G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi, 16(1):63-67, 2003 ISSN 1303-9709 G.Ü. Journal of Science 16(1):63-67, 2003

# İKİ DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN BERNSTEIN POLİNOMLARI ÜZERİNE

İbrahim BÜYÜKYAZICI
*Gazi Üniversitesi, Kastamonu Eğitim Fakültesi, Kastamonu, TÜRKİYE.*

**ÖZET**

Bu çalışmada; $f(x,y)$, $[a,b;a,b]$ karesinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $f(x,y)$ fonksiyonuna bağlı

$$B_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n},a+(b-a)\frac{j}{m}\right)P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)P_{j,m}\left(\frac{y-a}{b-a}\right);$$

$a\le x,y\le b$

Bernstein polinomlar dizisinin $f(x,y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ispat edilmiştir.

*Anahtar Kelimeler: Bernstein polinomları, fonksiyon uzayları, düzgün yakınsaklık*

# ON BERNSTEIN POLYNOMIALS OF TWO VARIABLE FUNCTIONS

**ABSTRACT**

In this study, $f(x,y)$ is a continuous function which is defined in $[a,b;a,b]$ square;

$$B_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n},a+(b-a)\frac{j}{m}\right)P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)P_{j,m}\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$$

$a\le x,y\le b$

It is proven that Bernstein polynomials sequence related to f(xy) function, is uniform y convergent to $f(x,y)$.

*Key Words: Bernstein polynomials, function spaces, uniform convergent*

## 1. GİRİŞ

D [ 0,1;0,1 ] karesi üzerinde tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı C(D) ile gösterilir. C(D) lineer normlu uzaydır ve bu uzayda norm

$$\|f\|_{C(D)}=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$$

olarak tanımlanabilir. $\{f_{n,m}\}$, C(D) uzayında fonksiyon dizisi iken, f C(D) için

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|f_{n,m}-f\right\|_{C(D)}=0$$

oluyorsa, { fn,m} dizisi f fonksiyonuna C(D) uzayında yakınsar denir. { fn,m} dizisinin C(D) uzayında bir f fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter şart bu dizinin aynı fonksiyona D karesinde düzgün yakınsamasıdır. Böylece, C(D) uzayının normuna göre yakınsaklık düzgün yakınsaklıktır.

## 2. C(D) UZAYINDA KARLESON PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

n ve m belirlenmiş doğal sayılar olmak üzere, ox-ekseninde $[0,1]$ aralığını $\alpha_{k,n}$ ; $k=0,1,\ldots,n$ noktalarıyla $0=\alpha_{0,n}<\alpha_{1,n}<\ldots<\alpha_{n,n}=1$ ve oy-ekseninde $[0,1]$ aralığını $\beta_{j,m}$ ; $j=0,1,2,\ldots,m$ noktalarıyla $0=\beta_{0,m}<\beta_{1,m}<\ldots<\beta_{m,m}=1$ biçiminde parçalara bölelim. $\left(P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)\right)$, D karesinde sürekli pozitif fonksiyonların matrisi ve f D karesinde sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$T_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f(\alpha_{k,n},\beta_{j,m})P_{k,j}^{(n,m)}(x,y) \qquad [1]$$

toplamları ile tanımlı n,m f dizisini oluşturalım.

Problem( iki değişkenli Karleson problemi) : Tek değişkenli Karleson problemi Karleson tarafından önerilmiş Bohman tarafından çözülmüştür (5).

$\alpha_{k,n}$, $\beta_{j,m}$ sayıları ve $P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)$ fonksiyonları hangi koşulları sağlamalıdır ki

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|T_{n,m}f-f\right\|_{C(D)}=0 \qquad [2]$$

olsun?

Bu problemin çözümü aşağıdaki teoremle verilir:

TEOREM 2.1. (1) ile tanımlı n,m f dizisinin f C(D) fonksiyonuna yaklaşım probleminin çözümü olması için, yani (2) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşullar

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-1\right\|_{C(D)}=0 \qquad [3]$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{k,n}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-x\right\|_{C(D)}=0 \qquad [4]$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\beta_{j,m}P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-y\right\|_{C(D)}=0 \qquad [5]$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\alpha_{k,n}^2+\beta_{j,m}^2)P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)}=0 \qquad [6]$$

dır (4).

## 3. C(D) UZAYINDA BERNSTEIN POLİNOMLARIYLA YAKLAŞIM

(x,y) D = [ , ; , ] olmak üzere, $1^n=(1-x+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ ve

$1^m=(1-y+y)^m=\sum_{j=0}^{m}C_m^j y^j(1-y)^{m-j}$ özdeşliklerinden

$$1=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}C_n^k C_m^j x^k(1-x)^{n-k}y^j(1-y)^{m-j}$$

eşitliğini yazabiliriz.

$$P_{k,n}(x)=C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \qquad [7]$$

işaretini kabul edersek

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)=1 \qquad [8]$$

olduğu

$$\sum_{k=0}^{n}P_{k,n}(x)=1 \quad , \quad \sum_{j=0}^{m}P_{j,m}(y)=1 \qquad [9]$$

formüllerinden görülmektedir.

(8) eşitliğinden yararlanarak, D karesinde sürekli bir f fonksiyonunun Bernstein polinomlar şu şekilde oluşturalım,

$$B_{n,m}(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}f\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) \qquad [10]$$

TEOREM 3.1. $f$, D karesinde sürekli bir fonksiyon olduğunda

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\| B_{n,m}f-f\right\|_{C(D)}=0$$

dır.

İspat: [10] formülündeki polinomlarını (1) formülünde tanımlanmış *Bn,m(f ; x , y)* toplam ile karşılaştırırsak,

$$\alpha_{k,n}=\frac{k}{n} \quad , \quad \beta_{j,m}=\frac{j}{m} \quad , \quad P_{k,j}^{(n,m)}(x,y)=P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

olarak seçildiği durumda $T_{n,m}(f;x,y)=B_{n,m}(f;x,y)$ dır. Bundan dolayı $\{B_{n,m}f\}$ dizisinin $n,m\to\infty$ iken sürekli $f$ fonksiyonuna $C(D)$ normunda yakınsaması için [3]- [6] koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. [8] formülüne göre

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-1\right\|_{C(D)}=0$$

olduğunu görülür ve bu da [3] formülünün sağlandığını göstermektedir. $\alpha_{k,n}=\frac{k}{n}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)=x \qquad [11]$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)=x^2+\frac{x-x^2}{n} \qquad [12]$$

eşitlikleri yazılabilir (1,2,3).

[8] ve [11] formüllerine göre

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k}{n}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}P_{k,n}(x) = x$$

dır ve bundan dolayı

elde edilir. Böylece (4) formülü de sağlanır. Benzer şekilde

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j}{m}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-y\right\|_{C(D)} = 0$$

ve formülü de sağlanmaktadır. Son olarak, [6] formülünün sağlandığını gösterelim. [9] formülüne göre

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{j^2}{m^2}P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}P_{k,n}(x)+\sum_{j=0}^{m}\frac{j^2}{m^2}P_{j,m}(y)$$

[12] eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-(x^2+y^2)=\frac{x(1-x)}{n}+\frac{y(1-y)}{m}$$

yazabiliriz ve buradan da

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)} \le \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

elde ederiz. Her iki tarafın, $(x,y)\in D$ olmak üzere, maksimum alınırsa

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{k^2}{n^2}+\frac{j^2}{m^2}\right)P_{k,n}(x)P_{j,m}(y)-(x^2+y^2)\right\|_{C(D)} \le \frac{1}{n}+\frac{1}{m}$$

olduğunu görürüz ve $n,m \to \infty$ iken limite geçilirse [6] formülü sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.1. in tüm koşulları sağlanır ve bu teoreme göre Teorem 3.1. ispatlanmış olur. Şimdi $b > a$ olmak üzere $D_{ab}$ ile $D_{ab} = [a,b;a,b]$ karesini gösterelim. $D_{ab}$ karesinde sürekli fonksiyonlar uzayını $C(D_{ab})$ ile gösterelim ve uygun olarak

$$\|f\|_{C(D_{ab})} = \max_{(x,y)\in D_{ab}} |f(x,y)|$$

olsun. $f\in C(D_{ab})$ olduğunu kabul edelim. Açıkça görülüyor ki $D_{ab}$ karesinin her bir $(x,y)$ noktasının bileşenlerini

$$x = a+(b-a)t\ ,\ 0\le t\le 1\ ;\ y = a+(b-a)\tau\ ,\ 0\le \tau\le 1$$

biçiminde gösterebiliriz. $f\in C(D_{ab})$ olmak üzere $(t,\tau)\in D$ noktalarına bağlı bir $\varphi$ fonksiyonunu ele alalım ve

$$\varphi(t,\tau) = f(a+(b-a)t, a+(b-a)\tau) \qquad [13]$$

olsun. $f \in C(D_{ab})$ olduğundan $\varphi \in C(D)$ dir ve biz $\varphi$ fonksiyonunun Bernstein polinomunu yazabiliriz. (10) formülüne göre bu polinom

$$B_{n,m}(\varphi;t,\tau) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \varphi\left(\frac{k}{n},\frac{j}{m}\right) P_{k,n}(t)\, P_{j,m}(\tau) \qquad [14]$$

biçimindedir ve Teorem 3.1 den dolayı

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m}(\varphi;t,\tau) - \varphi(t,\tau) \right\|_{C(D)} = 0 \qquad [15]$$

dir. Açıkça görülüyor ki

$$t = \frac{x-a}{b-a}, \quad \tau = \frac{y-a}{b-a} \qquad a \le x, y \le b$$

formüllerine göre (x,y) Dab iken (t, ) D olur. Bu durumda, [13] formülünden

$$\varphi\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right) = f(x,y)$$

elde edilir. Dolayısıyla, [13] formülündeki fonksiyonunun Bernstein polinomlarını şu şekilde yazabiliriz,

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}, a+(b-a)\frac{j}{m}\right) P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) P_{j,m}\left(\frac{y-a}{b-a}\right) \qquad [16]$$

ve bunlar, Dab karesinde tanımlı f fonksiyonunun Bernstein polinomlarıdır.

[15]' e göre aşağıdaki teorem ispatlanmış olur:

TEOREM 3.2. $f \in C(D_{ab})$ fonksiyonunun Bernstein polinomları [16] olmak üzere, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m}f - f \right\|_{C(D_{ab})} = 0$ dır.

Benzer şekilde $D_{a,b;c,d} = [a,b;c,d]$ dikdörtgenini ele alarak ve $C(D_{a,b;c,d})$ uzayını tanımlayarak bir $f \in C(D_{a,b;c,d})$ fonksiyonunun

$$B_{n,m}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}, c+(d-c)\frac{j}{m}\right) P_{k,n}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) P_{j,m}\left(\frac{y-c}{d-c}\right) \qquad [17]$$

Bernstein polinomları için aşağıdaki sonucu ispatlayabiliriz:

SONUÇ 3.3. $f \in C(D_{a,b;c,d})$ fonksiyonunun Bernstein polinomları [17] olmak üzere, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\| B_{n,m} f - f \right\|_{C(D_{a,b;c,d})} = 0$ dır.

## KAYNAKLAR


1. Korovkin, P.P., "Linear operators and approximation theory", ***Delhi*** (1960).
2. Hacıyev, A., Hacısalihoğlu, H.H., Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı, Ankara (1995).
3. Lorenz, G.G., Bernstein Polynomials, Toronto (1953).
4. Volkov, V.I., " On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of two variables", ***Dokl. Akad. Nauk. SSSr***(N.S.), (115): 17-19 (1957).
5. Bohman, H., "On approximation of continuous and of analytic functions", ***Ark.Mat.***,(2):43-52.


*Geliş Tarihi:14.08.2001* *Kabul tarihi:19.11.2002*