G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi ISSN 1303-9709 *G.U. Journal of Science*
17(4):115-119 (2004) *17(4):115-119 (2004)*

ON THE DERIVED SERIES OF BAER GROUPS

Selami ERCAN
Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, 06500, Teknikokullar, Ankara, TÜRKİYE, e-mail: ercans@gazi.edu.tr

ABSTRACT

In this article it is proved that the derived series of a Baer $\wp$-group terminates after a finite number of steps.

Key Words: Baer group, Soluble group, Normal closure length.

BAER GRUBUNUN DERIVED (TÜRETİLMİŞ) SERİSİ

ÖZET

Bu makalede bir Baer $\wp$-grubun derived (türetilmiş) serisinin uzunluğunun sonlu adımda durduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Baer grup, Çözülebilir grup, Normal kapanış uzunluğu.

1. GİRİŞ

$\wp$ aşağıdaki özelliği sağlayan G grupların bir grup sınıfı olsun: G nin her $H \le K \le G$,altgrupları için H ve K ya bağlı öyle bir doğal n sayısı vardır ki $H^{K,n} = H^{K,n+1} = \dots$ dır. Kullanılan notasyon ve tanımlar (1) de bulunabilir. Burada sıklıkla kulladığımız tanımları verelim. G bir grup olmak üzere X and Y, G nin boştan farklı alt kümleri olsun. $X^Y = \langle x^y : x \in X, y \in Y \rangle$ altgrubuna X in Y içindeki normal kapanışı denir. Her $x, y \in G$ için $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x, ny] = [[x, (n-1)y], y]$ olarak tanımlanır. H, G nin bir altgrubu olsun. $[G, H] = \langle [x, y] : x \in G, y \in H \rangle$ altgrubuna G ile H nın komütatör altgrubu denir. $n \ge 2$ doğal sayı olsun. O zaman $[G, nH] = [[G, (n-1)H], H] = [G, \underbrace{H, \dots, H}_{n}]$ şeklinde tanımlanır. G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun. $H^{G,0} = G$, $H^{G,1} = H^G = H[G, H]$ ve $i \ge 2$, $H^{G,i} = H^{H^{G,i-1}}$ olarak tanımlanan seriye H nın G içindeki normal kapanış serisi denir. Eğer H, G'nin altnormal altgrubu gerek ve yeter şart öyle bir $n \ge 0$ doğal sayısı vardır ki $H^{G,n} = H$. $[G, nH] \le H$ yapan en küçük doğal sayıya H nın G içindeki indeksi denir. $H \lhd^n G$ gerek ve yeter şart H dan G ye $H = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \dots \lhd H_1 \lhd H_0 = G$ serisi vardır. G bir grup olmak üzere G nin devirli altgrupları altnormal

1.INTRODUCTION

Let $\wp$ denote the class of groups G with the following property: For every subgroups $H \le K \le G$, there exists a natural number n depending on H and K such that $H^{K,n} = H^{K,n+1} = \dots$. The notations and the definitions are standart and may be found in (1) but we state here those that are frequently used. Let X and Y be nonempty subsets of a group G. Then the subgroup $X^Y = \langle x^y : x \in X, y \in Y \rangle$ is called the normal closure of X in Y. Let be a H subgroup of G. $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[x, ny] = [[x, (n-1)y], y]$ for all $x, y \in G$, and $[G, H] = \langle [x, y] : x \in G, y \in H \rangle$ and $[G, nH] = [[G, (n-1)H], H] = [G, \underbrace{H, \dots, H}_{n}]$ for a natural number n. For a subgroup H of a group G, the normal closure series of H in G is defined by $H^{G,0} = G$ and $H^{G,1} = H^G = H[G, H]$; for all natural number $i \ge 2$, $H^{G,i} = H^{H^{G,i-1}}$. It is easy to prove that H is subnormal in G if and only if $H^{G,n} = H$ for some $n \ge 0$. So, H is subnormal in G if and only if $[G, nH] \le H$ for some $n \ge 0$, and the defect of H in G is defined as the smallest such n. We write $H \lhd^n G$ if and only if there exsits a chain $H = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \dots \lhd H_1 \lhd H_0 = G$ connecting H to G. A subnormal subgroup H of G is therefore one for ise G ye Baer grup denir. G bir Baer grup ve n bir pozitif bir tamsayı öyle ki G nin her H altgrubu için $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ olsun. O zaman G is nilpotent gruptur(2). Eğer G faktörleri abelyan olan sonlu seriye sahip ise G ye çözülebilir grup denir. Eğer G faktörleri abeliyan olan artan bir seriye sahip ise G ye hypoabelyan grup denir.

Her altgrubu altnormal olan grupların sınıfı N_0 ile gösterilsin. N_0-grupların sınıfı bir çok matematikçi tarafından incelenmiş ve önemli sonuçlar elde edilmiştir. Eğer G bir N_0-grup ise G çözülebilirdir(3). G bir grup olsun. $G^{(0)} = G$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $G = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$ şeklinde tanımlansın. $G^{(n)}$ ye G nin n yinci derived altgrubu ve $G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots$ serisine G nin komütatör serisi denir. Eğer G çözülebilir ise bir pozitif doğal sayı n için $G^{(n)} = 1$ dir. $\Re$ bir grup sınıfı olsun. Her $1 \neq g \in G$ için bir normal altgrup N_g vardır öyle ki $g \notin N_g$ ve G/N_g bir $\Re$-grup ise G ye residually $\Re$-grup denir.

Ω bir nilpotent olmayan grup içeren bir grup sınıfı olsun. (4) de Casolo, (5) deki Teorem B yi genelleştirmiştir.

Teorem 1.1. G bir N_0-grup olsun. O zaman G nin derived serisi sonlu adımda durur (4).

Lemma 1.1. G bir Ω-grup ve N_0-grup olsun. O zaman, bir pozitif tamsayı r, G nin öyle bir Ω-altgrubu K ve K nın öyle bir sonlu üreteçli altgrubu H vardır ki $H \leq U \leq K$ olan her U Ω-altgrubunun K içindeki indeksi ençok r dir (4).

Roseblade aşağıdaki sonucu elde etmiştir (6);

Sonuç 1.1. G bir grup olsun. Eğer G nin her altgrubunun altnormallik indeksi bir n doğal sayısı ile sınırlı ise G nilpotent ve nilpotentlik sınıfı $\mu(n)$.

Her N_0-grup bir $\wp$-grup. Eğer G bir N_0-grup ise G çözülebilirdir. Böylece G'nin derived serisi sonlu adımda durur. Bu makalede G bir $\wp$-grup fakat N_0-grup olmayan gruplar incelenecektir. Bu makalenin amacı $\wp$-grupların derived serisinin sonlu adımda durduğunu göstermek.

2. TEMEL SONUÇLAR

G bir χ-grup gerek ve yeter şart G çözülebilir olmayan bir altgruba sahiptir, burada χ çözülebilir olmayan gruplar sınıfı.

Lemma 2.1. G bir χ-grup ve Baer $\wp$-grup. Kabul edelim ki G nin herhangi bir altgrubu H ve n bir doğal sayısı olmak üzere $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ iken her

which $H \lhd^n G$ for some n. A group G is a Baer if every cyclic subgroup of G is subnormal in G. Let G be a Baer group and let n be a non-negative integer such that $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ for every $H \leq G$, then G is nilpotent (2). A group is called soluble if it has an abelian series of finite length. A group is an hypoabelian if it has an descending series with abelian factors.

We denote by N_0 the class of all groups in which every subgroup is subnormal. N_0-groups are considered by several authors and obtained remarkable results. If G is an N_0-group, then G is soluble (3). For any group G we denote by $G^{(n)}$ $(n \geq 1)$ the n[th] term of the derived series of G, where $G^{(0)} = G$ and $G^{(n)} = \left[G^{(n-1)}, G^{(n-1)} \right]$, $n \geq 1$. If G is soluble, then $G^{(n)} = 1$, for some n natural number. Let $\Re$ be a class of groups; a group G is said to be a residually $\Re$-group, if given $1 \neq g \in G$, there exists a normal subgroup N_g such that $g \notin N_g$ and G/N_g is a $\Re$-group.

Ω is a class of groups, such that it has some non-nilpotent group. In (4), Casolo generalized Theorem B of (5).

Theorem 1.1. The derived series of a N_0-group teminates after a finite number of steps (4).

Lemma 1.1. If G is a Ω-group and N_0-group, then there exists a positive integer r, and a Ω-subgroup K of G, containing a finitely generated subgroup H, such that every Ω-group of K which contains H has defect at most r in K (4).

In (6), Roseblade obtained the following corollary;

Corollary 1.1. If N_n denotes the class of all groups G with $H \lhd^n G$ for every subgroup H of G then G is nilpotent and its nilpotent class is $\mu(n)$.

Every N_0-group is a $\wp$-group. If G is a N_0-group, then G a soluble. Therefore the derive series of G terminates after a finite number of steps. In this paper we will examine a group which is a $\wp$-group but is not a N_0-group. The aim of this paper is to prove that the derived series of a $\wp$-group teminates after a finite number of steps.

2. MAIN RESULTS

G is a χ-group if only if G has a non-soluble subgroup, where χ is a class of groups with some non-soluble group.

Lemma 2.1. Let G be a χ-group and also be a Baer $\wp$-group. Suppose that for any subgroup H of G, if $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ then $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ for

$H \le L \le G$ için $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ olsun. O zaman öyle bir r pozitif tamsayı, G nin öyle bir χ-altgrubu K ve K nın öyle bir sonlu üreteçli altgrup F vardır ki $F \le U \le K$ olan her U χ-altgrubunun K içindeki normal kapanış uzunluğu en çok r dir.

İspat: G bir χ-grup ve G bir Baer $\wp$-grup olsun. Kabul edelim ki, G nin her hangi bir χ-altgrubu K, K nın her hangi bir sonlu üreteçli altgrubu F öyle ki $F \le U \le K$ olan U χ–altgrubunun K içindeki indeksi r den daha büyük olsun. İndüksiyonla K_i nin χ-altgruplarını ve G nin F_i sonlu üreteçli altgrupları öyle ki; her $i \in IN$ için

$$K_{i+1} \le K_i\,,\ K_{i+1} \ne K_i\,;\ F_i \le \bigcap_{i\in IN} K_i$$

ve doğal sayıların azalan bir serisi $\{n_i : i \in IN\}$ ni inşaa edelim.

$K_1 = G, F_1 = 1$ ve $n_1 = 1$. Kabul edelim ki $n_i > 1$ olsun. Ayrıca $F_1,\ldots,F_{i-1}$ sonlu üreteçli ve K_{i-1} altgrupları tanımlanmış olsun. Şimdi K_{i-1} bir χ-altgrup öyle ki $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle$ sonlu üreteçli altgrubunu içerir o zaman indüksüyon hipotezinden dolayı K_{i-1} nin öyle bir χ-altgrubu K_i vardır öyle ki, $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle$ sonlu üreteçli altgrubunu içeren K_{i-1} içindeki normal kapanış uzunluğu n_i den daha büyüktür. Böylece K_i nin öyle bir sonlu altkümesi S ve K_{i-1} nin öyle bir sonlu altkümesi T vardır öyleki $[T,(n_i-1)S] \not\subset [K_{i-1},\, n_i\, K_i]$. $F_i = \langle S \rangle \le K_i$ olsun. Yukarıdaki gözlemden $[T,(n_i-1)S] \not\subset [K_{i-1},\, n_i\, K_i]\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle \le K_i$ dir. Eğer $L \le K_i$ ise o zaman $\langle F_i, L\rangle$ nin K_{i-1} içindeki indeksi n_{i-1} daha büyüktür. $F_* = \langle F_i : i \in N\rangle$ oslun. m bir doğal sayı olmak üzere F_* ın, G içinde uzunluğu m olan bir normal kapanış serisine sahiptir. O zaman öyle bir $i \in IN$ vardır öyle ki $n_i > m$ ve F_* K_i nin altgrubudur. F_* ın K_n içindeki normal kapanış uzunluğu n_i daha büyüktür. Bu hipotezle çelişmektedir.

Lemma 2.2. K bir Baer grup ve H, K nın bir altgrubu olsun. Eğer $H \le Y \le K$ olan her Y altgrubunun K içindeki normal kapanış serisinin uzunluğu en çok n ise $K^{(\tau(n))} \le H^K$, buradaki $\tau(n) = \sum_{i=1}^{n}([\log_2 \mu(i)]+1)$ ve $\mu(i)$ Roseblade fonksiyonudur (6).

İspat: $K^{(\tau(n))} \le H^K$ olduğunu n üzerine indüksiyon yaparak gösterelim. Eğer $n = 1$ ise o zaman $H^{K,2} = H^K \triangleleft K$ ve K/H^K nın her altgrubunun normal kapanış uzunluğu 1 dir. Lemma 1 (2) den K/H^K nilpotenttir. Böylece K/H^K metabelyan gruptur. 13.4.2

$H \le L \le G$, where n is a natural number. Then, there exists a positive integer r, and a χ-subgroup K of G, containing a finitely generated subgroup F, such that every χ-subgroup of K which contains F has normal closure length at most r in K.

Proof: Let G be a χ-group. Let G be a Baer $\wp$-group and assume, by contradiction, that for any χ-subgroup K of G, any finitely generated subgroup F of K and any positive integer r, there exists a χ-subgroup of K, containing F, which normal closure length in K is greater than r. By inductive procedure we constract χ-subgroups K_i and finitely generated subgroups F_i of G such that:

$$K_{i+1} \le K_i\,,\ K_{i+1} \ne K_i\,;\ F_i \le \bigcap_{i\in IN} K_i \quad \text{for every } i \in IN$$

and a strictly ascending sequence $\{n_i : i \in IN\}$ of natural numbers.

We put $K_1 = G, F_1 = 1$ and $n_1 = 1$. Let $n_i > 1$ and assume we have already defined $F_1,\ldots,F_{i-1}$ and K_{i-1}. Now K_{i-1} is a χ-subgroup which contains the finitely generated subgroup $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle$, then, by our hypothesis, there exists a χ-subgroup K_i of K_{i-1}, containing $\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle$ of normal closure length greater than or equal to n_i in K_{i-1}. Hence there exists a finite subset S of K_i, and a finite subset T of K_{i-1} such that $[T,(n_i-1)S] \not\subset [K_{i-1},\, n_i\, K_i]$. We put $F_i = \langle S \rangle \le K_i$, and observe that $[T,(n_i-1)S] \not\subset [K_{i-1},\, n_i\, K_i]\langle F_1,\ldots,F_{i-1}\rangle \le K_i$ and that if $L \le K_i$ then $\langle F_i, L\rangle$ has normal closure length greater than n_{i-1} in K_{i-1}. We put now $F_* = \langle F_i : i \in N\rangle$, F_* is has normal closure length m in G, where m is a natural number. Then there exists $i \in IN$ such that $n_i > m$ and F_* is subgroup of K_i. F_* has normal closure length greater than n_i in K_n; it follows that this is a contradiction by our hypothesis.

Lemma 2.2. Let H be a subgroup of a Baer group K. If every subgroup $Y \ge H$ of K is normal closure length at most n in K, then $K^{(\tau(n))} \le H^K$, where $\tau(n) = \sum_{i=1}^{n}([\log_2 \mu(i)]+1)$ and $\mu(i)$ is the function of Roseblade's (6).

Proof: We shall show, by induction on n, that $K^{(\tau(n))} \le H^K$. If $n = 1$, then $H^{K,2} = H^K \triangleleft K$ and every subgroup of K/H^K is normal closure length 1; in this case K/H^K is nilpotent by Lemma 1 (2). Thus K/H^K is metabelian group. $\mu(1) = 2$ by 13.4.2 (7), and

(7) den dolayı $\mu(1)=2$ ve sonuç olarak $K^{(\tau(1))} \leq H^K$ dir.

$n>1$ ve T, H^K nın H yı içeren her hangi bir altgrubu olsun. O zaman $T^K = H^K$ dir. T nin K içindeki normal kapanış uzunluğu en çok n olduğundan T nin H^K içindeki normal kapanış uzunluğu en çok $n-1$ dir. T ve H^K indüksiyon hipotezi uygulanırsa $T^{(n)} \leq H^K$ dır. T, H^K nın H yı içeren altgrubu olduğundan $(H^K)^{(\tau(n-1))} \leq H^K$ dır. Şimdi, K/H^K nın her altgrubunun normal kapanış uzunluğu en çok n dir. Böylece Lemma 1 (2) den dolayı K/H^K nilpotenttir ve K/H^K nın nilpotentlik sınıfı en çok $\mu(n)$ dir, $\mu(n)$ Roseblade fonksiyonudur (6). 5.1.12 (7) den dolayı K/H^K nın çözülebilir uzunluğu en çok $e=[\log_2 \mu(n)+1]$ dir. Böylece $K^{(e)} \leq H^K$, ve $K^{(\tau(n))} = (K^{(e)})^{(\tau(n-1))} \leq H^K$ dir.

Teorem 2.1. G bir Baer $\wp$-grup olsun. Kabul edelim ki H, G nin bir altgrubu olsun, eğer $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ ise öyle bir n doğal sayısı vardır ki $H \leq L \leq G$ olan her L altgrubu için $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ olsun. O zaman Baer grubunun derived serisi sonlu adımda durur.

İspat: Hypoabelian $\wp$-grubun çözülebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece G bir hypoabelian $\wp$-grup olsun. Kabul edelim ki G çözülebilir grup olmasın. O zaman Lemma 2.1. den dolayı, G nin çözülebilir olmayan bir altgrubu K ve K nın sonlu üreteçli altgrubu H vardır ve bir r pozitif tamsayı olmak üzere K nın H yı içeren çözülebilir olmayan altgruplarının K içindeki normal kapanış uzunlukları en çok r dir. Eğer S, K nın böyle bir altgrubu ise o zaman K nın S yi içeren her altgrubu çözülebilir değildir. Sonuç olarak K içindeki normal kapanış uzunlukları en çok r dir. Lemma 2.2. den dolayı $K^{(\tau)} \leq S^K$, $\tau = \tau(r)$ dir. Eğer V, K nın çözülebilir olmayan bir altgrubu ise o zaman $R \leq \langle V, H\rangle K'$, $R = K^{(\tau)}$ dir. Her hangi bir n pozitif tamsayısı için K çözülebilir olmadığından $K^{(n)}$ çözülebilir değildir ve böylece $R \leq K^{(n)}H$ dir. G Baer grup olduğundan H nilpotenttir. H nın derived serisi t ve $d = t+\tau+1$ olsun. O zaman $R \leq K^{(d)}H^{(t)} = K^{(d)} = (K^{(\tau)})^{(t+1)} = R^{(t+1)} = (R^{(t)})'$ dir. Fakat, G hypoabelian grup olduğundan G nin aşikar olmayan perfekt altgrubu yoktur. Böylece $K^{(\tau+1)} = R^{(t)} = 1$ dir. Bu bir çelişkidir.

Sonuç 2.1. G bir residually çözülebilir grup ve H, G nin bir altgrubu olsun, eğer $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ ise öyle bir n doğal sayısı vardır ki $H \leq L \leq G$ olan her L altgrubu

so $K^{(\tau(1))} \leq H^K$.

Let $n>1$ and T be any subgroup of H^K containing H, then $T^K = H^K$. Since T has normal closure at most n in K, it has normal closure length at most $n-1$ in H^K. Applying the induction hypothesis to T and H^K we obtain $T^{(n)} \leq H^K$. Since T is a subgroup of H^K containing H, $(H^K)^{(\tau(n-1))} \leq H^K$. Now, every subgroup of K/H^K is normal closure length at most n; therefore, by Lemma 1 (2), K/H^K is nilpotent and K/H^K is nilpotent class at most $\mu(n)$, where $\mu(n)$ is the function of Roseblade's (6). In particular it is soluble of derived length at most $e=[\log_2 \mu(n)+1]$ by 5.1.12 (7). Hence $K^{(e)} \leq H^K$, and so $K^{(\tau(n))} = (K^{(e)})^{(\tau(n-1))} \leq H^K$.

Theorem 2.1. Let G be a Baer $\wp$-group and suppose that for any subgroup H of G, if $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$, then $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ for $H \leq L \leq G$, where n is a natural number. The derived series of a Baer group terminates after a finite number of steps.

Proof: It suffices to prove that hypoabelian groups in $\wp$ are soluble. Thus, let G be a hypoabelian group in $\wp$, and assume that G is a non-soluble group. Then by Lemma 2.1., there exists a non-soluble subgroup K of G, a finitely generated subgroup H of K, and a positive integer r, such that every non-soluble subgroup of K which contains H has normal closure length at most r in K. If S is such a subgroup of K, then every subgroup of K containing S is non-soluble. So it has normal closure length at most r in K. By Lemma 2.2., $K^{(\tau)} \leq S^K$, where $\tau = \tau(r)$. Therefore, if V is a non-soluble subgroup of K, then $R \leq \langle V, H\rangle K'$, where $R = K^{(\tau)}$. In particulary, for any positive integer n, we have $R \leq K^{(n)}H$, since K is non-soluble, so $K^{(n)}$ is non-soluble, for every n natural number. Since G is a Baer group, H is nilpotent. Let t be the derived length of H and put $d = t+\tau+1$ then $R \leq K^{(d)}H^{(t)} = K^{(d)} = (K^{(\tau)})^{(t+1)} = R^{(t+1)} = (R^{(t)})'$. But, since G is a hypoabelian group, no non-trivial subgroup of G is perfect; therefore $K^{(\tau+1)} = R^{(t)} = 1$, that is a contradiction.

Corollary 2.1. Let G be a residually soluble group and suppose that for any subgroup H of G, if $H^{G,n} = H^{G,n+1} = \ldots$ then $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ for $H \leq L \leq G$, where n is a natural number. If G is a Baer için $H^{L,n} = H^{L,n+1} = \ldots$ olsun. Eğer G bir Baer $\wp$-grup ise G çözülebilirdir.

İspat: G bir residually çözülebilir Baer $\wp$-grup olsun. G residually çözülebilir olduğundan G hypoabelian gruptur. Böylece, Teorem 2.1 in ispatına benzer yolla G nin çözübelir olduğu gösterilebilir.

$\wp$-group then G is soluble.

Proof: Let G be a residually soluble Baer $\wp$-group. Since G is residually soluble, G is hypoabelian group. Therefore, it can be shown that G is soluble,as the same way in the proof of Theorem 2.1.

KAYNAKLAR/ REFERENCES

1. Robinson, D. J. S., *Finiteness conditions and generalized soluble groups, vols. I and vols. II*, ***Springer-Verlag,*** Heidelberg-Berlin-New York (1972).

2. McDougall, D., "The subnormal structure of some classes of soluble groups", ***J. Austral, Math. Soc.*** 13: 365-377 (1972).

3. Möhres, W., "Gruppen, deren untergruppen alle subnormal sind", Doctoral dissertation**,** Würzburg (1988).

4. Casolo, C., "Groups in which all subgroups are subnormal" ***Rendiconti Academia Nazionale delle Scienze detta dei*** XL Vol. X, fasc. 22: 247-249 (1986).

5. Brookes, C. J. B. "Groups with every subgroup subnormal", ***Bull. London Math. Soc.*** 15: 235-238 (1983).

6. Roseblade, J. E., "On groups in which every subgroup is subnormal", ***J. Algebra*** 2 :402-412 (1965).

7. Robinson, D. J. S., *A course in the theory of groups*, ***Springer-Verlag,*** Heidelberg-Berlin-New York (1982).

Received/ Geliş Tarihi:24.01.2003 Accepted/Kabul Tarihi: 26.05.2004