o) = 3a\frac{b^2}{4a^2} - 2b\frac{b}{2a} + c$$

dir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$h(x_o) = \frac{3b^2 - 4b^2 + 4ac}{4a}$$

ya da

$$h(x_o) = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad (22)$$

elde edilir.

Yine, (x_o) üretim miktarında ortalama değişen masraflar fonksiyonu

$$g(x_o) = \frac{ax_o^3 + bx_o^2 + cx_o}{x_o}$$

veya

$$g(x_o) = ax_o^2 + bx_o + c$$

şeklindedir. (x_o) yerine değerini koyarsak,

$$g(x_o) = a\frac{b^2}{4a^2} - b\frac{b}{2a} + c$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$g(x_o) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$g(x_o) = \frac{4ac - b^2}{4a} \qquad (23)$$

elde edilir.

(22) ve (23) numaralı eşitlikler, ortalama değişen masraflar eğrisinin minimum olduğu (x_o) üretim miktarında marjinal masraf ile ortalama değişen masrafların biribirine eşit olduğunu göstermektedir. Başka bir deyişle marjinal masraf eğrisi, ortalama değişen masraflar eğrisinin minimum olduğu noktadan geçmektedir.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

Divitçioğlu Sencer, Mikro İktisat, İstanbul, 1971.

Henderson and Quandt, Microeconomic Theory, McGraw-Hill, 1958.

Norman N. Barish, Economic Analysis for Engineering and Managerial Decision-Making, McGraw-Hill, 1962.

RGD Allen, Mathematical Analysis for Economists, Macmillan, 1967.

Savaş Vural, İktisadi Analiz, İstanbul, 1970.

Uzgören Nakibe, Genel Matematik ve İktisatta Uygulanması, İstanbul, 1971.

William J. Baumol, Economic Theory and Operations Analysis, Prentice-Hall, 1962